47. 1988.
F2557

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETARI DE MECANICĂ APLICATĂ

1988-05-31

1

TOMUL 47

ianuarie—februarie

1988

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R.S. România se vor adresa la : ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex : 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România ; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 1 ianuarie — februarie 1988

SUMAR

STUDII

M. POPESCU, A. HALANAY, GH. CONSTANTINESCU, T. GHINDA, Studiul rezonanței pentru stații de pompare echipate cu dublu sistem de protecție la șoc hidraulic 3

N. POSEA, CRISTINA COMAN, ȘT. MINOIU, I. EPARU, Asupra rezistenței, vibrațiilor și stabilității masturilor de tip „U" 17

A. CARABINEANU, Aplicarea metodei transformărilor conforme în teoria aripii subțiri 25

AL. POPOVICI, C. ENE, Cinematica unităților de pompare hidraulice utilizate în extracția petrolului 29

AL. D. STAN, M. ALBULESCU, Criterii pentru corecția debitului de gaze determinat prin metoda orificiului în prezența apei 37

G. ONU, Echivalențe în calculul suprastructurilor de pod 47

GH. I. ENE, GH.-D. PASAT, Determinarea puterii necesare acționării amestecătoarelor pentru materiale pulverulente și granulare, cu dispozitive mecanice de amestecare 69

NOTE

M. V. SOARE, Asupra unei probleme neliniare de rezistența materialelor 77

RECENZII 85

2557

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S. I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte, a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

BUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

STUDIUL REZONANȚEI PENTRU STAȚII DE POMPARE ECHIPATE CU DUBLU SISTEM DE PROTECȚIE LA ȘOC HIDRAULIC

de M. POPESCU
GH. CONSTANTINESCU
T. GHINDA
Institutul de Cercetări Hidrotehnice — București

A. HALANAY
Universitatea din București

Folosind conceptul de sensibilitate la rezonanță introdus anterior de către autori [8], se propune o metodă de calcul al rezonanței hidraulice pentru stații de pompare prevăzute cu dublu sistem de protecție la șoc hidraulic (două rezervoare de aer sau rezervor de aer și castel de echilibru).

Pentru a ilustra posibilitățile practice de aplicare a metodei la studiul rezonanței hidraulice ce poate să apară în funcționarea unor stații de pompare, se prezintă rezultatele calculelor efectuate pentru o stație de pompare din țara noastră echipată cu două rezervoare de aer, în mai multe variante de protecție la șoc hidraulic.

1. INTRODUCERE

Schemele stațiilor de pompare prevăzute cu dublu sistem de protecție la șoc hidraulic s-au impus în practica inginerească, în special în cazurile în care conducta de refulare prezintă în profil longitudinal schimbări de pantă în anumite puncte înalte, fie în varianta cu două rezervoare de aer (fig. 1—I), fie în varianta cu rezervor de aer și castel de echilibru (fig. 1—II), cînd acesta din urmă se poate realiza într-o soluție constructivă cu înălțimea castelului de pînă la 20 ÷ 25 m [9].

Problema rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice și stații de pompare a fost studiată în literatura de specialitate [1], [2], [3], [5], [10] ca un element important pentru proiectare și exploatare.

În cîteva lucrări anterioare am tratat problema rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice pentru schema fundamentală [6], cît și pentru scheme hidraulice complexe [4], și la stații de pompare pentru schema hidraulică fundamentală [7]. Introducînd conceptul de sensibilitate la rezonanță, am propus o strategie globală de abordare a problemei prin calcule de rezonanță cuplate cu măsuri practice de supraveghere în exploatare a sistemelor hidraulice sensibile la rezonanță, care în final conduce la înlăturarea riscului de accident [8].

Pornind de la aceste rezultate, în lucrarea de față se abordează studiul rezonanței hidraulice pentru stațiile de pompare prevăzute cu dublu sistem de protecție.

2. MODELUL DE CALCUL

Ecuațiile generale ale mișcării apei în sistemul hidraulic I (fig. 1), exprimînd pierderile de sarcină din branșamentele rezervoarelor de aer

prin relaţii liniare, sînt următoarele :

$$\frac{\partial H_j}{\partial t} + a_j c_j^2 \frac{\partial Q_j}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_j}{\partial x} + a_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\Omega_j \frac{dZ_j(t)}{dt} + Q_j(l_j, t) = Q_{j+1}(0, t); \; j = 1, 2,$$

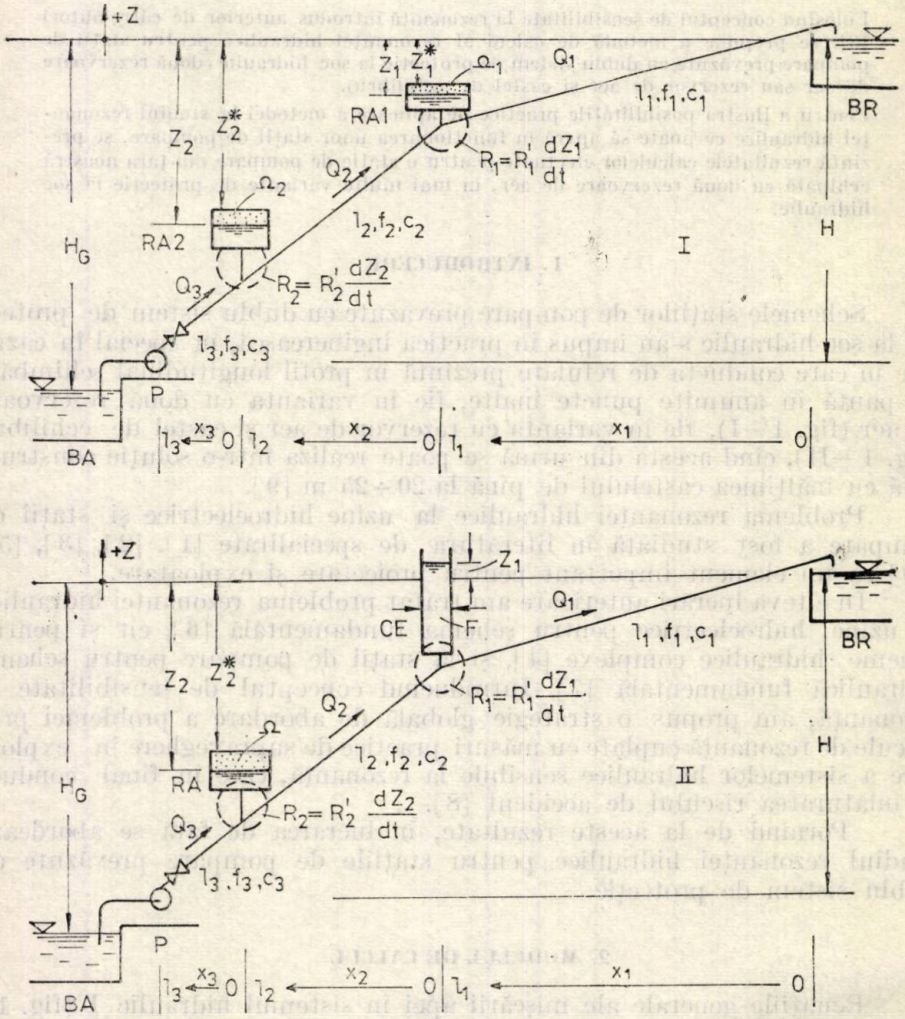


Fig. 1. — Schema unei staţii de pompare prevăzute cu : I) două rezervoare de aer; II) rezervor de aer şi castel de echilibru.

cu condițiile la limită :

$$H_1(0,\ t) = H,$$

$$H_j(l_j,\ t) = -H^* + \frac{C_j}{\gamma\Omega_j[Z_j^* - Z_j(t)]} + R'_j\frac{\mathrm{d}Z_j(t)}{\mathrm{d}t} = H_{j+1}(0,\ t);\quad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$Q_3(l_3,\ t) = \alpha\sqrt{H_3(l_3,\ t)}.$$

S-a admis o lege de debit la vană mai generală, de forma (2), cu observația că în calculele curente pentru simularea unei perturbații mici de debit la pompă se poate utiliza relația simplă de regim permanent :

$$Q_3(l_3,\ t) = Q_0 \tag{3}$$

similară unei trepte de debit.

Regimul staționar corespunzător este dat de relațiile :

$$H_1 = H_2 = H_3 = H,\ Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0\ (= \alpha\sqrt{H}),$$

$$H + H^* = \frac{C_1}{\gamma\Omega_1(Z_1^* - Z_1^0)} = \frac{C_2}{\gamma\Omega_2(Z_2^* - Z_2^0)}, \tag{4}$$

$$Z_j^* - Z_j^0 = \frac{\gamma\Omega_j(H^* + H)}{C_j};\ j = 1, 2.$$

Se admite o perturbație armonică în secțiunea pompelor și se înlocuiește α cu $(\alpha + \varepsilon Ae^{i\omega t})$, respectiv debitul Q_0 prin $Q_0(1 + \varepsilon e^{i\omega t})$; corespunzător acestei perturbații rezultă :

$$H_j(x,\ t) = H + \varepsilon\hat{H}_j(x,\ t) + \ldots,$$

$$Q_j(x,\ t) = Q_0 + \varepsilon\hat{Q}_j(x,\ t) + \ldots;\ j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$$Z_j(t) = Z_j^0 + \varepsilon\hat{Z}_j(t) + \ldots;\ j = 1, 2.$$

Neglijînd termenii de ordin superior în ε, obținem pentru $\hat{H}_j$, $\hat{Q}_j$, $\hat{Z}_j$ următoarele ecuații :

$$\frac{\partial\hat{H}_j}{\partial t} + a_j c_j^2\frac{\partial\hat{Q}_j}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\hat{H}_j}{\partial x} + a_j\frac{\partial\hat{Q}_j}{\partial t} = 0;\ j = 1, 2, 3,$$

$$\Omega_j\frac{\mathrm{d}\hat{Z}(t)}{\mathrm{d}t} + \hat{Q}_j(l_j,\ t) = \hat{Q}_{j+1}(0,\ t);\ j = 1, 2, \tag{6}$$

$$\hat{H}_j(l_j,\ t) = \frac{C_j}{\gamma\Omega_j(Z_j^* - Z_j^0)^2}\hat{Z}_j(t) + R'_j\frac{\mathrm{d}\hat{Z}_j(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{H}_{j+1}(0,\ t);\ j = 1, 2,$$

$$\frac{C_j}{\gamma\Omega_j(Z_j^* - Z_j^0)^2} = \frac{H^* + H}{Z_j^* - Z_j^0};\quad j = 1, 2,$$

$$\hat{H}_1(0,\ t) = 0,\ \hat{Q}_3(l_3,\ t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\hat{H}_3(l_3,\ t) + A\sqrt{H}\,e^{i\omega t}.$$

În cazul treptei de debit, ultima condiție de mai sus devine :

$$Q_3(l_3,\ t) = Q_0\, e^{i\omega t}. \tag{7}$$

În continuare vom trata cazul general, cu condiții la limită de tip (2). Se va analiza răspunsul armonic sub forma :

$$\hat{H}_j(x,\ t) = e^{i\omega t}\,\tilde{H}_j(x),\ \hat{Q}_j(x,\ t) = e^{i\omega t}\tilde{Q}_j(x);\ j = 1, 2, 3,$$

$$\hat{Z}_j(t) = e^{i\omega t}\,\tilde{Z}_j;\ j = 1, 2. \tag{8}$$

Pentru acest răspuns rezultă ecuațiile :

$$\begin{gathered} i\omega\tilde{H}_j(x) + a_j c_j^2 \tilde{Q}_j'(x) = 0, \\ \tilde{H}_j'(x) + i\omega a_j \tilde{Q}_j(x) = 0;\ j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{9}$$

care conduc la

$$\begin{gathered} \tilde{H}_j(x) = \alpha_j e^{\frac{i\omega x}{c_j}} + \beta_j e^{-\frac{i\omega x}{c_j}}, \\ \tilde{Q}_j(x) = \frac{1}{a_j c_j}\left[\beta_j e^{-\frac{i\omega x}{c_j}} - \alpha_j e^{\frac{i\omega x}{c_j}}\right];\ j = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{10}$$

iar din condițiile la limită rezultă :

$$\begin{gathered} \tilde{H}_1(0) = 0,\ i\omega\Omega_j\tilde{Z}_j + \tilde{Q}_j(l_j) = \tilde{Q}_{j+1}(0);\ j = 1, 2, \\ \tilde{H}_j(l_j) = \frac{H^* + H}{Z_j^* - Z_j^0}\tilde{Z}_j + i\omega R_j'\tilde{Z}_j = \tilde{H}_{j+1}(0);\ j = 1, 2, \\ \tilde{Q}_3(l_3) = \frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\tilde{H}_3(l_3) + A\sqrt{H}. \end{gathered} \tag{11}$$

Frecvențele periculoase sînt cele pentru care funcția $|\tilde{H}_3(l_3)|$ ia valori maxime. Aceasta înseamnă că s-a considerat amplitudinea oscilațiilor de presiune în secțiunea vanei ca fiind cea mai semnificativă pentru analiza fenomenului de rezonanță.

3. CALCULUL FRECVENȚELOR DE REZONANȚĂ

Introducînd notațiile :

$$\rho_j(\omega) = \frac{\Omega_j\omega}{\dfrac{H^* + H}{Z_j^* + Z_j^0} + i\omega R_j'};\ j = 1, 2,$$

$$S_1(\omega) = \frac{1}{a_3 c_3}\sin\frac{\omega l_2}{c_2}\cos\frac{\omega l_3}{c_3} + \frac{1}{a_2 c_2}\cos\frac{\omega l_2}{c_2}\sin\frac{\omega l_3}{c_3},$$

$$S_3(\omega) = \frac{1}{a_1c_1}\cos\frac{\omega l_1}{c_1}\sin\frac{\omega l_2}{c_2} + \frac{1}{a_2c_2}\sin\frac{\omega l_1}{c_1}\cos\frac{\omega l_2}{c_2},$$

$$C_1(\omega) = \frac{1}{a_2c_2}\cos\frac{\omega l_2}{c_2}\cos\frac{\omega l_3}{c_3} - \frac{1}{a_3c_3}\sin\frac{\omega l_2}{c_2}\sin\frac{\omega l_3}{c_3},$$

$$C_3(\omega) = \frac{1}{a_1c_1}\cos\frac{\omega l_1}{c_1}\cos\frac{\omega l_2}{c_2} - \frac{1}{a_2c_2}\sin\frac{\omega l_1}{c_1}\sin\frac{\omega l_2}{c_2},$$

$$S(\omega) = \frac{1}{a_3c_3}S_3(\omega)\cos\frac{\omega l_3}{c_3} + \frac{1}{a_2c_2}C_3(\omega)\sin\frac{\omega l_3}{c_3}, \tag{12}$$

$$C(\omega) = \frac{1}{a_2c_2}C_3(\omega)\cos\frac{\omega l_3}{c_3} - \frac{1}{a_3c_3}S_3(\omega)\sin\frac{\omega l_3}{c_3},$$

$$R(\omega) = \rho_1(\omega)\rho_2(\omega)\sin\frac{\omega l_1}{c_1}\sin\frac{\omega l_2}{c_2}\sin\frac{\omega l_3}{c_3}$$

și efectuînd calculele după o procedură utilizată anterior în lucrarea [7], rezultă :

$$\frac{1}{|\tilde{H}_3(l_3)|} = \left|\frac{\alpha}{AH} + \frac{1}{iA\sqrt{H}\,a_3c_3}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{C(\omega) + \rho_1(\omega)C_1(\omega)\sin\frac{\omega l_1}{c_1} + \rho_2(\omega)S_3(\omega)\cos\frac{\omega l_3}{c_3} + R(\omega)}{S(\omega) + \rho_1(\omega)S_1(\omega)\sin\frac{\omega l_1}{c_1} + \rho_2(\omega)S_3(\omega)\sin\frac{\omega l_3}{c_3} + R(\omega)}\right|, \tag{13}$$

iar pentru cazul perturbației la treapta de debit se pune $\alpha = 0$, $A\sqrt{H} = Q_0$ și relația anterioară devine :

$$\frac{1}{a_3c_3Q_0}|\tilde{H}_3(l_3)| =$$

$$= \left|\frac{S(\omega) + \rho_1(\omega)S_1(\omega)\sin\frac{\omega l_1}{c_1} + \rho_2(\omega)S_3(\omega)\sin\frac{\omega l_3}{c_3} + R(\omega)}{C(\omega) + \rho_1(\omega)C_1(\omega)\sin\frac{\omega l_1}{c_1} + \rho_2(\omega)S_3(\omega)\cos\frac{\omega l_3}{c_3} + R(\omega)}\right|. \tag{14}$$

În cazul stației de pompare echipată cu rezervor de aer și castel de echilibru (fig. 1—II), calculele arată că relațiile (13) și (14) rămîn neschimbate, iar $\rho_1(\omega)$ și $\rho_2(\omega)$ devin :

$$\rho_1(\omega) = \frac{F\omega}{1 + i\omega R_1'}, \quad \rho_2(\omega) = \frac{\Omega\omega}{\frac{H^* + H}{Z_2^* - Z_2^0} + i\omega R_2'}. \tag{15}$$

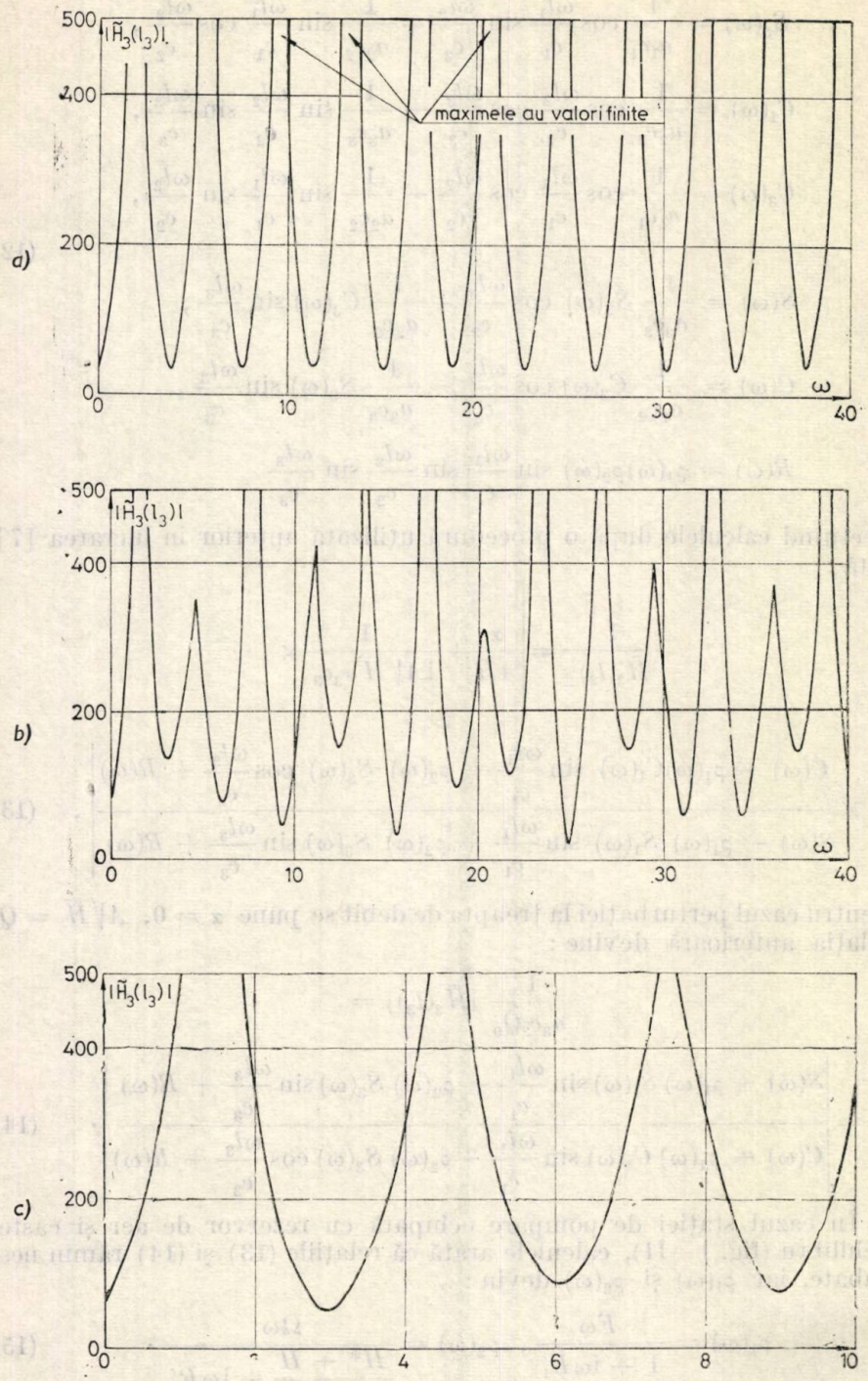


Fig. 2. — Graficul mărimii $|\tilde{H}_3(_3l)|$, în funcţie de ω (varianta 1).

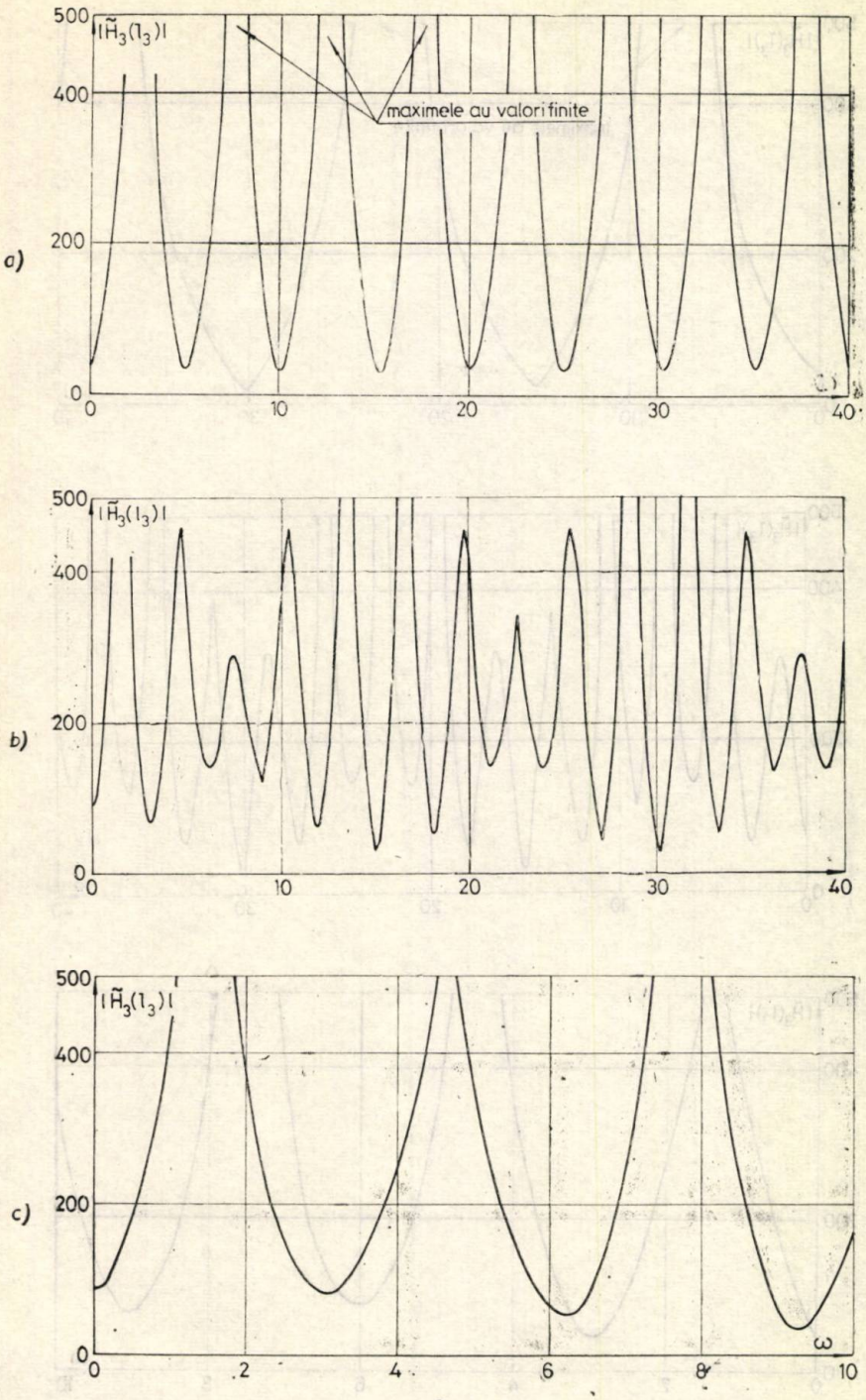


Fig. 3. — Graficul mărimii $|\tilde{H}_3(l_3)|$, în funcție de ω (varianta 2).

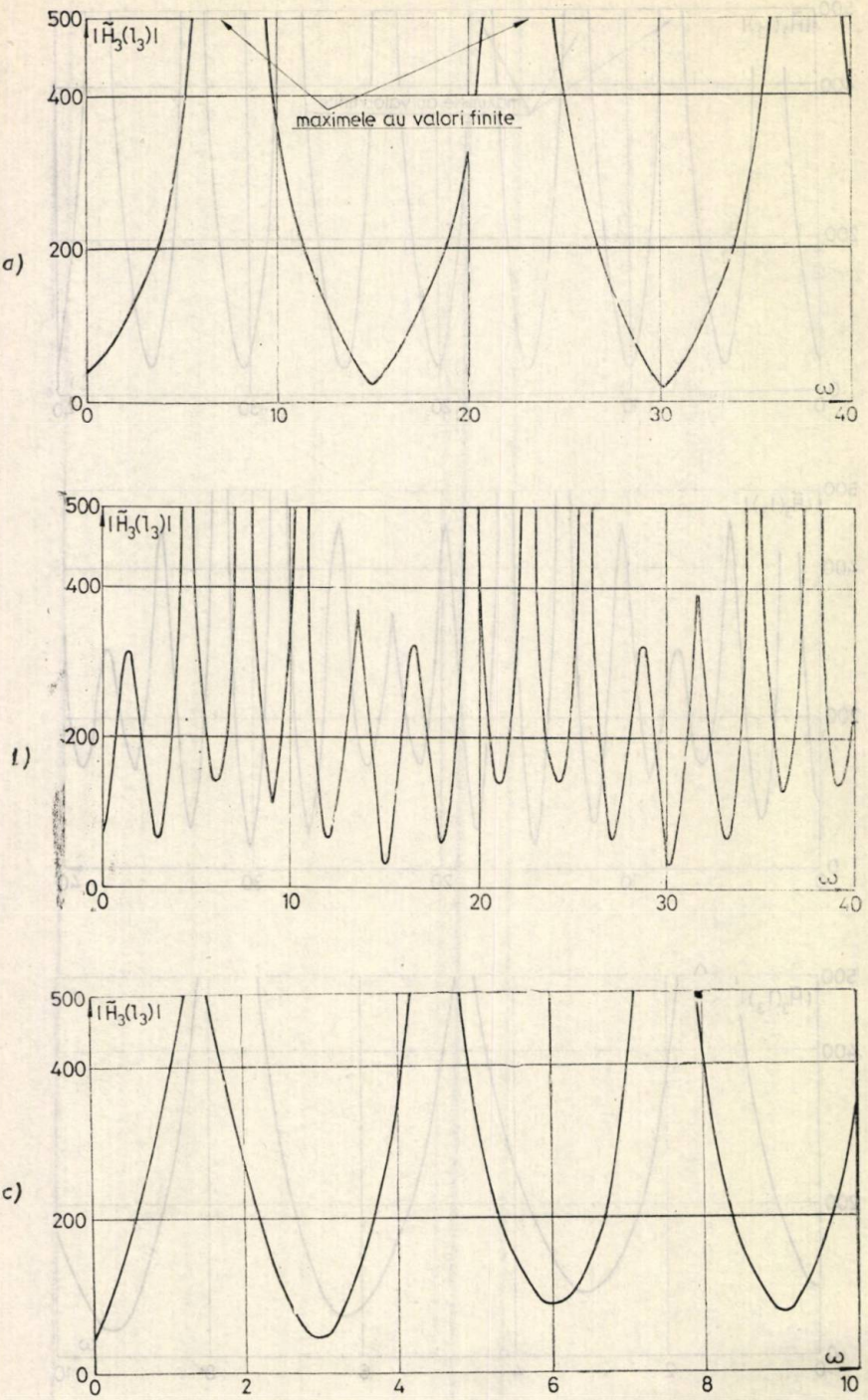


Fig. 4. — Graficul mărimii $|\tilde{H}^8(l^8)|$, în funcţie de ω (varianta 3).

4. APLICAȚII ȘI VERIFICĂRI

Pentru a ilustra posibilitățile practice de aplicare a metodei la studiul rezonanței hidraulice ce poate să apară în funcționarea unor stații de pompare, s-au efectuat calcule pentru o stație de pompare echipată cu două rezervoare de aer, în mai multe variante de protecție.

Se menționează cîteva dintre principalele caracteristici tehnice ale stației SRPA 1—6 din sistemul Sinoe [9], care face obiectul analizei noastre :

$l = 2\,313$ m, $d = 1{,}60$ m,

$l_1 = 1\,313$ m, $l_2 = 980$ m, $l_3 = 20$ m,

$V_{t1} = 30$ m^3, $V_{01} = 5$ m^3, $R_1 = 2\ Q_R^2$,

$V_{t2} = 60$ m^3, $V_{02} = 30$ m^3, $R_2 = 3{,}9\ Q_R^2$

$H_G = 64{,}5$ m, $Q_0 = 4{,}5$ m^3/s,

Pentru a ne putea face o imagine de ansamblu asupra comportării la rezonanță a unui astfel de sistem hidraulic, s-au considerat mai multe variante privind amplasarea celor două rezervoare de aer pe conducta de refulare :

1) $l_1 = 1\,313$ m, $l_2 = 200$ m, $l_3 = 800$ m,

2) $l_1 = 1\,313$ m, $l_2 = 400$ m, $l_3 = 600$ m,

3) $l_1 = 1\,313$ m, $l_2 = 800$ m, $l_3 = 200$ m,

precum și mai multe variante privind valorile rezistențelor hidraulice din branșamentele rezervoarelor de aer :

a) $R_1 = 60\ Q_R$, $R_2 = 78\ Q_R$,

b) $R_1 = 60\ Q_R$, $R_2 = 780\ Q_R$,

c) $R_1 = 60\ Q_R$, $R_2 = 1\,560\ Q_R$.

În continuare procedura și etapele de calcul sînt similare celor folosite de noi în lucrările menționate anterior [7], [8]. Astfel, pentru evidențierea frecvențelor periculoase, în cazul apariției unor perturbații mici de debit la stație, s-a calculat și reprezentat grafic funcția $|\tilde{H}_3(l_3)|$, după relația (14), în variantele adoptate (figurile 2, 3 și 4).

Au fost puse astfel în evidență, pentru aceste variante de calcul, domeniile de frecvență de excitație periculoase.

În ipoteza apariției și dezvoltării unor fenomene de rezonanță hidraulică, din punct de vedere practic este important de cunoscut care sînt presiunile maxime care pot apărea în sistem în aceste situații.

Pentru comportarea la rezonanță a sistemului hidraulic real s-au folosit proceduri de integrare numerică a sistemului neliniar de ecuații (1) cu pierderi de sarcină pătratice, în cazul unor condiții la limită concrete de tip (2)—(3), [9], iar o parte a rezultatelor calculelor numerice prelucrate sub formă grafică sînt prezentate în figurile 5, 6 și 7.

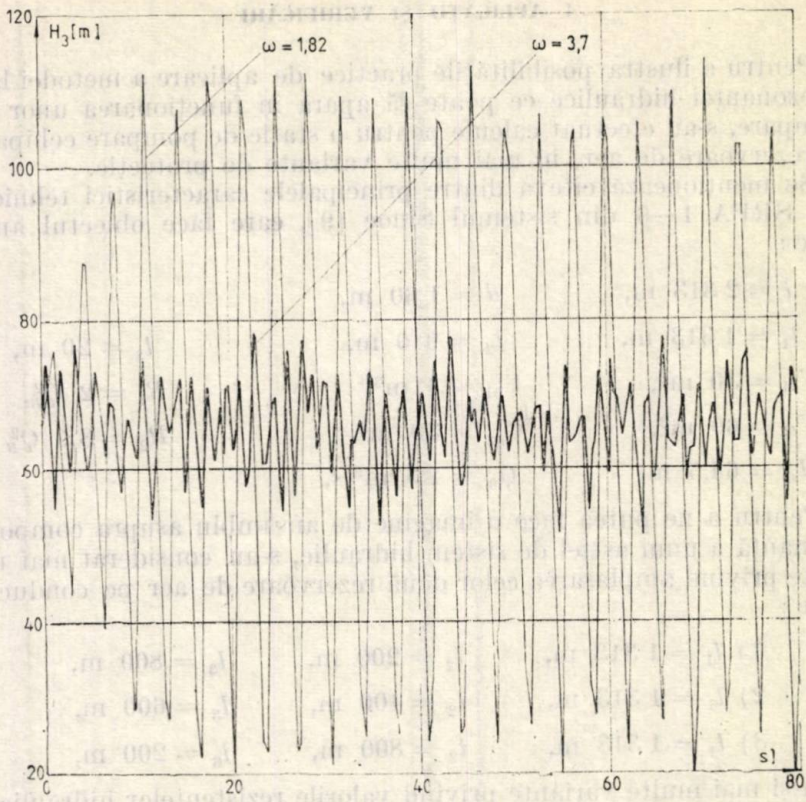


Fig. 5. — Diagrama de variație în timp a presiunii $H_3(l_3, t)$, în varianta 1-a.

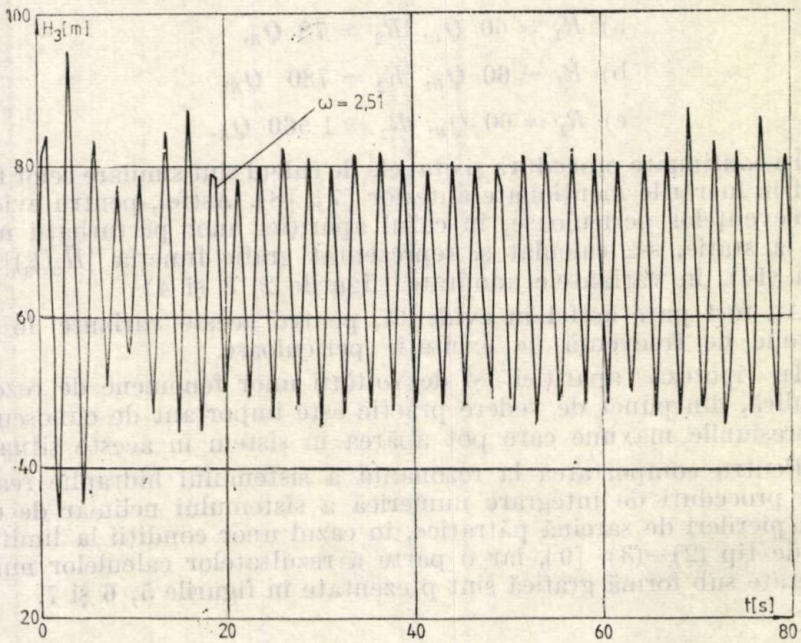


Fig. 6. — Diagrama de variație în timp a presiunii $H_3(l_3, t)$, în varianta 2-a.

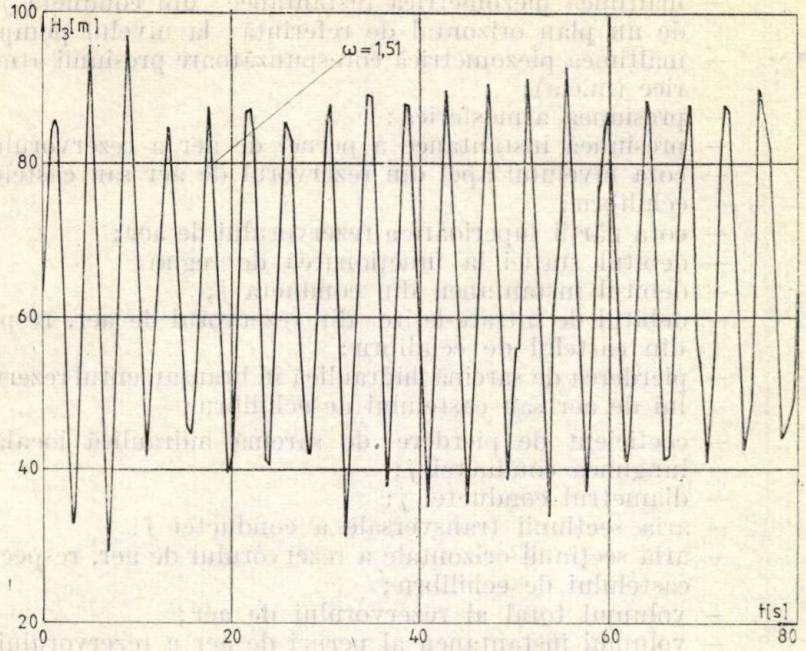


Fig. 7. — Diagrama de variație în timp a presiunii $H_3(l_3, t)$, în varianta 2-c.

Spre exemplu, din rezultatele descrise mai sus se constată că varianta 1 are sensibilitatea la rezonanță 0,8, iar varianta 2 are sensibiltatea 0,45.

Pe baza acestor rezultate și a conceptului de sensibilitate la rezonanță, la proiectarea stațiilor de pompare se pot adopta sisteme de protecție mai sigure din punct de vedere al rezonanței hidraulice.

5. CONCLUZII

Pentru stații de pompare, ca de altfel și pentru uzine hidroelectrice, studiul fenomenului de rezonanță hidraulică prezintă un deosebit interes teoretic și practic pentru prevenirea și evitarea unor accidente în exploatarea acestor sisteme hidraulice.

Plecînd de la rezultatele teoretice și aplicative obținute anterior de autori, în lucrare se prezintă o metodă de calcul care permite elaborarea unei metodologii generale de analiză a fenomenelor de rezonanță hidraulică care pot să apară în funcționarea stațiilor de pompare echipate cu dublu sistem de protecție la șoc hidraulic și se dă un exemplu de aplicare practică la proiectarea unei stații de pompare.

NOTAȚII

H — înălțimea geodezică de pompare măsurată față de axul pompelor;

H_G — înălțimea geodezică de pompare;

H_j — înălțimea piezometrică instantanee din conducta j față de un plan orizontal de referință la nivelul pompelor;
$H^* = p^*/\gamma$ — înălțimea piezometrică corespunzătoare presiunii atmosferice (m.c.a);
p^* — presiunea atmosferică;
p_a — presiunea instantanee a pernei de aer a rezervorului;
Z — cota nivelului apei din rezervorul de aer sau castelul de echilibru;
Z^* — cota părții superioare a rezervorului de aer;
Q_0 — debitul stației la funcționarea de regim;
Q_j — debitul instantaneu din conducta j;
Q_R, Q_C — debitul de intrare-ieșire din rezervorul de aer, respectiv din castelul de echilibru;
R_1, R_2 — pierderea de sarcină hidraulică în branșamentul rezervorului de aer sau castelului de echilibru;
R'_1, R'_2 — coeficient de pierdere de sarcină hidraulică locală;
l_j — lungimea conductei j;
d_j — diametrul conductei j;
f_j — aria secțiunii transversale a conductei j;
Ω, F — aria secțiunii orizontale a rezervorului de aer, respectiv a castelului de echilibru;
V_t — volumul total al rezervorului de aer;
V_a — volumul instantaneu al pernei de aer a rezervorului;
V_0 — volumul pernei de aer la funcționarea de regim a stației;
$C = (p_0 + p^*)V_a$ — constanta elastică a pernei de aer a rezervorului;
γ — greutatea specifică a apei;
g — accelerația gravitației;
t — timpul;
x_j — distanța pe conducta j, măsurată în sens invers celui de curgere;
α — coeficient de debit;
c_j — celeritatea pe conducta j;
ω — frecvența unghiulară;

$a_j = \dfrac{1}{gf_j}$;

A, ε — constante (ε — adimensional).

Primit la redacție la 15 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. H. CHAUDHRY, *Resonance in pipe systems*, Water Power, 7—8 (1970).
2. M. FANELLI, *Les phénomènes de resonance hydraulique*, La Houille Blanche, 4 (1975).
3. R. GUARGA, R. CARMONA, *Resonance and receptance in uniform conduits, Proceedings of the IAHR Work Group on the Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillatory Conditions*, Mexico City, Mexico, 18—20 September 1985.
4. A. HALANAY, M. POPESCU *Computation of hydraulic resonance for hydroelectric plants in the case of complex schemes*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., 3 (1982).
5. C. JAEGER, *Resonance in hydropower systems*, Water Power and Dam Construction, 1 (1982).

6. M. POPESCU, A. HALANAY *Le calcul de la resonance hydraulique dans les usines hydro-électriques, XX Congres IAHR*, Moscow, September 5—9, 1983.
7. M. POPESCU, AY. HALANAY, *Le calcul de la résonance hydraulique aux stations de pompage*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 6 (1984).
8. M. POPESCU, A. HALANAY, *Resonance sensitivity hidropower and pumping stations*, Water Power and Dam Construction, 9 (1984).
9. M. POPESCU, D. ARSENIE, *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidroelectrice și stații de pompare*, Editura Tehnică, București, 1987.
10. V. STREETER, E. WYLLIE, *Hydraulic transient*, McGraw Hill, New York, 1967.

ASUPRA REZISTENȚEI, VIBRAȚIILOR ȘI STABILITĂȚII MASTURILOR DE TIP „U"

de N. POSEA, CRISTINA COMAN, ȘT. MINOIU și I. EPARU

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Se prezintă o sinteză a metodelor de calcul de rezistență ale masturilor, considerate ca structuri spațiale alcătuite din bare cu noduri elastice și unele procedee noi pentru studiul stabilității masturilor de tip U, modelate ca bare drepte cu secțiune variabilă în trepte. Algoritmele generale elaborate pentru calculul de ordinul al 2-lea și pentru determinarea sarcinilor critice au fost transpuse în programe adecvate a căror rulare la calculatoare electronice este foarte ușoară și necesită timp foarte redus, cîteva minute. De asemenea, s-a elaborat un algoritm pentru calculul de rezistență al mastului de tip U în ipoteza de bară cu pereți subțiri cu secțiune constantă ale căror rezultate sînt corespunzătoare și pot fi îmbunătățite prin tronsonarea mastului.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Masturile de foraj sînt construcții spațiale, zvelte, alcătuite din bare, executate din profile sau țevi sudate, ce servesc la amplasarea utilajelor de manevră, la depozitarea și manevrarea pașilor de prăjini de foraj și la suspendarea coloanei de tubaj. Din punct de vedere al calculului de rezistență masturile sînt structuri spațiale, multiplu static nedeterminate, alcătuite din bare drepte.

Calculul masturilor de foraj în proiectare cuprinde următoarele etape :

A. Stabilirea datelor preliminarii de calcul privind : dimensiunile de bază ale mastului ; greutățile mastului și utilajelor accesorii ; sarcinile care acționează asupra mastului ; ipotezele de încărcare pentru masturi.

B. Calculul de rezistență al mastului pentru situațiile de lucru și pentru situația de montaj.

Calculul mastului pentru situația de funcționare cuprinde : determinarea eforturilor maxime în ipotezele de încărcare cele mai defavorabile ; alegerea secțiunilor picioarelor mastului, a montanților și diagonalelor ; verificarea de rezistență a elementelor ; calculul capacității mastului după normele A.P.I. ; calculul săgeții mastului.

Pentru situația de montaj se face verificarea la eforturile care apar în timpul ridicării. Se precizează că eforturile și deplasările, în oricare dintre ipotezele de încărcare considerate, se determină în ipoteza de bară a mastului și în teoria liniară a proporționalității dintre deplasări și încărcări.

Studiile efectuate au urmărit atît stabilirea unei metodologii riguroase pentru calculul eforturilor și verificările de rezistență, cît și elaborarea unor metode de calcul, cu exactitate sporită, care să necesite un volum redus de calcule.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 1, 1988, P. 17—24

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

2. CALCULUL MASTURILOR MODELATE CA STRUCTURI SPAȚIALE DIN BARE CU NODURI ELASTICE

Avînd în vedere alcătuirea constructivă a masturilor de foraj, modelul de calcul cel mai aproape de realitate este cel de structură spațială din bare drepte cu noduri elastice. Pentru un sistem de acest fel metoda de calcul cea mai indicată este metoda deplasărilor care a fost transpusă în programe de calculator cu largă aplicabilitate (SAP 4 ; SAP 05 ; SAP 05 A). Aceste programe realizează numai calculul deplasărilor și al eforturilor în teoria de ordinul 1 (teoria liniară).

Pentru determinarea tensiunilor din barele structurii și verificarea condițiilor de rezistență ținînd seama de flambajul individual al fiecărei bare s-a realizat un program specializat, care pornește de la eforturile furnizate de programele SAP.

Modelul de structură spațială din bare cu noduri elastice a fost folosit și pentru studiul comportării dinamice a masturilor. Astfel, cu oricare din programele menționate se pot obține atît pulsațiile și formele proprii de oscilație, cît și răspunsul dinamic la diferite sarcini variabile. Studiile efectuate au evidențiat modul de conlucrare dintre diferitele tipuri de bare ale mastului atît la încărcări statice, cît și dinamice. Ele permit, de asemenea, o optimizare a dimensiunilor, care conduc la economii de metal, cît și la mărirea siguranței în exploatare. Referitor la conlucrarea dintre elementele mastului, din analiza deplasărilor nodurilor secțiunilor transversale, se poate aprecia că diagonalele și barele orizontale asigură, relativ riguros, indeformabilitatea secțiunilor transversale și deci calculul masturilor de tip U, în ipoteza de bară poate fi acceptat.

Observație. Considerînd modelarea mastului ca bară cu secțiune constantă, încastrată la un capăt și liberă la celălalt, s-a determinat pulsația fundamentală prin metoda energetică cu expresia

$$p^2 = \frac{\int\limits_{(e)} EI\,(\eta_x'')^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_{(e)} \bar{m}\eta_x^2 \mathrm{d}x}, \qquad (2.1)$$

în care s-a notat : $\bar{m}$ — masa barei pe unitatea de lungime, η_x — săgeata barei la distanța x de încastrare, forma deformată a barei fiind sinusoidală.

Pulsația obținută cu relația (2.1) prezintă o eroare de numai 0,13% față de calculul exact.

3. CALCULUL DE ORDINUL AL DOILEA ȘI EVALUAREA SARCINILOR CRITICE

Masturile de foraj tip U sînt structuri relativ zvelte, cu forțe axiale și deplasări transversale importante, pentru care calculul în teoria de ordinul 1 nu este pe deplin satisfăcător. De aceea, în ipoteza de bară a mastului s-a elaborat un algoritm pentru calculul eforturilor și sarcinilor critice

pornind de la ecuația fibrei medii a unei bare încovoiate și comprimate în teoria de ordinul al 2-lea (fig. 3.1),

$$v = v_0 + \frac{\varphi_0}{K} \sin Kx - \frac{M_0}{P} (1 - \cos K x) -$$

$$- \frac{T_0}{KP} (Kx - \sin Kx) + \bar{v}, \tag{3.1}$$

în care v_0, φ_0, M_0, T_0 sînt parametrii în origine, $\bar{v}$ reprezintă soluția particulară funcție de sarcinile transversale, iar

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \tag{3.2}$$

Această ecuație, obținută prin scrierea ecuațiilor de echilibru pe forma deformată, conduce la o dependență neliniară între deplasări, eforturi și încărcările exterioare.

Se consideră un tronson $i-1$, i de lungime l_i, cu secțiune constantă, comprimat cu forța axială P_i (fig. 3.1).

Grupînd parametrii de la capete în vectorii

$$\underset{\sim}{Y}_{i-1} = [v_{i-1},\ \varphi_{i-1},\ M_{i-1},\ T_{i-1}]^T, \tag{3.3}$$

$$\underset{\sim}{Y}_i = [v_i,\ \varphi_i,\ M_i,\ T_i]^T,$$

în situația că sînt forțe transversale exterioare pe element (fig. 3.2), ecuația (3.1) permite stabilirea relației matriceale

$$\underset{\sim}{Y}_i = \underset{\sim}{A}_i \cdot \underset{\sim}{Y}_{i-1}, \tag{3.4}$$

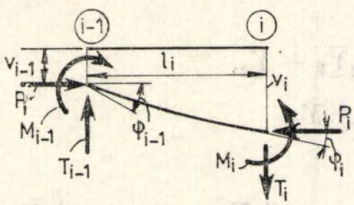


Fig. 3.1

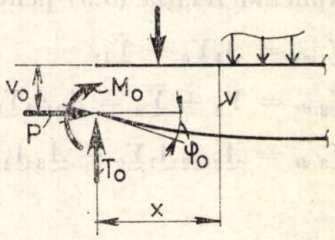


Fig. 3.2

în care matricea $\underset{\sim}{A}_i$ denumită matricea de transmitere are forma :

$$\underset{\sim}{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{\nu_i} \sin \nu_i & -\frac{1 - \cos \nu_i}{P_i} & -\frac{l_i}{P_i \nu_i} (\nu_i - \sin \nu_i) \\ 0 & \cos \nu_i & -\frac{\nu_i}{P_i l_i} \sin \nu_i & -\frac{1 - \cos \nu_i}{P_i} \\ 0 & \frac{P_i l_i}{\nu_i} \sin \nu_i & \cos \nu_i & \frac{l_i}{\nu_i} \sin \nu_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

unde

$$\nu_i = K_i l_i = l_i \sqrt{\frac{P_i}{EI_i}}. \tag{3.6}$$

Mastul avînd secțiunea variabilă, se modelează astfel încît fiecare element să poată fi considerat cu secțiunea constantă (fig. 3.3).

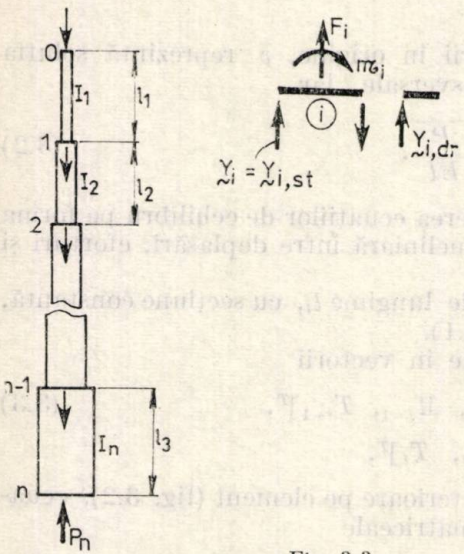


Fig. 3.3

În nodurile i se consideră sarcini transversale care se grupează în vectorul coloană

$$\underset{\sim}{\bar{Y}}_i = [0,\ 0,\ m_i,\ \bar{F}_i]^T. \tag{3.7}$$

Din echilibrul nodului i și condițiile de continuitate se obține relația matriceală :

$$\underset{\sim}{Y}_{i,dr} = \underset{\sim}{Y}_i + \underset{\sim}{\bar{Y}}_i, \tag{3.8}$$

care permite exprimarea vectorului parametrilor din dreapta unui nod în funcție de vectorul parametrilor din stînga și forțele din nod.

Folosind (3.4) în care $\underset{\sim}{Y}_{i-1}$ este $\underset{\sim}{Y}_{i-1,dr} = \underset{\sim}{Y}_{i-1} + \underset{\sim}{\bar{Y}}_{i-1}$, relația (3.8) devine :

$$\underset{\sim}{Y}_{i,dr} = \underset{\sim}{A}_i \underset{\sim}{Y}_{i-1} + \underset{\sim}{A}_i \underset{\sim}{\bar{Y}}_{i-1} + \underset{\sim}{\bar{Y}}_i. \tag{3.9}$$

Aplicînd relația (3.9) pentru toate nodurile, se obține algoritmul :

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{Y}_{i,dr} = \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{Y}_0 + \underset{\sim}{\bar{Y}}_1,\\
&\underset{\sim}{Y}_{2,dr} = \underset{\sim}{Y}_2 + \underset{\sim}{\bar{Y}}_2 = \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{Y}_0 + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{\bar{Y}}_1 + \underset{\sim}{\bar{Y}}_2,\\
&\underset{\sim}{Y}_{3,dr} = \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{Y}_0 + \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{\bar{Y}}_1 + \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{\bar{Y}}_2,\\
&\vdots\\
&\underset{\sim}{Y}_n = \underset{\sim}{A}_n \underset{\sim}{A}_{n-1} \dots \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{Y}_0 + \underset{\sim}{A}_n \dots \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{\bar{Y}}_1 + \underset{\sim}{A}_n \dots \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{\bar{Y}}_2 + \dots +\\
&\qquad + \dots + \underset{\sim}{A}_n \underset{\sim}{\bar{Y}}_{n-1},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

care permite calculul parametrilor $\underset{\sim}{Y}$ la nodurile tuturor tronsoanelor în funcție de parametrul $\underset{\sim}{Y}_0$ și sarcinile exterioare $\underset{\sim}{\bar{Y}}_i$.

Întrucît parametrul $\underset{\sim}{Y}_0$ are numai două componente cunoscute, funcție de nodul de rezemare, celelalte două se determină în funcție de rezemările de la celelalte noduri. Dacă vectorul $\underset{\sim}{Y}_n$ are și el două componente cunoscute, atunci ecuațiile corespunzătoare acestor componente din ultima relație (3.10) constituie un sistem de ecuații algebrice care permit obținerea componentelor necunoscute ale vectorului $\underset{\sim}{Y}_0$. După cunoașterea completă a vectorului $\underset{\sim}{Y}_0$ se determină cu relațiile (3.10) deplasările și eforturile în toate nodurile. Acest algoritm a fost transpus într-un program

de calculator denumit VECTORY, care permite obținerea deplasărilor și eforturilor în secțiunile mastului pe baza teoriei de ordinul al 2-lea. Efectuînd calculele pentru diferite valori ale forțelor axiale se poate evidenția influența acestora și în același timp dependența neliniară a deplasărilor și eforturilor. Dacă deplasările și eforturile tind către valori mari (teoretic infinit), înseamnă că forțele axiale tind către sarcinile critice.

Un procedeu mai adecvat pentru determinarea sarcinilor critice se obține din (3.10) în cazul absenței forțelor transversale. În această situație ultima relație din (3.10) ia forma :

$$\underset{\sim}{Y}_n = \underset{\sim}{A}_n \underset{\sim}{A}_{n-1} \cdots \underset{\sim}{A}_3 \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{Y}_0 = \underset{\sim}{A}_{n,1} \underset{\sim}{Y}_0, \tag{3.11}$$

unde $\underset{\sim}{A}_{n,1}$ reprezintă produsul matricelor de transmitere ale tuturor tronsoanelor. Relația (3.11), scrisă sub forma

$$\begin{bmatrix} Y_n \\ \varphi_n \\ M_n \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

permite evidențierea condițiilor la limită din secțiunile 0 și n. Întrucît vectorii $\underset{\sim}{Y}_0$ și $\underset{\sim}{Y}_n$ au cîte două componente nule, ecuațiile corespunzătoare componentelor nule ale lui $\underset{\sim}{Y}_n$ formează un sistem algebric omogen în componentele nenule ale vectorului $\underset{\sim}{Y}_0$. Întrucît acestea nu pot fi amîndouă nule, deoarece ar contrazice situația de flambaj considerată, trebuie ca determinantul sistemului omogen să fie nul. Se obține astfel condiția :

$$\det \underset{\sim}{B}^* = 0, \tag{3.13}$$

care reprezintă o ecuație în parametrul ν

$$f(\nu) = 0, \tag{3.14}$$

denumită ecuația de stabilitate. Rădăcinile acesteia ν_{cr}, folosind (3.6) conduc la sarcina critică

$$P_{i,cr} = \nu_{i,cr}^2 \frac{EI_i}{l_i^2}; \quad P_{cr} = \nu_{cr}^2 \frac{EI}{l^2}. \tag{3.15}$$

Deoarece se caută sarcina minimă la care se produce pierderea de stabilitate, din rădăcinile ecuației (3.14) interesează rădăcina minimă.

De exemplu, dacă $M_0 = T_0 = 0$ și $v_n = \varphi_n = 0$, adică capătul O este liber și capătul n este încastrat, din (3.12) se obține sistemul algebric omogen

$$\begin{aligned} 0 &= B_{11} v_0 + B_{12} \varphi_0 \\ 0 &= B_{21} v_0 + B_{22} \varphi_0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

din care ecuația de stabilitate este

$$\det \underset{\sim}{B}^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = 0. \tag{3.17}$$

Procedeul pentru determinarea sarcinii critice pornind de la (3.11), pentru orice condiţii limită în punctele 0 şi n a fost transpus, de asemenea, într-un program de calculator denumit NIUCRIT, care determină cu uşurinţă valoarea ν_{cr}. Acest program determină valoarea ν_{cr} în mod iterativ pe intervalul $0 - \pi$. La început intervalul este parcurs cu pasul $r = 0{,}05$ şi este reţinută valoarea ν_0, ceea mai mică valoare ν care anulează funcţia (3.14). Se micşorează apoi raţia la $r_0 = 0{,}0001$, se caută valoarea ν_{cr} în intervalul $\nu_0 - r_0$ şi $\nu_0 + r_0$. După obţinerea acesteia se determină sarcina critică cu (3.15).

Observaţie. Pentru calculul sarcinii critice, în ipoteza de bară a mastului, a mai fost realizat un program denumit„PCRIT" al cărui algoritm este conceput pe baza metodei energetice. Se adoptă o deformată de flambaj v şi sarcina critică se calculează cu relaţia :

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l (v')^2 \, dx}{\int_0^l \frac{(v_l - v)^2}{EI} \, dx}, \tag{3.18}$$

în care s-a notat cu : v — săgeata la distanţa x de origine; v_l — săgeata la capătul liber al barei; I — momentul de inerţie al secţiunii în raport cu axa faţă de care flambează; E — modulul de elasticitate longitudinal.

Programul calculează P_{cr} utilizînd derivata şi integrala numerică (prin puncte). Deformata de flambaj folosită în acest program este prima formă proprie de oscilaţie a modelului considerat, care asigură îndeplinirea completă a condiţiilor limită. În consecinţă, sarcina critică obţinută este suficient de apropiată de cea exactă.

4. CALCULUL MASTURILOR DE TIP U ÎN IPOTEZA DE BARĂ CU PEREŢI SUBŢIRI

Forma în U a secţiunii transversale a mastului şi indeformabilitatea acesteia în planul ei, constatată din analiza mastului ca structură spaţială din bare cu noduri elastice, fac posibilă adoptarea unui model de calcul pentru mast sub forma unei bare cu pereţi subţiri. Întrucît dimensiunile secţiunilor transversale prin mast sînt variabile cu înălţimea, pentru stabilirea dimensiunilor modelului de bară cu pereţi subţiri se iau în consideraţie dimensiunile secţiunii transversale medii. La stabilirea caracteristicilor geometrice ale secţiunii barei cu pereţi subţiri (ariei şi momentelor de inerţie centrale principale) se iau în consideraţie numai secţiunile montanţilor mastului, considerînd că diagonalele contribuie numai la asigurarea indeformabilităţii secţiunii transversale. Dimensiunile secţiunii barei cu pereţi subţiri se stabilesc din condiţiile ca aceasta să aibă aria şi momentele de inerţie centrale principale egale cu cele ale secţiunii medii a mastului.

Modelul de bară cu pereți subțiri se consideră încastrat la bază și acționat de un sistem de forțe similar cu cel care acționează pe mast cînd la cîrlig este aplicată sarcina maximă.

Tensiunile din bară se determină prin suprapunere de efecte, ca la solicitări compuse, cu relația :

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B^\omega}{I^\omega} \omega + \frac{N}{A}, \tag{4.1}$$

în care s-a notat cu : I_z, I_y — momentele de inerție ale secțiunii în raport cu axele z, respectiv y; I^ω — momentul de inerție sectorial; A — aria secțiunii; M_z, M_y — momentele încovoietoare în raport cu axele z și y; N — forța axială; B^ω — bimoment de încovoiere-torsiune; ω — coordonata sectorială față de centrul de încovoiere-torsiune; y, z — coordonatele punctului în care se determină tensiunea.

În urma rezultatelor obținute prin modelarea prezentată se pot preciza următoarele :

a) Tensiunile normale maxime, la nivelul la care caracteristicile geometrice ale modelului sînt foarte apropiate de cele ale structurii, sînt comparabile cu cele reale.

b) Rotirile secțiunilor transversale ale barei cu pereți subțiri determinate în ipoteza indeformabilității secțiunii transversale în planul ei, au valori mai mici decît ale structurii reale ceea ce era de așteptat; în partea superioară a mastului, unde se ajunge la un tronson închis, apare o uniformizare a rotirilor fețelor acestuia în calculul exact, ceea ce justifică în mare măsură modelul de bară cu pereți subțiri adoptat.

c) Un calcul mai exact al acestui model poate fi efectuat prin tronsonarea mastului și elaborarea unui algoritm asemănător ca în paragraful 3, pornind însă de la ecuația fibrei medii și rotirilor corespunzătoare barelor cu pereți subțiri.

5. CONCLUZII

Masturile de foraj sînt structuri spațiale complexe pentru proiectarea cărora trebuie să se folosească metode de calcul cît mai exacte atît pentru verificările de rezistență, cît și pentru determinarea sarcinilor critice și a răspunsului dinamic la sarcini perturbatoare, adeseori cu caracter aleator.

Predimensionarea masturilor poate fi efectuată în ipoteza de bară, considerînd caracteristicile geometrice ale secțiunii cu valorile corespunzătoare ale montanților.

Calculul eforturilor în ipotezele de încărcare cele mai defavorabile pentru verificarea siguranței structurii trebuie determinate cu ajutorul programelor pentru structuri spațiale din bare cu noduri elastice, care evidențiază nivelul de solicitare al tuturor elementelor și permite deci o optimizare a dimensiunilor.

Pentru determinarea sarcinilor critice și a eforturilor în teoria de ordinul al 2-lea, algoritmele și programele realizate permit obținerea unor soluții corespunzătoare a căror implementare este utilă și în același timp ușoară datorită programelor realizate.

Metodele teoretice elaborate au nevoie de confirmări experimentale şi de aceea extinderea mijloacelor pentru determinarea deformaţiilor şi tensiunilor prin măsurători tensometrice, în regim static şi dinamic, devin strict necesare.

Primit la redacţie la 30 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BÂRSAN, *Dinamica şi stabilitatea construcţiilor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
2. CH. MASSONNET ş.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
3. N. POSEA, *Rezistenţa materialelor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
4. N. POSEA ş.a., *Mecanica aplicată pentru ingineri*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1985.
5. S. TIMOSHENKO ş.a., *Teoria stabilităţii elastice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

APLICAREA METODEI TRANSFORMĂRILOR CONFORME ÎN TEORIA ARIPII SUBȚIRI

de A. CARABINEANU

Universitatea din București

În această lucrare abordăm problema aripii subțiri într-un fluid incompresibil. Folosind o teoremă variațională de reprezentare conformă datorată lui Lavrentiev și Șabat [1] p. 375, determinăm potențialul complex al vitezei, valoarea circulației și a portanței. Regăsim astfel unele rezultate obținute pe căi diferite ([2] p. 237–239, [3] p. 641–661).

Vom studia în cele ce urmează mișcarea unui fluid incompresibil în jurul unui profil subțire, cilindric, infinit. Deoarece în orice plan transversal al profilului (aripei) mișcarea este aceeași, este suficient să studiem mișcarea într-un plan xOy.

Fie

$$y = h(x) + h_1(x);\ x \in [-1, 1], \tag{1}$$

$$y = h(x) - h_1(x);\ x \in [-1, 1];\ h(\pm 1) = h_1(\pm 1) = 0 \tag{2}$$

ecuațiile extradosului, respectiv intradosului aripei.

Presupunem funcțiile h, h_1 derivabile, cu proprietatea că

$$|h(x)| < \varepsilon;\ |h'(x)| < \varepsilon;\ x \in (-1, 1), \tag{3}$$

$$|h_1(x)| < \varepsilon;\ |h_1'(x)| < \varepsilon;\ x \in (-1, 1), \tag{4}$$

unde ε este un parametru mic.

Mai presupunem că

$$|\alpha| < \varepsilon, \tag{5}$$

unde α este unghiul vitezei la infinit amonte cu axa Ox.

Din (1) și (2) rezultă că un punct de pe extrados are afixa $z = x + i(h(x) + h_1(x));\ x \in [-1, 1]$, iar unul de pe intrados, $z = x + i(h(x) - h_1(x));\ x \in [-1, 1]$.

Dacă notăm $x = \cos\theta;\ \theta \in [0, 2\pi]$, atunci pe extrados

$$z = \cos\theta + i(h(\cos\theta) + h_1(\cos\theta)), \tag{6}$$

iar pe intrados

$$z = \cos\theta + i(h(\cos\theta) - h_1(\cos\theta)). \tag{7}$$

Prin transformarea conformă

$$Z = z + \sqrt{z^2 - 1}, \tag{8}$$

unui punct de pe extrados îi corespunde în planul Z punctul

$$Z = e^{i\theta}\left(1 + \frac{(h + h_1)(\cos\theta)}{\sin\theta}\right) + (\ldots);\quad \theta \in [0,\ \pi], \tag{9}$$

iar unui punct de pe intrados punctul

$$Z = e^{i\theta}\left(1 + \frac{(h - h_1)(\cos\theta)}{\sin\theta}\right) + (\ldots);\quad \theta \in [\pi,\ 2\pi]. \tag{10}$$

Prin $(\ldots)$ subînțelegem expresii în care apar puteri ale lui ε mai mari sau egale cu 2. Cum ε este un parametru mic, aceste expresii vor fi în general neglijate.

Vom enunța în continuare următoarea :

Teoremă (*Lavrentiev-Șabat* [*1*])
Fie curba C de ecuație (în coordonate polarne)

$$r = r(\theta) = 1 + \delta(\theta);\quad \theta \in [0,2\pi] \text{ astfel încît} \tag{11}$$

$$|\delta(\theta)| < \varepsilon,\quad |\delta'(\theta)| < \varepsilon,\quad |\delta''(\theta)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Atunci funcția $\zeta = \zeta(Z)$, $\zeta(\infty) = \infty$; $\zeta'(\infty) > 0$, care transformă conform exteriorul curbei C pe exteriorul cercului unitate are expresia

$$\zeta = \zeta(Z) = Z\left[1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta)\,\frac{e^{i\theta} + Z}{e^{i\theta} - Z}\,d\theta\right] + (\ldots). \tag{13}$$

Dacă pe lîngă condițiile (3) și (4) mai presupunem în plus satisfăcute condițiile

$$\left|\frac{d^n}{d\theta^n}\left(\frac{h(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right| < \varepsilon;\ n = 0,1,2, \tag{14}$$

$$\left|\frac{d^n}{d\theta^n}\left(\frac{h_1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right| < \varepsilon;\ n = 0,1,2, \tag{15}$$

atunci, aplicînd teorema de reprezentare conformă a lui Lavrentiev și Șabat, obținem din (9), (10), (11) și (13) :

$$\zeta = Z\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{h}(\theta)}{\sin\theta}\,\frac{e^{i\theta} + Z}{e^{i\theta} - Z}\,d\theta\right) + (\ldots), \tag{16}$$

unde

$$\tilde{h}(\theta) = \begin{cases} (h + h_1)\ (\cos\theta);\quad \theta \in [0,\ \pi], \\ (h - h_1)\ (\cos\theta);\quad \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \tag{17}$$

În prezența obstacolului circular potențialul complex al vitezelor este ([2] p. 173)

$$f(\zeta) = \frac{V_0}{\lambda}\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta, \tag{18}$$

unde (punînd $\cos\theta = x$)

$$\lambda = \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\infty} = \left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}Z}\right|_{Z=\infty} \cdot 2 = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x\right) + (\ldots). \tag{19}$$

Făcînd aproximarea

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha = 1 + \mathrm{i}\alpha + (\ldots), \tag{20}$$

din (8), (16), (18), (19) și (20) obținem

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{z}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\alpha\sqrt{z^2-1} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{z^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(x)\,\mathrm{d}x}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-z^2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)(z-x)} + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z+\sqrt{z^2-1}) + (\ldots), \right. \tag{21}$$

ceea ce este echivalent cu

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{z}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\alpha\sqrt{z^2-1} + \frac{(1-z^2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)(z-x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{h(x)}{z-x}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\int_{-1}^{1}\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z+\sqrt{z^2-1}) + (\ldots). \tag{22}$$

Din (22) obținem prin derivare

$$f'(z) = V_0\left(1 - \frac{\mathrm{i}\,\alpha z}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\cdot\frac{1}{(z+1)\sqrt{z^2-1}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{h(x)}{z-x}\,\mathrm{d}x - \right.$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{\pi}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,h(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-x}\right)\mathrm{d}x - \tag{23}$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\frac{1}{(z+1)\sqrt{z^2-1}}\int_{-1}^{1}\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x -$$

$$\left. - \frac{2z}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)(z-x)} - \frac{1-z^2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h_1(x)\mathrm{d}x}{(1-x^2)(z-x)^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,(\ldots).$$

Condiția Kutta-Jukovski ca viteza să fie finită la bordul de fugă ($z = 1$) este echivalentă în virtutea lui (23) cu condiția ca expresia

$$\frac{\alpha z}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{\pi(z+1)\sqrt{z^2-1}} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{h(x)}{z-x}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi(z+1)\sqrt{z^2-1}} \int_{-1}^{1} \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \frac{\Gamma}{2\pi V_0 \sqrt{z^2-1}}. \tag{24}$$

să fie finită.

Expresia (24) mai poate fi scrisă sub forma (efectuînd în prealabil o integrare prin părți):

$$\alpha \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \int_{-1}^{1} \frac{h(x)\, dx}{(z-x)(1-x)\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, h'(x)\, dx + \frac{\Gamma}{2\pi V_0} + \alpha \right). \tag{25}$$

Ea este finită în $z = 1$ dacă expresia din paranteză cu care este înmulțit $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ se anulează, adică

$$\Gamma = -2\pi\, \alpha V_0 + 2 V_0 \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, h'(x)\, dx. \tag{26}$$

Odată calculat Γ, valoarea portanței va fi:

$$P = -V_0 \rho \Gamma = 2\pi\alpha\rho V_0^2 + 2\rho V_0^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, h'(x)\, dx \tag{27}$$

(ρ — densitatea fluidului).

Primit la redacție la 24 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. LAVRENTIEV, B. V. ȘABAT, *Metodi teorii funcții complexnovo peremenovo*, Izd. „Nauka", Moscova, 1973.
2. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București.
3. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei R.P.R.—Gauthiers—Villars, București—Paris, 1959.

CINEMATICA UNITĂȚILOR DE POMPARE HIDRAULICE UTILIZATE ÎN EXTRACȚIA PETROLULUI

de AL. POPOVICI și C. ENE

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Necesitatea adoptării curselor lungi, dictată de creșterea adîncimii sondelor, a condus la căutarea unor soluții noi de acționare, ca de exemplu realizarea unităților de pompare cu acționare hidraulică și echilibrarea pneumatică.
În lucrare, după o prezentare de principiu a acestor unități, este elaborat studiul cinematicii, ținîndu-se seama de o serie de factori specifici cum ar fi : elasticitatea garniturii de prăjini, caracteristica pompei principale, circuitul hidraulic etc. Este rezolvată ecuația de mișcare și se dau indicații de calcul pentru parametrii cinematici, durata ciclului și trasarea dinamogramei.

1. GENERALITĂȚI

Necesitatea adoptării curselor lungi, dictată de creșterea adîncimii sondelor, mai ales la debite ridicate, a condus la căutarea unor soluții noi de acționare, ca de exemplu, realizarea unităților de pompare cu acționare hidraulică și echilibrare pneumatică UHP (fig. 1).

Deoarece în țara noastră sistemul respectiv este mai puțin cunoscut, studiul cinematicii impune o succintă prezentare prealabilă a acestui tip de instalație.

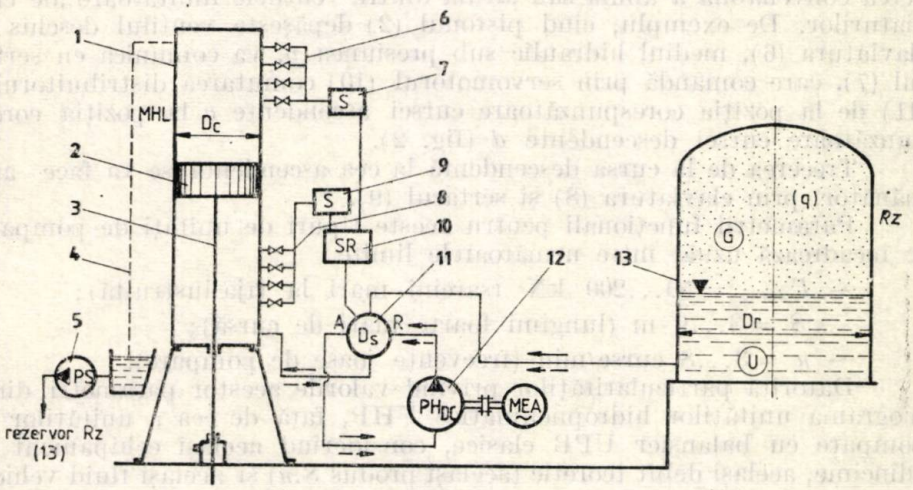


Fig. 1

Deasupra sondei, în poziție verticală, este montat un motor hidraulic liniar MHL (1), al cărui element mobil, pistonul (2), are racordată la tija sa, garnitura de tije de pompare (3).

Garnitura suspendată de tija polizată, execută o mișcare liniară alternativă. Contrabalansarea se poate realiza cu ajutorul unui cilindru de echilibrare și a unei contragreutăți, sau, mai frecvent, prin echilibrarea hidropneumatică (fig. 1). Generatorul de energie hidraulică (pompa principală) acționat de mașina de forță (de obicei motor electric asincron MEA), refulează alternativ mediul hidraulic în motorul hidraulic liniar — în cursa ascendentă — sau în rezervorul de echilibrare R_z (13) — în cursa descendentă. Distribuitorul D_s (11), acționat de mecanismul de reversare SR (10), stabilește pe rînd conexiunile necesare realizări funcționării (fig. 2).

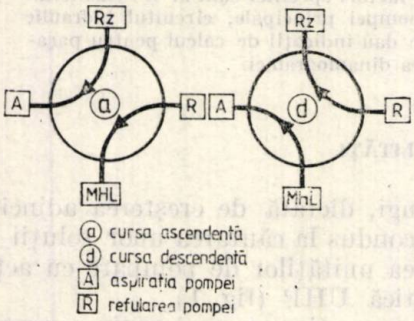


Fig. 2

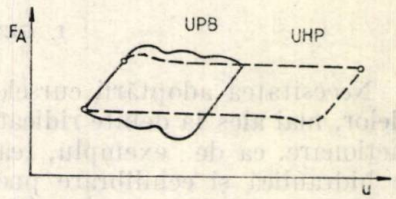


Fig. 3

Se poate observa comoditatea reglării lungimilor cursei, prin deschiderea convenabilă a unuia sau altuia dintre ventilele limitatoare ale claviaturilor. De exemplu, cînd pistonul (2) depășește ventilul deschis la claviatura (6), mediul hidraulic sub presiunea p, va comunica cu sertarul (7), care comandă prin servomotorul (10) comutarea distribuitorului (11) de la poziția corespunzătoare cursei ascendente a la poziția corespunzătoare cursei descendente d (fig. 2).

Trecerea de la cursa descendentă la cea ascendentă se va face asemănător, prin claviatura (8) și sertarul (9).

Parametrii funcționali pentru aceste tipuri de unități de pompare, se încadrează uzual între următoarele limite :

— $F_{AMax} = 50...200$ kN (sarcini mari la tija lustruită);

— $S = 3...9$ m (lungimi foarte mari de cursă);

— $n = 3...8$ curse/min (frecvențe joase de pompare).

Datorită particularităților privind valorile acestor parametri, dinamograma unităților hidropneumatice UHP, față de cea a unităților de pompare cu balansier UPB clasice, considerînd același echipament de adîncime, același debit teoretic (același produs $S.n$) și același fluid vehiculat, apare ilustrată în figura 3. Sarcinile dinamice sînt evident mai mici în cazul unităților hidropneumatice.

2. CINEMATICA UNITĂȚILOR DE POMPARE HIDROPNEUMATICE

Pentru a evidenția individualizarea diferitelor aspecte care influențează cinematica unităților hidropneumatice, aceasta se va trata în etape succesive de simplificare a problemei (fig. 4).

Etapa (A). Se neglijează elasticitatea garniturii (se consideră rigidă), forțele de inerție și pierderile hidraulice în sistem, iar debitul pompei principale Q se consideră constant.

În acest caz, dinamograma simplificată este prezentată în figura 4*a*, iar desfășurarea acesteia în timp, în figura 4*b*. Debitul fiind considerat constant, rezultă viteze constante la cursa ascendentă v_a și descendentă v_d, conform figurii 4*c*. Deplasarea u, variază liniar.

Etapa (B). Se ține seama de inerția sistemului, caracteristica pompei principale $P(Q)$ și pierderile hidraulice în sistemul de acționare.

Datorită inerției sistemului, trecerea de la cursa ascendentă la descendentă (vitezele v_a și v_d), precum și invers, se face prin perioade tranzitorii în care apar accelerări și decelerări (fig. 4*d*).

Pentru exemplificare, se va considera începutul cursei ascendente. Se consideră masa m redusă la piston a tijelor și a lichidului aflat în circuitul hidraulic, neglijînd compresibilitatea acestuia :

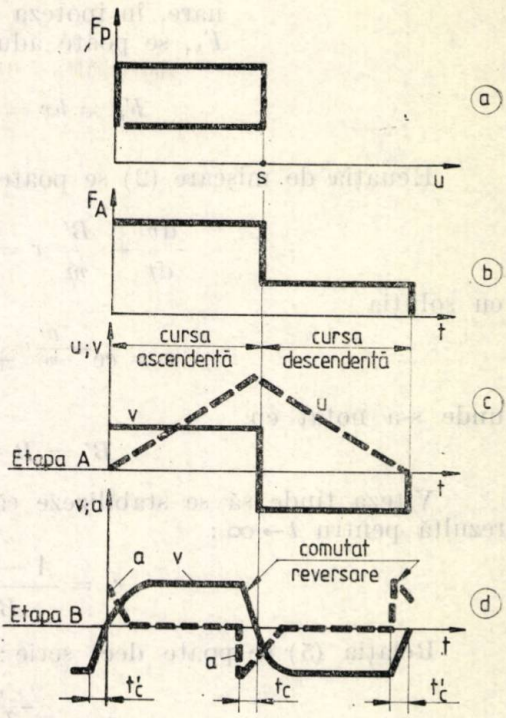


Fig. 4a—d

$$m = \frac{m_p}{2} + \sum_i m_i \left(\frac{A_c}{A_i}\right)^2 + m_A, \tag{1}$$

unde m_i sînt masele de lichid din porțiunile de conductă cu ariile de trecere A_i ; m_p este masa prăjinilor de pompare ; m_A — masa pistonului din cilindrul de acționare MHL.

Ecuația de mișcare a acestei mase, se poate scrie :

$$m \frac{dv}{dt} = F_p - F_A - F_h, \tag{2}$$

unde F_A — sarcina la tija lustruită, se va considera în primă aproximație constantă în perioada tranzitorie ;

$F_p = A - Bv$ — forța datorată presiunii pe piston s-a exprimat în ipoteza liniarizării caracteristice $p(Q)$ a pompei pe domeniul de lucru (p este proporțională cu F_p, iar v cu Q) ;

A și B — constante depinzînd de caracteristica pompei aria cilindrului MHL, contrapresiunea de echilibrare și

înălțimile coloanelor de lichid în cilindru și rezervor la începutul cursei ascendente;

F_h — pierderea de sarcină în circuitul hidraulic de acționare, în ipoteza curgerii laminare în acest circuit; F_h, se poate aduce sub forma:

$$F_h = hv = h\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

Ecuația de mișcare (2) se poate scrie astfel:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B'}{m}v = \frac{A - F_A}{m}, \tag{4}$$

cu soluția

$$v = ce^{-\frac{B'}{m}t} + \frac{A - F_A}{B'}, \tag{5}$$

unde s-a notat cu

$$B' = B + h. \tag{6}$$

Viteza tinde să se stabilizeze către o valoare de regim (v_r), care rezultă pentru $t \to \infty$:

$$v_r = \frac{A - F_A}{B'}. \tag{7}$$

Relația (5) se poate deci scrie:

$$v = ce^{-\frac{t}{T_1}} + v_r, \tag{8}$$

unde T_1 este constanta de timp a soluției

$$T_1 = \frac{m}{B'}. \tag{9}$$

Constanta $c = -v_r$ rezultă din condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, deci

$$v = v_r\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right), \tag{10}$$

iar prin derivare se obține accelerația

$$a = \frac{v_r}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}. \tag{11}$$

Se consideră că viteza atinge practic valoarea de regim pentru:

$$t_r = 3T_1 \text{ (cînd } v = 0{,}95\ v_r). \tag{12}$$

În figura 4*d* sînt evidențiate și duratele t_c; t'_c, de la comutarea circuitelor de reversare, pînă la schimbarea sensului de deplasare (durate de comutare).

Deplasarea pistonului (u_r) în perioada tranzitorie (t_r), rezultă prin integrarea relației (10):

$$u_r = \int_0^{t_r} v_r(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})dt = v_r(t_r + T_1 e^{-\frac{t_r}{T}} - T_1) = 2v_r T_1. \quad (13)$$

Din această etapă a calculului, se reține relațiile (9) și (12), observînd că mărimile T_1 și t_r nu depind de valoarea lui F_A.

Etapa (C). Se ține seamă de elasticitatea garniturii.

În perioada tranzitorie, forța F_A nu este constantă, cum s-a admis la scrierea relațiilor (4) și (5). Această forță variază liniar cu deplasarea (deformarea elastică a garniturii)

$$F_A = G_1 + ku, \quad (14)$$

unde G_1 este greutatea garniturii de tije în lichid.

Cu aceste observații, relația (2) devine:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = A - B\frac{du}{dt} - G_1 - ku - h\frac{du}{dt}. \quad (15)$$

Relația (15) se poate prezenta astfel:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{B'}{m}\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = \frac{A - G_1}{m}, \quad (16)$$

unde s-a notat cu $B' = B + h$ (relația 6).

Soluția ecuației (16) este

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{A - G_1}{k}, \quad (17)$$

unde

$$r_{1;2} = \frac{-\frac{B'}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{B'}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}, \quad (18)$$

La alegerea corectă a mărimilor care intervin în relația (18), valorile r_1, r_2 rezultă reale (nu trebuie să apară fenomene oscilatorii în sistem). Deci

$$v = \frac{du}{dt} = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}. \quad (19)$$

Constantele c_1, c_2 și viteza de regim v_r rezultă din condițiile: pentru $t = 0$ ($u = 0$; $v = 0$); pentru $t = t_r$ ($v = v_r$). Valoarea t_r se preia de la calculul în primă aproximație (relațiile 9 și 12), deoarece aceasta nu depinde de F_A.

Rezultă astfel sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute (c_1, c_2, v_r):

$$c_1 + c_2 = -\frac{A - G_1}{k}; \quad c_1 r_1 + c_2 r_2 = 0, \tag{20}$$

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_r} + c_2 r_2 e^{r_2 t_r} = v_r.$$

Rezultă de asemenea u_r:

$$u_r = c_1 e^{r_1 t_r} + c_2 e^{r_2 t_r} + \frac{A - G_1}{k}. \tag{21}$$

Pentru *trasarea diagramei în perioada de „regim"*, cînd viteza are variații mici, se ține seama de:

a) elasticitatea garniturii de pompare. Este necesară trasarea dinamogramei (fig. 4*e*), care se poate determina sub formă simplificată, prin patru puncte, ținînd seama de observația referitoare la figura 3. În figura 4*f*, dinamograma este prezentată desfășurat în timp;

b) înălțimile coloanelor de lichid și presiunile în cilindru și rezervor;

c) caracteristica interioară $P(Q)$ a pompei principale;

d) pierderile hidraulice în sistemul de acționare.

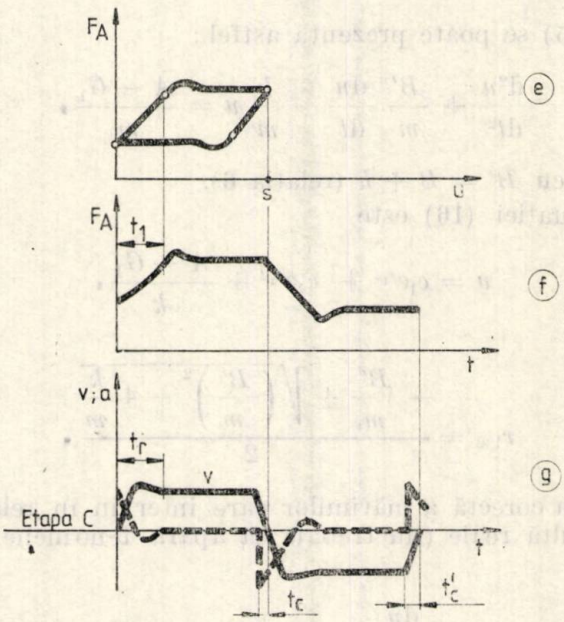


Fig. 4 e—f

Problema se rezolvă prin aproximații succesive, prin completarea în ordine a liniilor din tabelul 1, alcătuit pentru cursa ascendentă. Asemănător se procedează pentru cursa descendentă. La joncțiunile dintre domeniile tranzitorii și de regim, curbele se racordează.

Tabelul 1

u	Se dau valori cu pasul Δu, de la u_r (relația 21) la S. $u_r \quad u_r + \Delta u$ etc. . . . . S
F_A	Se citește în funcție de u din dinamograma teoretică construită prin patru puncte
p	presiunea pe piston rezultă în funcție de F_A
h_c	coloana de lichid din cilindru, rezultă în funcție de u
h_R	coloana de lichid din rezervor, rezultă în funcție de u
q	contrapresiunea din rezervor, rezultă în funcție de h_R
H'	sarcina pompei (în primă aproximație) : $H' = \frac{p}{\varrho g} + h_c - \frac{q}{\varrho g} - h_R$
Q'	debitul pompei (în primă aproximație), rezultă în funcție de H' din caracteristica pompei
ΔH	pierderile hidraulice pe conductele de ulei, se calculează în funcție de Q'
H	sarcina pompei : $H = H' + \Delta H$
Q	debitul pompei, rezultă în funcție de H, din caracteristica pompei
v	$v = \frac{Q}{A_c}$
Δt	$\Delta t = \frac{\Delta u}{v}$
t	$t = t_r + \Sigma \Delta t$

Accelerația rezultă prin derivarea numerică a vitezei în raport cu timpul (ultimile două linii din tabel).

Variațiile vitezei fiind mici în perioada de „regim", acest calcul nu mai este practic necesar, considerînd accelerația neglijabilă (egală cu zero).

Adăugînd la ultima valoare din linia (t) a tabelului 1, durata de comutare t_c, rezultă durata (T_a) a cursei ascendente. Asemănător, rezultă durata cursei descendente (T_d), deci, perioada ciclului va fi :

$$T = T_a + T_d .$$

Pentru determinarea duratelor de comutare (de exemplu t_c'), se poate utiliza ecuația :

$$v(-t) = v_r', \tag{22}$$

unde $v(-t)$ este dat de relația (19), iar v_r' este viteza de regim la cursa descendentă (valoare negativă conf. fig. 4).

Pentru construirea dinamogramei teoretice prin patru puncte (linia F_A din tabelul 1), se ține seama că la terminarea deformației inițiale (t_1), deplasarea și forța au valorile :

$$u = \Delta S = \frac{G_b + 2F_f}{k} \; ; \; F_A = G_1 + G_b + F_f. \tag{23}$$

După completarea tabelului 1, se poate determina și sarcina maximă, deci se poate construi dinamograma prin șase puncte.

Sarcina maximă are expresia :

$$F_{AMax} = G_1 + G_b + F_f + \frac{pm\psi}{2} v(t_1) \tag{24}$$

și apare la deplasarea corespunzătoare lui (t_M) dată de relația :

$$t_M = t_1 + \frac{\pi}{2p}. \tag{25}$$

Cu dinamograma astfel obținută, se poate trece la recalcularea datelor din tabelul 1.

Relațiile (23, 24, 25) sînt preluate prin particularizare conform lucrării [2], mărimile care intervin în aceste relații avînd următoarea semnificație :

k este constanta elastică a sistemului tije de pompare (k_p), țevi de extracție (k_t)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_p} \; , \; \psi = \frac{k_t}{k_t + k_p}.$$

Pentru țevi ancorate se consideră $k = k_p$; $\psi = 1$.

m — masa tijelor de pompare;

$F_f \simeq 35D$ kN — forța de frecare (D — diametrul pistonului pompei în metri)

$p = \frac{8000}{H}$ s^{-1} — pulsația oscilațiilor proprii a garniturii de tije (H — adîncimea de fixare a pompei în metri).

G_b — greutatea coloanei de lichid din sondă, corespunzătoare secțiunii brute a pistonului pompei de adîncime (fără a scădea reducerea datorată tijelor).

Primit la redacție la 24 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. K.S. ALIVERDIZADE, *Rasciot i konstruirovanie oborudovania dlia expluatații neftianth skvajon*, Moskva Gestoptehizdat, 1959.
2. AL. POPOVICI, *Utilaje pentru forajul și exploatarea sondelor* I. P. G. Ploiești, 1983.

CRITERII PENTRU CORECȚIA DEBITULUI DE GAZE DETERMINAT PRIN METODA ORIFICIULUI ÎN PREZENȚA APEI

de AL. D. STAN și M. ALBULESCU

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În multe situații, debitul de gaze se determină prin metoda orificiului, bazată pe faptul că în zona elementului de măsură se realizează o cădere de presiune locală. Această cădere de presiune ca și proprietățile fluidului corespund unui fluid monofazic, situație care de multe ori nu se realizează în practică.

În această lucrare sînt stabilite criteriile care permit să se considere curgerea prin elementul de măsură ca fiind mono- sau bifazică. În ambele cazuri, sînt deduse corecțiile ce trebuie introduse la debitul bifazic pentru a se determina debitul de gaze, respectiv acela de lichid, din curentul bifazic.

1. INTRODUCERE

În multe situații practice din industria petrolieră, debitele de gaze sînt măsurate prin metoda orificiului, reglementată prin STAS 7347/2-83. Fără a prezenta această metodă și condițiile ce trebuie impuse pentru a se realiza corectitudinea determinărilor experimentale, redăm doar expresia debitului masic de gaze și precizăm parametrii înregistrați la elementul de măsură pentru a se putea utiliza formula

$$q_{Ng}^{m} = \alpha \varepsilon \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{\sqrt{Z}} \sqrt{\frac{T_N}{T_1}} \sqrt{\frac{p_1}{p_N}} \sqrt{2 \Delta p \rho_N}. \tag{1}$$

În această formulă, α reprezintă coeficientul de debit, ε — coeficientul de detentă al gazelor, d-diametrul orificiului de pe diafragma montată pe o conductă cu diametrul interior D, Z este factorul de abatere de la legea gazelor perfecte, în condițiile de presiune și temperatură din amontele elementului de măsură, p, T și ρ reprezintă presiunea, temperatura și, respectiv, densitatea. Pentru starea gazului din amontele elementului de măsură aceste mărimi au indicele 1 și pentru starea de referință sînt indexate cu N. Cu Δp a fost notată căderea de presiune din elementul de măsură.

În țara noastră, temperatura și presiunea stării normale de referință sînt $T_N = 283{,}15$ K, respectiv $p_N = 760$ mm coloană de mercur; presiunea p_1 trebuie măsurată în planul prizelor de presiune din amonte de elementul de măsură cu un manometru de presiune absolută sau cu un traductor de presiune absolută. În cazul în care p_1 se măsoară cu un manometru sau traductor de presiune relativă, se va adăuga presiunea barometrică din punctul de măsurare.

La o diafragmă, coeficientul ε are expresia

$$\varepsilon = 1 - (0{,}41 + 0{,}35\ \beta^4) \frac{\Delta p}{\varkappa p_1}, \tag{2}$$

iar α depinde, în afară de β și de distanța dintre prizele de măsură a presiunii diferențiale Δp, de numărul lui Reynolds

$$Re_D = \frac{v_m \cdot D}{\nu}. \tag{3}$$

În formulele precedente, $\beta = \frac{d}{D}$, $\varkappa$ este exponentul adiabatic al gazului, v_m — viteza medie a curentului de fluid monofazic din secțiunea conductei, iar ν — viscozitatea cinematică a fluidului.

Din prezentarea sumară a acestei metode reiese că aceasta nu are limitări atît timp cît fluidele care se scurg prin orificiu sînt în fază gazoasă sau lichidă. Pe de altă parte, o limită a metodei este aceea că nu se prevede corecția debitului de gaze atunci cînd în masa lor este prezentă o cantitate de apă în fază lichidă. Ne referim la apă deoarece aceasta este cel mai frecvent lichid asociat, în practică, gazelor supuse măsurătorilor.

Ca urmare, am stabilit în această lucrare criteriile care permit să se aprecieze dacă o curgere are caracter monofazic, cu toate că prin elementul de măsură se scurg două faze. De asemenea, am stabilit corecția ce trebuie introdusă atunci cînd cele două fluide curg împreună și se aplică formula (1).

2. CURGEREA GAZELOR CU APA ÎN FAZĂ GAZOASĂ

Apa poate exista sub formă de vapori în masa de gaze care curge prin orificiu. Amestecul format din gaze și vapori de apă poate fi considerat drept un fluid omogen și relațiile prezentate mai sus își păstrează valabilitatea, dar mărimile din acestea trebuie să reprezinte valorile medii valabile pentru amestec.

Astfel, dacă notăm fracția molară a gazelor cu x_g și pe aceea a apei cu x_a, rezultă

$$x_g + x_a = 1, \tag{4}$$

iar fracțiile masice ale acelorași componenți, m_g, respectiv m_a sînt

$$m_g = \frac{M_g x_g}{M_g x_g + M_a x_a}; \quad m_a = \frac{M_a x_a}{M_g x_g + M_a x_a}, \tag{5}$$

M_g și M_a fiind masa molară a gazului curat, respectiv a apei. Precizăm că prin gaz curat înțelegem și un amestec de componenți gazoși, așa cum se prezintă producția unor sonde de gaze.

Acum, pentru cei doi componenți, gazul curat și apa, în fază de vapori, pot fi determinate valorile medii ale parametrilor, necesare pentru aplicarea formulei (1).

Astfel, exponentul adiabatic $\varkappa$ are expresia

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}, \tag{6}$$

c_p fiind căldura specifică medie la presiune constantă, iar c_v căldura specifică medie la volum constant, ambele pentru amestec. Dacă se notează cu c_{pg} și c_{vg} aceste mărimi pentru gazul curat, și cu c_{pa} și c_{va} pentru vaporii de apă, rezultă valorile medii

$$c_p = m_g c_{pg} + m_a c_{pa}, \quad c_v = m_g c_{vg} + m_a c_{va}. \tag{7}$$

Viscozitatea cinematică medie ν a amestecului gaze-vapori de apă se calculează din formula

$$\nu = \frac{1}{\frac{x_g}{\nu_g} + \frac{x_a}{\nu_a}}, \tag{8}$$

în care ν_g și ν_a sînt, respectiv, viscozitatea cinematică a gazului curat și a apei sub formă de vapori.

Toate aceste considerente conduc la concluzia că în cazul în care în masa de gaze este inclusă o cantitate de vapori de apă, formula (1) poate fi aplicată, obținîndu-se astfel debitul de gaze umede q^m_{Nu}, urmînd ca debitul de gaze curate q^m_N să rezulte din formula

$$q^m_N = q^m_{Nu}\left(1 - \varphi\frac{p_a}{p_1}\right). \tag{9}$$

Se poate deci introduce un coeficient

$$c = 1 - \varphi\frac{p_a}{p_1}, \tag{10}$$

care reprezintă tocmai corecția ce trebuie adusă debitului de gaze umede pentru a se găsi debitul de gaze curate (uscate). În formulele (9) și (10), φ reprezintă umiditatea relativă a gazelor ($\varphi = 0$ pentru gazele uscate și $\varphi = 1$ pentru gazele saturate cu vapori de apă), iar p_a este presiunea parțială a vaporilor de apă.

Umiditatea relativă a gazelor fiind raportul dintre masa vaporilor de apă din unitatea de volum de gaze și masa lor în condiții de saturație, rezultă

$$\varphi = \frac{m_a}{m_{a\,sat}} = \frac{p_a}{p_{a\,sat}}, \tag{11}$$

$m_{a\,sat}$ și $p_{a\,sat}$ fiind, respectiv, fracția masică și presiunea vaporilor de apă la saturație.

În locul umidității relative φ, de multe ori este mai comod să se utilizeze umiditatea specifică Φ definită ca masa vaporilor de apă raportată la aceea de gaze uscate,

$$\Phi = \frac{M_a}{M_g}\,\frac{\varphi p_{a\,sat}}{p_a - \varphi p_{a\,sat}}. \tag{12}$$

Presiunea vaporilor de apă în condiții de saturație $p_{a\,sat}$ este o constantă care se poate obține cu ușurință [3], [6]. Dacă se admite, de exemplu, că gazele uscate au masa molară $M_g = 16{,}01$, care corespunde metanului curat, și se ia temperatura de 283 K, rezultă $p_{a\,sat} = 9{,}21$ mm Hg $= 1228$ N/m^2.

În tabelul 1 sînt date unele valori ale umidităţii specifice Φ şi ale factorului de corecţie c, calculat cu formula (10) sau cu formula

$$c = 1 - \frac{\Phi M_g p_a}{p_{a\,sat}(M_a + \Phi M_g)} \frac{p_a}{p_1} \tag{13}$$

dedusă din (11) şi (12). Presiunea p_a se calculează la rîndul ei, din formula

$$p_a = x_a p_1. \tag{14}$$

Tabelul 1

p_1, bar	35	10	2	1,2	1,2
Φ	0,000395	0,001384	0,006952	0,01163	0,012562
c	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997

Pentru M_a a fost luată valoarea 18,016, iar gazele au fost considerate saturate ($p_a = p_{a\,sat}$), deci $\varphi = 1$. Se observă din aceste rezultate că valorile coeficientului de corecţie c variază foarte puţin în funcţie de presiune.

3. CURGEREA GAZELOR ŞI A APEI ÎN FAZE DIFERITE

În multe cazuri, apa este prezentă în masa gazelor şi în fază lichidă, fapt care poate duce la o modificare a curgerii atît în conductă, cît şi în elementul de măsură. În acesta din urmă, prezenţa apei are ca efect modificarea şi a căderii de presiune Δp care apare în formula (1).

Dacă ne referim numai la această cădere de presiune, problema este complexă şi datorită faptului că la un sistem bifazic apar diferite forme de curgere (bule alungite, bule dispersate etc.). În literatura de specialitate [1], [2], [5] se precizează de altfel că problema curgerii unui sistem bifazic printr-o conductă este dificilă.

Trebuie precizat că denumirea de „conductă" pe care o atribuim elementului de măsură are sens deoarece căderea locală de presiune Δp se poate scrie sub forma unei căderi liniare de presiune,

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \frac{l}{d} \lambda, \tag{15}$$

complexul adimensional $\frac{l}{d}\lambda$ înlocuind aici coeficientul de rezistenţă locală ζ. În formula precedentă, lungimea l şi diametrul d se referă la o conductă echivalentă în care se realizează aceeaşi cădere de presiune ca şi aceea locală cu expresia [4]

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \zeta, \tag{16}$$

λ fiind în (15) coeficientul de rezistenţă.

Pentru curgerea unui sistem bifazic printr-o conductă orizontală, complexitatea deosebită a problemei nu a permis stabilirea unor corelații generale complet satisfăcătoare relative la tipul mișcării, fenomenul de reținere și căderea de presiune.

Unele corelații empirice cu privire la tipul curgerii sînt prezentate sub formă de hărți trasate în diferite coordonate. Pentru scopuri practice se recomandă, în cazul sistemului aer-apă sau al sistemelor bifazice similare, utilizarea hărții reprezentate în figura 1, stabilită de Govier și Omer [2] pe baza observației că proprietățile fluidelor și diametrul conductei afectează numai în mică măsură tipul curgerii.

În această figură, zonele de tranziție sînt benzi de lățime egală cu $\pm 10\%$ din valoarea vitezei de curgere.

Se constată cu ușurință că tipul curgerii simultane a gazelor și apei nu depinde de vitezele relative ale celor două faze.

În această lucrare, utilizăm diagrama din figura 1 pentru a stabili tipul curgerii simultane a sistemului gaze-apă admițînd că acesta nu diferă prea mult de sistemul aer-apă. Această ipoteză, împreună cu aceea menționată mai înainte referitoare la introducerea conductei echivalente, dă posibilitatea de a obține cantitatea maximă de apă în fază separată din masa gazelor astfel ca sistemul să poată fi considerat monofazic și relațiile prezentate mai înainte să fie aplicabile.

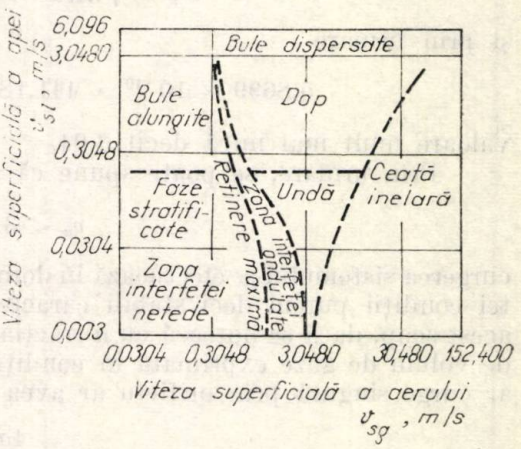


Fig. 1

4. CRITERII PENTRU STABILIREA CARACTERULUI MONO- SAU BIFAZIC AL CURGERII GAZELOR ȘI A APEI ÎN FAZĂ LICHIDĂ PRINTR-O CONDUCTĂ

Se observă cu ușurință că gazele împreună cu apa situate în domeniul ceții inelare formează un sistem care poate fi considerat ca un fluid omogen compresibil, proprietățile lui determinîndu-se așa cum am precizat mai înainte.

O considerare mai atentă a diagramei din figura 1 arată că domeniul ceții inelare este separat de celelalte domenii prin curba de ecuație

$$v_a + 5{,}8699 \times 10^{-10} v_g = 3{,}04\,, \tag{17}$$

v_a și v_g reprezentînd viteza apei, respectiv a aerului dacă acestea ar curge singure, exprimate în m/s.

Această ecuație a fost obținută admițîndu-se că domeniul zonei interferenței ondulate este separat de acela al ceții inelare printr-o dreaptă.

În cazul în care se realizează condiția

$$v_a \geqslant 3{,}04 - 5{,}8699 \times 10^{-10} \cdot v_g, \tag{18}$$

domeniul cetii inelare dispare și curgerea devine efectiv bifazică.

Referitor la termenul al doilea din membrul drept al acestei inegalități pot fi făcute unele evaluări. Astfel, considerînd gazul cel mai des întîlnit în practică, metanul, care are constanta de gaz perfect $R = 519{,}2$ J/kgK, exponentul adiabatic $\varkappa = 1{,}4$ și admițind o temperatură $T = 288$ K, viteza acestui gaz poate fi egală cel mult cu viteza sunetului,

$$c = \sqrt{\varkappa RT} = 441{,}18 \text{ m/s}$$

și prin urmare

$$5{,}8699 \times 10^{-10} \times 441{,}18 = 2{,}5897 \times 10^{-7},$$

valoare mult mai mică decît 3,04.

Prin urmare, se poate spune că atunci cînd se realizează condiția

$$v_a < 3{,}04 \text{ m/s}, \tag{18}$$

curgerea sistemului se efectuează în domeniul cetii inelare. Cu ajutorul acestei condiții putem deci stabili caracterul curgerii sistemului bifazic. În acest scop, dacă se notează cu a fracția de apă în fază lichidă în unitatea de volum de gaze exprimată în condiții standard V, rezultă că dacă apa ar curge singură prin orificiu ar avea viteza

$$v_a = \frac{4aV}{\pi d^2 t}, \tag{19}$$

t fiind timpul în care curge volumul V.

Pentru a se realiza o curgere efectiv bifazică trebuie deci ca fracția de apă a din curentul de gaze să satisfacă următoarea condiție :

$$a \geqslant 8595{,}4 \frac{td^2}{V}, \tag{20}$$

diametrul d fiind introdus în metri, timpul t în ore, iar volumul de gaze V în metri cubi în condiții normale.

Valoarea lui a care satisface în (20) egalitatea poate fi numită valoarea critică și notată cu a_{cr} deoarece, după opinia noastră, definește separația dintre domeniul curgerii monofazice de acela al curgerii bifazice.

Evident, a_{cr} are o anumită valoare fixă pentru valori date ale lui d, V și t și în situația în care

$$a \geqslant a_{cr} \tag{21}$$

curgerea poate fi considerată bifazică, iar dacă

$$a < a_{cr} \tag{22}$$

curgerea sistemului gaze-apă poate fi admisă ca monofazică.

5. CORECȚIA DEBITULUI DE GAZE ÎN CAZUL $a < a_{cr}$

Formulele stabilite mai înainte permit un calcul al corecției care dă volumul de gaze curate V_{N_g} dacă prin elementul de măsură s-a înregistrat, potrivit metodologiei actuale, volumul de gaze și apă $V_{N_{ga}}$.

Volumul $V_{N_{ga}}$ poate fi scris sub forma

$$V_{N_{ga}} = \pi \frac{d^2}{4} v_{2ga} \frac{\rho_{2ga}}{\rho_{N_{ga}}} t, \tag{23}$$

v_{2ga} fiind viteza de curgere a sistemului aval de elementul de măsură, deci la presiunea p_2, ρ_{2ga} densitatea medie a sistemului la această presiune și $\rho_{N_{ga}}$ densitatea medie în condițiile de referință.

Volumul de gaze curate V_{N_g} corespunzător acelorași valori ai parametrilor hidrodinamici ai elementului de măsură este

$$V_{N_g} = \pi \frac{d^2}{4} v_{2g} \frac{\rho_{2g}}{\rho_{N_g}} t, \tag{24}$$

mărimile v_{2g} și ρ_{2g} putînd avea valori diferite față de v_{2ga}, respectiv ρ_{2ga}. De altfel și $\rho_{N_g} \neq \rho_{N_{ga}}$ deoarece $\rho_{N_{ga}}$ are expresia

$$\rho_{N_{ga}} = (1 - a)\rho_{N_g} + a\rho_a, \tag{25}$$

ρ_a fiind densitatea apei.

Ținînd seama de coeficientul de corecție c introdus mai înainte, volumul de gaze care trece prin elementul de măsură este

$$V'_{N_g} = \pi \frac{d^2}{4} cv_{2g} \frac{\rho_{2g}}{\rho_{N_g}} t. \tag{26}$$

Prin urmare volumul de apă care trece simultan prin elementul de măsură are valoarea

$$aV'_{N_g} = \pi \frac{d^2}{4} acv_{2g} \frac{\rho_{2g}}{\rho_{N_g}} t. \tag{27}$$

În ultimele formule, au fost utilizate aceleași densități ρ_{2g} și ρ_{N_g} deoarece acest procedeu este practicat de unitățile operative în calculul debitelor.

Rezultă deci că volumul total care trece prin elementul de măsură este

$$V_{N_{ga}} = cV_{N_g}(1 + a) \tag{28}$$

și se mai poate scrie sub forma

$$V_{N_{ga}} = V_{N_g} \frac{v_{2ga}}{v_{2g}} \frac{\rho_{2ga}}{\rho_{2g}} \frac{\rho_{N_g}}{\rho_{N_{ga}}} \tag{29}$$

așa cum rezultă din (23) și (24).

Prin urmare

$$\frac{V_{N_g}}{V_{N_{ga}}} = \frac{v_{2g}}{v_{2ga}} \frac{\rho_{2g}}{\rho_{2ga}} \frac{\rho_{N_{ga}}}{\rho_{N_g}} = \frac{q^m_{N_g}}{q^m_{N_u}} \frac{\rho_{N_{ga}}}{\rho_{N_g}} = c \frac{\rho_{N_{ga}}}{\rho_{N_g}} \tag{30}$$

dacă se ține seama de (9) și (10).

Din (28) și (30) se găsește

$$\frac{1}{c(1+a)} = c \frac{\rho_{N_{ga}}}{\rho_{N_g}}, \tag{31}$$

respectiv

$$c = \sqrt{\frac{\rho_{N_g}}{\rho_{N_{ga}}} \frac{1}{1+a}}. \tag{32}$$

De exemplu, pentru $a = 0{,}0003$ m³ apă/m³ gaze curate, $\rho_{N_g} = 0{,}716$ kg/m³ și $\rho_a = 1000$ kg/m³ rezultă $\rho_{N_{ga}} = 1{,}0157$ kg/m³ și $c = 0{,}8394$.

6. CORECȚIA DEBITULUI DE GAZE ÎN CAZUL $a > a_{cr}$

În cazul în care $a > a_{cr}$, curgerea este efectiv bifazică și se poate recurge la ideile de bază ale metodei Lockhart și Martinelli [1], [2], [5]. Potrivit acestora, apar doi gradienți de presiune diferiți și anume $\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_g$ în gaze, dacă acestea ar curge singure și $\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_a$ în apă, de asemenea dacă aceasta ar curge singură. Ca urmare, poate fi introdus parametrul

$$X = \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_a}{\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_g}} = \frac{v_a}{v_g} \sqrt{\frac{\rho_a \lambda_a}{\rho_g \lambda_g}}, \tag{33}$$

indicii a și g având semnificații evidente.

Notînd cu V_g volumul de gaze exprimat în condiții de referință, viteza v_g are expresia

$$v_g = \frac{4V_g}{\pi d^2 t} \frac{\rho_{N_g}}{\rho_g}. \tag{34}$$

De asemenea, viteza v_a a apei este

$$v_a = \frac{4aV_g}{\pi d^2 t} \tag{35}$$

și prin urmare parametrul X se poate pune sub forma

$$X = a \frac{\rho_g}{\rho_{N_g}} \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_g} \frac{\lambda_a}{\lambda_g}}. \tag{36}$$

Trebuie remarcat că ρ_g reprezintă o densitate medie a gazelor în lungul elementului de măsură fiind astfel o funcție de presiunile p_1 și $p_2 = p_1 - \Delta p$.

Avîndu-se în vedere formula (16) precum și definiția (33) a parametrului X, rezultă

$$X = \frac{v_a}{v_g} \sqrt{\frac{\rho_a \zeta_a}{\rho_g \zeta_g}}. \tag{37}$$

În cazul în care fracția de apă depășește valoarea critică, se poate introduce coeficientul de corecție

$$c = \frac{\rho_g v_g}{\rho_{ga} v_{ga}}. \tag{38}$$

Produsul $\rho_{ga} v_{ga}$ se poate determina din condiția ca masa totală produsă în timpul t formată din masa de gaze $\rho_g \; v_g \; \frac{\pi d^2}{4} t$ și aceea de apă $a \rho_a v_a \frac{\pi d^2}{4} t$ să fie egală cu masa produsă simultan de gaze și de apă $\rho_{ga} v_{ga} \frac{\pi d^2}{4} t$. Din această condiție rezultă

$$\rho_{ga} \, v_{ga} = \rho_g \, v_g + \rho_a \, v_a \tag{39}$$

și prin urmare

$$\rho_{ga} \, v_{ga} = (\rho_{N_g} + a \rho_a) \frac{4 V_g}{\pi d^2 t}. \tag{40}$$

Cu acest rezultat, dacă se ține seama de expresia (34) a vitezei v_g, se obține

$$c = \frac{\rho_{N_g}}{\rho_{N_g} + a \rho_a}. \tag{41}$$

Primit la redacție la 30 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, AL. D. STAN, *Transportul fluidelor prin conducte*, Edit. Tehnică, București, 1984, p. 262—270.
2. G. W. GOVIER, K. AZIZ, *Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, Toronto, London, 1972, p. 532—541.
3. J. P. HOLMAN, *Thermodynamics*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1974, p. 319—322.
4. T. OROVEANU, AL. D. STAN, V. TALLE, *Transportul petrolului*, Edit. Tehnică, București, 1985, p. 43—51.
5. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. Tehnică, București, 1985, p. 68—71.
6. C. F. PAVLOV, P. G. ROMANKOV, A. A. NOSKOV, *Procese și aparate în inginerie chimică*, Edit. Tehnică, București, 1981, p. 411—415.

ECHIVALENȚE ÎN CALCULUL SUPRASTRUCTURILOR DE POD

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene

Pornindu-se de la modelul echivalent cu bare ortogonale, se prezintă un procedeu, care se încadrează în teoria echivalențelor, procedeu destinat calculului tablierelor de pod. În contrast cu teoria tradițională care presupune existența unei stări de deformație uniforme, în procedeul prezentat aici condițiile de echivalență sînt scrise atît pentru componenta simetrică dar și pentru componenta antisimetrică a energiei acumulate prin deformația de încovoiere. În acest fel se introduce un parametru suplimentar cu ajutorul căruia se obține o reducere însemnată a dimensiunilor rețelei echivalente.

1. INTRODUCERE

Din rîndul metodelor generale de calcul care recurg la idealizarea structurii reale, metoda echivalențelor [1, 2] se distinge prin simplitatea modelului înlocuitor, structura reală, continuă, fiind înlocuită cu o rețea de bare. Ca o consecință firească a acestui fapt, scrierea unor programe specifice este nenecesară, putîndu-se utiliza marea majoritate a programelor de bibliotecă destinate calculului structurilor reticulare.

Caracteristicile rețelei echivalente, care nu au întotdeauna un sens fizic, se obțin prin identificarea termenilor din expresia energiei de deformație scrisă pentru structura reală și pentru cea echivalentă. Deși se consideră că echivalarea se realizează pe elemente suficient de mici pentru a se putea admite existența unui cîmp de deformație uniform, în fapt, metoda conduce la rezultate satisfăcătoare și atunci cînd discretizarea este mai grosieră. Aceasta se datorește în bună măsură faptului că din cantitatea totală de energie acumulată în elementul deformat, componenta simetrică are cea mai mare pondere. Astfel, de exemplu, pentru o grindă prismatică simplu rezemată, încărcată cu un cuplu pe reazem, deci o grindă cu variație continuă a curburii, componenta simetrică a energiei de deformație reprezintă 75 % din întreaga energie acumulată. Asupra acestui aspect se va reveni în continuare, la paragraful 4.1.

Condițiile de echivalență scrise în cazul unei discretizări mai largi presupun elemente cu secțiune constantă. La tablierele de pod acest deziderat este rareori satisfăcut în sens transversal. Aproape în toate cazurile, diversitatea geometriilor secțiunii și prezența vutelor de racordare conduc la rețele echivalente cu dimensiuni mari. Acest inconvenient poate fi eliminat prin introducerea unor condiții de echivalență suplimentare.

Principalul obiectiv al acestui studiu îl constituie determinarea rigidităților rețelei echivalente tablierului real atunci cînd sînt luate în considerație condițiile de simetrie ciclică. Scrierea relațiilor de echivalență pentru componenta simetrică și cea antisimetrică a energiei de deformație, mijlocește introducerea unui parametru suplimentar. Acesta facilitează „netezirea" secțiunii transversale a tablierului ceea ce în final conduce la reducerea dimensiunilor rețelei echivalente.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 1, 1988, P. 47–67

Se are în vedere numai modelul echivalent cu bare ortogonale care, din punctul de vedere al memoriei ocupate în calculator, furnizează cea mai eficientă soluție. Acest model va fi prezentat în paragraful care urmează, iar în continuare vor fi examinate trei tipuri de tabliere definite prin geometria secțiunii transversale.

2. MODEL ECHIVALENT CU BARE ORTOGONALE

Energia de deformație înmagazinată într-un element diferențial de placă plană subțire se determină cu relația

$$\mathrm{d}U = U_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \mathcal{K}^T D \mathcal{K} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{1}$$

în care U_0 este densitatea energiei de deformație,

$$D = \begin{bmatrix} Dx & D1 & 0 \\ D1 & Dy & 0 \\ 0 & 0 & Dxy \end{bmatrix} \tag{2}$$

reprezintă matricea rigidităților secționale ale plăcii ortotrope, iar

$$\mathcal{K} = -\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right]^T \tag{3}$$

constituie vectorul curburilor.

Dacă se neglijează aportul eforturilor unitare de cuplare [1], ipoteză acceptată mai ales în cazul betonului armat, și dacă se admite că într-un element dreptunghiular decupat din placa reală, cîmpul curburilor este uniform, atunci energia de deformație, obținută din (1) prin integrare, este dată de relația

$$U = \frac{ab}{2}\left[Dx\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + Dy\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4Dxy\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2\right], \tag{4}$$

în care a și b sînt lungimile laturilor elementului.

În teoria echivalențelor, relația (4) este utilizată pentru a determina rigiditățile elementelor care alcătuiesc modelul echivalent format din patru bare ortogonale (fig. 1*a*). Energia acumulată în barele echivalentului, admițînd, ca în cazul precedent, existența unui cîmp de curburi uniforme, este

$$Ue = aEIx\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + bEIy\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + G(aIxy + bIyx)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2. \tag{5}$$

Din condiția de echivalență globală,

$$U = Ue, \tag{6}$$

se obțin rigiditățile echivalentului în funcție de rigiditățile plăcii reale.

La aceleași rezultate se poate ajunge punînd condiții de echivalență parțială, corespunzătoare unor moduri caracteristice de deformare. Acest lucru este permis întrucît prin neglijarea eforturilor de membrană se obține decuplarea completă a relațiilor constitutive. În fapt, energia de deformație dată de relația (4) poate fi privită ca sumă a energiilor de deformație corespunzătoare torsiunii simple și încovoierii cilindrice după direcțiile x și y. În această interpretare, rigiditățile secționale la încovoiere ale echivalentului se obțin direct din rigiditățile cilindrice ale plăcii [17], adică

$$EIx = bDx/2 \text{ și } EIy = aDy/2. \quad (7)$$

Dacă placa ortotropă este constituită din dală și nervuri excentrice, relațiile (7) devin :

$$EIx = b(\bar{D}x + \overline{EIx}/\bar{b})/2 \text{ și } EIy = a(\bar{D}y + \overline{EIy}/\bar{a})/2, \quad (7')$$

în care $\bar{a}$ și $\bar{b}$ reprezintă interaxa nervurilor orientate după cele două direcții, iar $\bar{D}x$ și $\bar{D}y$ rigiditățile la încovoiere ale dalei în raport cu planul median propriu; $b\bar{I}x/\bar{b}$, $a\bar{I}y/\bar{a}$ reprezintă momentul de inerție al secțiunii de placă ortotropă de lățime b, respectiv a, în raport cu planul centrelor de greutate, calculat fără a ține seama de momentul de inerție propriu al dalei.

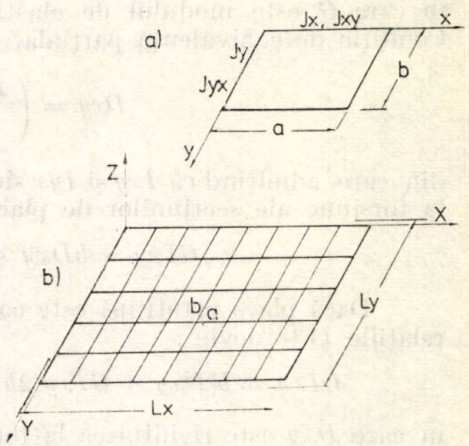


Fig. 1.—*a*) Model echivalent cu bare ortogonale; *b*) Rețea echivalentă structurii reale.

Pentru o placă izotropă relațiile (7) devin :

$$EIx = bD/2 \text{ și } EIy = aD/2, \quad (7'')$$

D, rigiditatea cilindrică a plăcii, se calculează cu relația

$$D = Et^3/12(1 - \nu^2), \quad (8)$$

în care t este grosimea plăcii, E este modulul lui Young, iar ν — coeficientul lui Poisson.

Curbura elementului rectangular de placă supus unei deformări anticlastice [17], translațiile pe verticală ale nodurilor fiind, în valoare absolută, egale cu w, se scrie [11] :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{4w}{ab}. \quad (9)$$

Introducînd această valoare în ultimul termen din (4) se obține energia de deformație înmagazinată prin torsiune simplă în elementul de placă :

$$\pi_t = \frac{32}{ab} Dxy\, w^2. \quad (10)$$

Energia acumulată în modelul echivalent (fig. 1*a*), supus aceluiași mod de deformare, torsiune fără încovoiere, se calculează cu relația :

$$\pi_{te} = \frac{G}{2}\left(\frac{32}{ab^2} Ixy + \frac{32}{a^2b} Iyx\right) w^2, \tag{11}$$

în care G este modulul de elasticitate transversală.
Condiția de echivalență parțială, $\pi_t = \pi_{te}$, conduce la ecuația

$$Dxy = \left(\frac{Ixy}{b} + \frac{Iyx}{a}\right)\frac{G}{2}, \tag{12}$$

din care, admițînd că Ixy și Iyx sînt proporționale cu momentele de inerție la torsiune ale secțiunilor de placă aferente, se obține :

$$GIxy = bDxy \text{ și } GIyx = aDxy. \tag{13}$$

Dacă placa ortotropă este constituită din dală și nervuri excentrice, relațiile (13) devin :

$$GIxy = b(\bar{D}xy + G\bar{I}xy/2\bar{b}) \text{ și } GIyx = a(\bar{D}xy + G\bar{I}yx/2\bar{a}), \tag{13'}$$

în care $\bar{D}xy$ este rigiditatea la torsiune a dalei ; $\bar{I}xy$, $\bar{I}yx$ reprezintă momentul de inerție al nervurii paralele cu axa ox, respectiv oy. S-a admis că nervurile nu interacționează cu dala și nici reciproc [15, 16].

Pentru o placă izotropă relațiile (13) devin :

$$GIxy = b(1 - \nu)D/2 \text{ și } GIyx = a(1 - \nu)D/2. \tag{13''}$$

Condiția de echivalență (12) conduce la rezultatele anterioare (13—13'') și în cazul în care se utilizează o relație aproximativă pentru calculul rigidității Dxy. Relația, confirmată experimental prin măsurători pe modele [18], se scrie astfel :

$$Dxy = \frac{G}{4}(Jxy/Ly + Jyx/Lx) + \frac{G}{2}(\bar{I}xy/\bar{b} + \bar{I}yx/\bar{a}), \tag{14}$$

Jxy reprezintă momentul de inerție la torsiune al secțiunii transversale, fără a ține cont de aportul nervurilor. Jyx are o semnificație similară pentru secțiunea longitudinală. Rigiditatea torsională a nervurilor este reprezentată de al doilea termen din (14). Cu L_x și L_y sînt notate lungimea, respectiv lățimea tablierului (fig. 1*b*), iar $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{I}xy$ și $\bar{I}yx$ au fost definite anterior în legătură cu relațiile (7') și (13').

Rigiditățile secționale date mai sus pentru izotropie și ortotropie de material sînt identice cu cele obținute pe baza condiției de echivalență globală [2]. În consecință, rețeaua de grinzi care rezultă ca structură echivalentă structurii reale va fi aceeași în ambele situații. Ilustrativ, în figura 1*b* este reprezentată o rețea de acest fel, corespunzătoare unui tablier avînd șase „grinzi" longitudinale și nouă „grinzi" transversale.

Dacă numărul grinzilor reale ale suprastructurii este suficient de mare pentru a putea integra tablierul în categoria plăcilor cu ortotropie de formă, rigiditățile tuturor elementelor echivalente se vor putea deter-

mina cu relațiile (7′) și (13′). Într-o astfel de situație, rețeaua din figura 1*b* se va obține din juxtapunerea a 40 de modele de tipul celui schematizat în figura 1*a*.

În multe din cazurile întîlnite în practică numărul grinzilor principale este redus. În situațiile de acest fel, grinzile longitudinale ale rețelei echivalente vor coincide, ca număr și poziție, cu elementele principale de rezistență ale podului, iar în sens transversal elementele rețelei se vor obține substituind structurii reale în fiecare deschidere un număr de 7—13 „grinzi" cu secțiune constantă. Caracteristicile de rigiditate ale acestor „grinzi" se găsesc punînd condiții de echivalență parțială. Dacă tablierul este prevăzut cu antretoaze sau diafragme este necesar ca discretizarea longitudinală să se facă astfel încît poziția acestora să coincidă cu poziția unor grinzi din rețeaua echivalentă.

Utilizarea echivalenței parțiale în locul celei globale oferă anumite avantaje, mai ales în situațiile în care variația grosimii plăcii face dificilă trecerea de la relația (1) la relația (4) și de asemenea, atunci cînd geometria secțiunii transversale impune luarea în considerație a efectului eforturilor de lunecare. În acest din urmă caz, condiția de echivalență pusă modulului antisimetric de deformare, care furnizează ca parametru suplimentar rigiditatea secțională la forfecare, îmbunătățește sensibil răspunsul echivalentului.

3. TABLIERE CU SECȚIUNE DESCHISĂ

În această categorie sînt incluse tablierele pe grinzi cu una sau mai multe deschideri, solidarizate prin dală și eventual antretoaze. În figura 2*a* este schematizată o porțiune din secțiunea transversală a unui tablier de acest tip.

3.1. RIGIDITĂȚI LA ÎNCOVOIERE ȘI FORFECARE

Rigiditățile celor două familii de grinzi care alcătuiesc rețeaua echivalentă tablierului real se determină independent. Rigiditatea secțională la încovoiere a unei grinzi longitudinale se obține împărțind rigiditatea corespunzătoare a întregului tablier la numărul grinzilor principale. Această regulă, dedusă experimental [18, 5, 6], se aplică cu cele mai bune rezultate în situațiile în care distanța dintre grinzile principale este constantă.

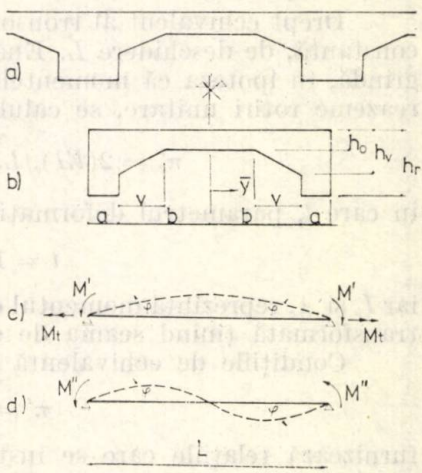


Fig. 2. — *a*) Tablier cu secțiune deschisă; *b*) Modul de placă; *c*) Deformanta simetrică a modulului; *a*) Deformata antisimetrică.

Rigiditatea la forfecare a grinzilor longitudinale se consideră a fi infinită.

Pentru determinarea caracteristicilor „grinzilor" transversale se reține un modul de placă delimitat de axele a două grinzi principale

vecine (fig. 2*b*). Simplu rezemat în dreptul axelor acestor grinzi, modulul se consideră suficient de întins în lungul deschiderii pentru ca, sub acțiunea unor momente distribuite uniform pe linia reazemelor, să fie supus, în zona sa centrală, la încovoiere cilindrică.

Sînt luate în considerație două moduri caracteristice de deformare, rezultate din încărcarea modulului de placă cu momente uniform distribuite în lungul reazemelor. În figura 2*c* este reprezentat modul simetric, iar în figura 2*d* cel antisimetric. Energia de deformație acumulată într-un tronson de placă de lățime a_x, în cele două ipoteze de deformare, se calculează cu relațiile :

$$\pi' = a_x \int_0^{L/2} \frac{M'^2}{Dy}\,\mathrm{d}\bar{y}, \quad \pi'' = a_x \int_0^{L/2} \left(\frac{2M''x}{L}\right)^2 \frac{1}{Dy}\,\mathrm{d}\bar{y}. \tag{15}$$

Dacă rotirile φ de pe reazeme sînt egale cu unitatea, relațiile (15) devin :

$$\pi' = \frac{6}{2c' + c}\,\frac{Eh_0^3 a_x}{12(1 - \nu^2)L}, \tag{15'}$$

$$\pi'' = \frac{6}{2c' - c}\,\frac{Eh_0^3 a_x}{12(1 - \nu^2)L}, \tag{15''}$$

în care c' și c sînt coeficienți de secțiune variabilă pentru o grindă cu vute simetrice. Celelalte notații folosite în relațiile (15—15'') corespund celor date în figura 2.

Drept echivalent al tronsonului de placă se ia o grindă cu secțiune constantă, de deschidere L. Energia de deformație acumulată în această grindă, în ipoteza că momentele M' (fig. 2*c*) și M'' (fig. 2*d*) produc pe reazeme rotiri unitare, se calulează astfel :

$$\pi'_e = 2(EI)_e/L, \quad \pi''_e = 6(EI)_e/(1 + t)L, \tag{16}$$

în care t, parametrul deformației din forfecare, este

$$t = 12(EI)_e/L^2(GA)_e, \tag{17}$$

iar I_e și A_e reprezintă momentul de inerție la încovoiere și, respectiv, aria transformată ținînd seama de efectul tăierii.

Condițiile de echivalență parțială,

$$\pi' = \pi'_e\,;\ \pi'' = \pi''_e \tag{18}$$

furnizează relațiile care se instituie între caracteristicile echivalentului (I_e, t sau A_e) și parametrii plăcii reale (I_0, c', c, ν), adică

$$(EI)_e = 3EI_0/(2c' + c)\,;\ t = 4(c' - c)/(2c' + c), \tag{19}$$

în care

$$EI_0 = Ea_x h_0^3/12(1 - \nu^2) \tag{20}$$

și a_x reprezintă distanța dintre axele grinzilor transversale.

La relațiile (19) se poate ajunge și pe baza energiei de deformație complementare. Pentru tronsonul de placă (fig. 2) de lungime L, simplu rezemat la capete și încărcat cu momentele de reazem $M1$ și $M2$, energia de deformație complementară se scrie [3]:

$$U^* = (c'M1^2 - cM1M2 + c'M2^2)\, L/6EI_0. \qquad (21')$$

Similar, pentru grinda echivalentă vom avea:

$$U_e^* = [(4 + t)M1^2 - 2(2 - t)M1M2 + (4 + t)M2^2]\, L/24(EI)_e. \qquad (21'')$$

Condițiile de echivalență

$$\frac{c'L}{6\,EI_0} = \frac{(4+t)L}{24(EI)_e} \text{ și } \frac{cL}{6EI_0} = \frac{(2-t)L}{12(EI)_e} \qquad (22)$$

au drept soluție relațiile (19).

În (21''), ca și în a doua relație (16), efectul forței tăietoare a fost introdus pe baza ipotezei potrivit căreia secțiunile grinzii, inițial plane, rămîn plane după deformare, dar nu neapărat perpendiculare pe fibra medie deformată [20].

În cazul grinzilor prefabricate la care grosimea inimii este mică în raport cu distanța dintre grinzi, se poate neglija aportul rigidității transversale a inimii. În consecință, și cu referire la notațiile din figura 2*b*, lungimea de calcul a vutelor va crește devenind egală cu $v + a$, iar înălțimea secțiunii de reazem va fi egală cu $h_0 + (h_v - h_0)(a + v)/v$. Coeficienții c și c' vor corespunde deci unei grinzi avînd vute simetrice drepte [3]. Din relațiile (19) și (20), ținînd seama și de (17), rezultă:

$$(EI)_e = \frac{3}{2c' + c}\,\frac{Eh_0^3\, a_x}{12(1 - \nu^2)},\quad (GA)_e = \frac{3}{2(c' - c)}\left(\frac{h_0}{L}\right)^2 \frac{Gh_0 a_x}{(1-\nu)}. \qquad (23)$$

În cazul grinzilor late, cu înălțime relativ redusă și fără vute, condițiile de echivalență (18) conduc la următoarele:

$$(EI)_e = \frac{(a+b)\,h_r^3}{bh_r^3 + ah_0^3}\,\frac{Eh_0^3 a_x}{12(1-\nu)^2},\quad (GA)_e = \frac{Lh_r^3}{2(L+2b)(h_0^3 - h_r^3)}\,\frac{h_0^2}{ab}\,\frac{Gh_0 a_x}{(1-\nu)}. \qquad (24)$$

La stabilirea relațiilor (19), (23) și (24) s-a presupus că în lungul deschiderii tablierului, placa are o grosime uniformă. De asemenea, s-a admis în mod tacit că în sens transversal variația grosimii plăcii este lentă și progresivă. Privite prin prisma acestei ultime ipoteze, relațiile de mai sus trebuie aplicate cu o oarecare prudență, mai ales dacă lipsesc vutele de racordare și geometria secțiunii transversale face necesară introducerea efectului forței tăietoare. În situațiile de acest fel, săgeata plăcii nu mai poate fi privită drept singurul parametru variabil al problemei. Trebuie să se țină seama și de faptul că pe înălțimea secțiunii deformațiile specifice și eforturile unitare au o variație neliniară. Dacă se admite că în lungul deschiderii sînt îndeplinite deziderateleîncovoierii cilindrice, problema,

inițial tridimensională, se reduce la una în două dimensiuni în care deplasările se studiază în planul secțiunii transversale a tablierului. Soluția poate fi obținută cu ajutorul elementelor finite utilizate, în starea de deformație plană [2].

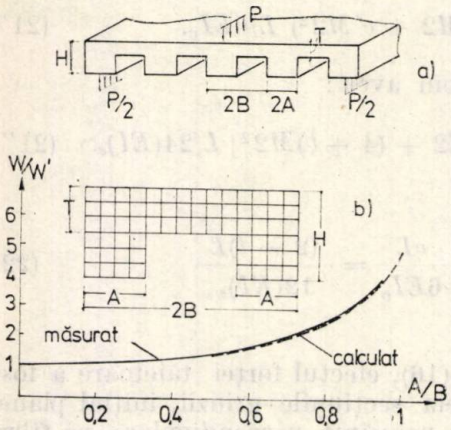


Fig. 3. — Variația săgeților plăcilor testate; *a*) Placă testată; *b*) Discretizarea modulului de placă.

În figura 3*b* este reprezentată o divizare tipică în elemente finite a tronsonului de placă și a zonelor adiacente din grinzi. Condiții de echivalență parțială similare celor utilizate anterior furnizează caracteristicile echivalentului, sub forma:

$$(EI)_e = m\,\frac{ET^3 a_x}{12(1-\nu^2)} \quad \text{și}$$

$$(GA)_e = n\,\frac{GTa_x}{2(1-\nu)}\,. \qquad (25)$$

Tabelul I conține valorile lui n și m obținute în urma unui studiu parametric în care rapoartele T/H, A/B și H/B au figurat drept variabile. A, B, H și T sînt definite în figura 3*b*.

Tabelul 1

T/H	A/B	H/B = 1,0		H/B = 0,8		H/B = 0,6		H/B = 0,4		H/B = 0,2	
		m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
1/4	2/6	1,25	−0,25	1,29	−0,14	1,33	−0,07	1,38	−0,03	1,47	−0,01
	3/6	1,56	−0,19	1,64	−0,11	1,71	−0,06	1,79	−0,03	1,94	−0,01
	4/6	2,08	−0,19	2,25	−0,12	2,37	−0,07	2,52	−0,03	2,80	−0,01
	5/6	3,18	−0,26	3,55	−0,17	3,87	−0,10	4,32	−0,05	5,06	−0,01
	6/6	6,67	−0,62	8,45	−0,46	10,45	−0,31	14,74	−0,20	25,46	−0,01
1/3	2/6	1,20	−0,56	1,24	−0,29	1,28	−0,14	1,34	−0,06	1,39	−0,01
	3/6	1,47	−0,37	1,53	−0,22	1,62	−0,11	1,70	−0,06	1,79	−0,01
	4/6	1,91	−0,36	2,03	−0,22	2,18	−0,12	2,34	−0,06	2,53	−0,01
	5/6	2,76	−0,47	3,02	−0,31	3,36	−0,18	3,77	−0,08	4,32	−0,02
	6/6	4,91	−0,96	5,85	−0,65	7,22	−0,46	9,61	−0,29	14,62	−0,15
1/2	2/6	1,13	−2,05	1,16	−0,96	1,21	−0,39	1,27	−0,15	1,33	−0,03
	3/6	1,32	−1,30	1,39	−0,64	1,47	−0,29	1,56	−0,12	1,65	−0,03
	4/6	1,63	−1,22	1,74	−0,63	1,86	−0,31	2,02	−0,14	2,17	−0,04
	5/6	2,14	−1,67	2,33	−0,86	2,56	−0,43	2,87	−0,20	3,21	−0,06
	6/6	3,10	−6,09	3,53	−2,24	4,07	−1,04	4,91	−0,62	6,08	−0,30
2/3	2/6	1,10	−7,64	1,12	−2,78	1,16	−0,94	1,20	−0,33	1,25	−0,07
	3/6	1,23	−4,49	1,28	−1,82	1,34	−0,71	1,40	−0,28	1,46	−0,07
	4/6	1,44	−5,20	1,51	−1,93	1,59	−0,76	1,68	−0,32	1,77	−0,08
	5/6	1,73	−13,7	1,83	−3,16	1,95	−1,12	2,09	−0,48	2,24	−0,13
	6/6	2,18	6,55	2,34	31,0	2,54	−3,79	2,78	−1,69	3,05	−0,75

Pentru a verifica echivalentul obținut pe această cale, s-au folosit testele descrise în [5]. Autorii au încercat un set de plăci din azbociment, cu nervuri excentrice orientate într-o singură direcție, simplu rezemate pe laturile paralele cu nervurile. Plăcile au fost încărcate la mijloc cu o sarcină uniform repartizată liniar după direcția nervurilor, fiind supuse astfel la încovoiere cilindrică, cel puțin în zona lor centrală. În figura 3, unde este schițată și secțiunea unei plăci de acest tip, este reprezentată creșterea rigidității plăcii în funcție de creșterea raportului dintre grosimea unei nervuri și interaxa nervurilor. Cu linie plină sînt figurate rezultatele experimentale, reprezentînd raportul dintre w, săgeata plăcii fără nervuri și w', săgeata plăcii cu nervuri. Cu linie întreruptă sînt reprezentate rezultatele calculului cu elemente finite. Buna coincidență a celor două seturi de rezultate atestă valabilitatea procedeului de calcul utilizat.

O îmbunătățire a caracteristicilor echivalenților tablierelor cu secțiune deschisă se poate obține și prin adoptarea unor măsuri constructive. Astfel, dacă printr-o armare corespunzătoare a zonelor de racord se realizează rigidizarea și antrenarea în lucru în sens transversal a întregii secțiuni de beton din grinzile principale, se poate admite că rezemarea plăcii se face prin intermediul unor brațe rigide. Aceasta, este același lucru cu a accepta valoarea zero pentru raportul h_0/h_r din relația (24); se obțin astfel caracteristici îmbunătățite pentru echivalent:

$$(EI)_e = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{Eh_0^3 a_x}{12(1 - \nu^2)}, \quad (GA)_e = \frac{-L}{(L + 2b)} \frac{h_0^2}{ab} \frac{Gh_0 a_x}{2(1 - \nu)}. \tag{26}$$

Este recomandabil ca aceste relații să se aplice atunci cînd sînt întrunite condițiile: $h_r > 5h_0/2$, $h_r < L/5$ și $a < 2b/3$.

3.2. RIGIDITĂȚI LA TORSIUNE

Utilizarea relației (14), care admite o decuplare a rigidităților torsionale de pe cele două direcții ale tablierului, facilitează determinarea rigidităților echivalente din condiții puse separat pentru fiecare din cele două familii de grinzi.

Astfel, admițînd la fel ca mai înainte, că secțiunea tablierului nu variază în lungul deschiderii, rigiditatea secțională a unei grinzi longitudinale din rețeaua echivalentă se va obține direct din (12) și (14) sub forma

$$GIxy = (Jxy/2n + \bar{I}xy/k)G, \tag{27}$$

în care n este egal cu numărul grinzilor principale. Parametrul k se va lua egal cu 2 dacă grinzile principale sînt suficient de late pentru a influența rigiditatea tablierului în sens transversal; în cazul nervurilor subțiri k este egal cu 1, iar dacă acestea lipsesc k devine infinit.

Pentru determinarea rigidității torsionale a unei „grinzi" transversale se reține același modul de placă care a fost utilizat în paragraful anterior (fig. 2a). Modulul se consideră încărcat cu momente de torsiune Mt uni-

form repartizate în lungul liniei reazemelor (fig. 2*c*). Energia de deformație acumulată într-un tronson de placă de lățime a_x se calculează cu relația

$$\pi_t = \int_0^{L/2} a_x \frac{Mt^2}{GI_t} \mathrm{d}\bar{y}, \tag{28}$$

în care

$$I_t = \frac{Jyx}{L_x} = \frac{h^3}{3} \tag{29}$$

este momentul de inerție la torsiune, pe unitate de lungime, al unei secțiuni dreptunghiulare alungite având înălțimea h și baza $L_x \gg h$. Comparînd (28) cu prima din relațiile (15) se constată existența unei analogii torsiune-încovoiere, raportul integranzilor

$$GI_t = 2(1 - \nu)Dy \tag{30}$$

arătînd că, în cazul încovoierii simetrice și al torsiunii, coeficienții de secțiune variabilă sînt aceiași.

Substituind (30) în (28), simultan cu condiția de a avea rotiri unitare pe reazeme, se obține o relație între energia acumulată prin torsiune și energia de deformație corespunzătoare încovoierii simetrice (15′) :

$$\pi_t = 2(1 - \nu)\pi'. \tag{31}$$

Energia de deformație acumulată în „grinda" transversală în ipoteza că momentele Mt produc pe reazeme rotiri unitare, se calculează cu relația

$$\pi_{te} = 2(GI_t)_e/L. \tag{32}$$

Din condiția $\pi_t = \pi_{te}$, ținînd seama de prima din relațiile (18) și conform cu relația (14), luînd în considerație numai jumătate din momentul de inerție la torsiune în sens longitudinal, se obține rigiditatea secțională la torsiune a grinzii echivalente :

$$(GI_t)_e = (1 - \nu)(EI)_e = 2(1 - \nu^2)\, GI_e, \tag{33}$$

de unde concluzia că, în cazul betonului, momentul de inerție la torsiune este aproximativ egal cu dublul momentului de inerție la încovoiere.

Pe baza unor considerente similare, utilizarea relației (33) poate fi extinsă și la soluționarea cazurilor în care lipsesc vutele sau lățimea grinzilor este importantă.

3.3. EXEMPLE COMPARATIVE

3.3.1. În referatul [6] sînt descrise o serie de încercări cu caracter experimental efectuate pe tabliere de 27,5 m deschidere, avînd 2, 3 sau 6 grinzi de secțiune. În tabelul 2 sînt reproduse săgețile (media citirilor) de la mijlocul deschiderii tablierului cu șase grinzi și antretoaze numai pe reazeme. Încărcarea, o sarcină de 22 kN/ml, este uniform repartizată pe

una din grinzile marginale. De asemenea, tabelul conține săgeţile obținute cu echivalenți.

Tabelul 2

	Gr.1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 5	Gr. 6
ref. [6]	1,02	0,66	0,32	0,12	−0,03	−0,13
echiv.	1,04	0,63	0,31	0,10	−0,02	−0,10

În referatul [6] se găsesc toate elementele necesare calculului.

3.3.2. În tabelul 3 sînt dați coeficienții repartiției transversale la mijloc pentru un tablier cu patru grinzi de 24 m, fără antretoaze. Calculele au fost efectuate cu ajutorul echivalenţilor și, pentru comparație, prin metoda fișiilor finite [2].

Tabelul 3

	Grinda marginală				Grinda centrală			
	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4
echiv.	0,82	0,21	0,01	0,04	0,21	0,56	0,22	0,01
fișii	0,83	0,21	0,00	−0,04	0,21	0,57	0,22	0,00

Elemente de calcul: $I = 0{,}2485$ m^4, $I_t = 0{,}00365$ m^4, $h_0 = 18$ cm, $h_v = 20$ cm, $v = 57$ cm, $a = 8$ cm, $h_r = 160$ cm, $L = 270$ cm.

4. TABLIERE CU GRINZI CHESONATE

Tablierele incluse în această categorie au ca elemente principale de rezistență grinzi prevăzute cu goluri longitudinale, grinzi considerate uneori în calcul drept bare cu pereți subțiri. În figura 4*a* este reprezentată o porțiune din secțiunea transversală a unei suprastructuri de acest tip.

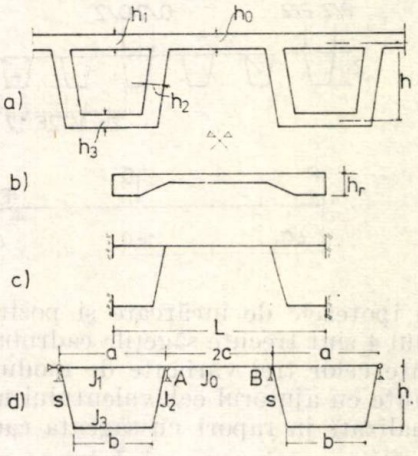


Fig. 4. — *a*) Tablier cu grinzi chesonate; *b*, *c*, *d*) Variante ale modulului structurii.

Solidarizate prin placă la partea superioară și uneori prin diafragme, tablierele cu grinzi chesonate se remarcă prin buna repartiție a sarcinilor în sens transversal. Pe de altă parte, în lipsa diafragmelor, rigiditatea

transversală și implicit, capacitatea de repartiție se micșorează, rămînînd tributare numai efectului de cadru transversal al secțiunii tablierului.

4.1. RIGIDITĂȚI LA ÎNCOVOIERE ȘI FORFECARE

La fel ca în cazul tablierelor deschise, rigiditățile celor două familii de grinzi care alcătuiesc rețeaua echivalentă se determină în mod independent. De asemenea, rigiditatea la încovoiere a unei grinzi longitudinale se va obține uzînd de regula adoptată anterior, aceea a împărțirii rigidității întregului tablier la numărul grinzilor principale. Rigiditatea la forfecare a grinzilor longitudinale nu se ia în considerație.

În vederea determinării caracteristicilor „grinzilor" transversale este necesar să se delimiteze modulul de structură pentru care urmează să se stabilească relații de echivalență. În figurile 4*b*, *c* și *d* sînt figurate trei variante de modul, fiecare din ele conducînd la alte caracteristici ale echivalentului. Pentru a reține varianta optimă s-a recurs la simularea numerică a unor teste asemănătoare încercărilor descrise în [5]. În esență, admițînd ca fiind îndeplinite condițiile încovoierii cilindrice, se compară deformata cadrului transversal din secțiunea tablierului, cu deformata unor grinzi echivalente. Caracteristicile acestor grinzi, $(EI)_e$ și $(GA)_e$, determinate în prealabil pentru fiecare din cele trei variante de modul, s-au obținut la fel ca punctul 3.1 din condiții de echivalență parțială.

Ilustrativ, în figura 5 este reprezentat cadrul transversal din secțiunea unei suprastructuri din cele testate numeric. Corespunde unui tablier cu șapte grinzi, avînd dala și pereții casetelor de grosime constantă. Sînt avute în vedere două ipoteze constructive : prima, în care toate elementele secțiunii au aceeași grosime de 20 cm și a doua, care se deosebește de prima numai prin grosimea pereților înclinați care au 40 cm. Celelalte dimensiuni,

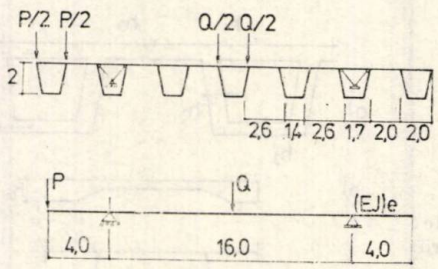


Fig. 5. — *a*) Secțiunea structurii încovoiate ; *b*) Schema echivalentă.

ca și ipotezele de încărcare și poziția reazemelor rezultă din figură. În tabelul 4 sînt trecute săgețile cadrului transversal și săgețile grinzilor echivalente celor trei variante de modul. Sînt date de asemenea rezultatele obținute cu ajutorul echivalentului utilizat în [12]. Săgețile din tabel sînt normalizate în raport cu săgeata cadrului transversal.

Din examinarea tabelului se constată că nici-un echivalent nu dă rezultate exacte. Mai apropiate de soluția etalon ($\pm 5\%$) sînt rezultatele obținute cu echivalentul aferent modulului din figura 4*d*. De asemenea, se vede că în cazul în care grosimea pereților laterali crește în raport cu

grosimea dalei, răspunsul echivalentului aferent modulului din figura 4*b* se îmbunătățește substanțial. În sfîrșit, se constată că prin neincluderea deformatei simetrice în relațiile de echivalență, se obține un răspuns

Tabelul 4

	$P = 0$		$Q \neq 0$		$P \neq Q$		$Q = 0$	
ipoteze de calcul	$h2 = 20$cm		$h2 = 40$cm		$h2 = 20$ cm		$h2 = 40$ cm	
	W_Q	W_P	W_Q	W_P	W_Q	W_P	W_Q	W_P
cadru fig. 4*a*	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
echiv fig. 4*b*	0,72	0,73	0,97	0,94	0,72	0,72	0,96	0,97
echiv fig. 4*c*	0,88	0,87	0,99	0,99	0,87	0,88	0,99	0,99
echiv fig. 4*a*	0,96	0,96	1,04	1,04	0,96	0,96	1,04	1,04
echiv Ref. 12	0,37	0,36	0,41	0,40	0,37	0,37	0,41	0,41

nesatisfăcător, după cum reiese din examinarea rezultatelor obținute cu echivalentul [12]. Acest echivalent are drept caracteristică momentul de inerție I_e determinat prin luarea în calcul a deformatei antisimetrice a modulului din figura 4*c*. Un echivalent de același tip, derivat tot din modulul din figura 4*c*, dar avînd caracteristici $(EI)_e$ și $(GA)_e$ determinate din condiții puse atît deformatei simetrice, cît și celei antisimetrice are o comportare superioară. Comparînd direct rezultatele furnizate de acești doi echivalenți se vede mai bine importanța pe care o are deformata simetrică asupra răspunsului echivalentului.

În continuare se prezintă pe scurt modul în care pot fi determinate caracteristicile modulului de tablier reprezentat în figura 4*d*.

Se admite că modulul reținut este supus la încovoiere cilindrică prin suprimarea celor două reazeme din A și B și impunerea unor deplasări caracteristice pe direcția legăturilor suprimate. Energia de deformație acumulată într-un tronson de tablier de lățime a_x, cînd pe direcția legăturilor suprimate se dau deplasări simetrice egale cu a, se calculează cu relația :

$$\pi' = \frac{EI_0}{(1 - \nu^2)(c + a\lambda_0)}. \tag{34'}$$

Similar, energia acumulată în cazul în care deplasările a, date pe direcția celor doi penduli suprimați, sînt antisimetrice, este dată de

$$\pi'' = \frac{3L^2EI_0}{(1 - \nu^2)\, 4c^2(c + 3a\lambda_0)}. \tag{34''}$$

În (34') și (34'') s-a utilizat notația :

$$\lambda_0 = \left(\frac{1}{1 + \lambda_1} + \frac{1}{3 + \lambda_2}\right)\frac{I_0}{4I_1} \tag{35}$$

și încă

$$\lambda_1 = \frac{aI_2(2s\,I_3 + 3b\,I_2)}{sI_1(sI_3 + 2b\,I_2)}, \tag{36'}$$

$$\lambda_2 = \frac{3a^3 I_2 I_3}{I_1[b^3 I_2 + 2s\,I_3(a^2 + ab + b^2)]}, \tag{36''}$$

în care $I_0 = h_0^3 a_x/12$, $I_1 = h_1^3\, a_x/12, \ldots$ etc. Celelalte notații folosite în relațiile de mai sus corespund celor date în figura 4*d*.

Caracteristicile echivalentului, $(EI)_e$ și $(GA)_e$, se obțin din condiții de echivalență parțială, substituind (34′) și (34″) în (18) :

$$(EI)_e = \frac{L\,EI_0}{2(1 - \nu^2)(c + a\lambda_0)}, \tag{37'}$$

$$(GA)_e = \frac{12\,LGI_0}{(1 - \nu)[4c^2(c + 3a\lambda_0) - L^2(c + a\lambda_0)]}. \tag{37''}$$

Dacă $I_1 \sim I_2 \sim I_3 \gg I_0$, relațiile (37′, 37″) se simplifică putînd fi aduse la forma (26).

Un caz intermediar celor reprezentate prin relațiile (26) și (37′, 37″) îl constituie echivalentul aferent modulului de tablier din figura 4*b*. Dacă se adoptă acest echivalent, componenta simetrică și cea antisimetrică a energiei de deformație se calculează cu relațiile (15) în care se substituie următoarea valoare a lui h_r :

$$h_r = \left(\frac{12\,h_1 h_3}{h(h_1 + h_3)}\right)^{1/3} h. \tag{38}$$

Din figurile 2 și 4 rezultă corespondența existentă între celelalte notații utilizate.

4.2. RIGIDITĂȚI LA TORSIUNE

Momentele de inerție la torsiune ale grinzilor longitudinale din rețeaua echivalentă sînt egale cu momentele de inerție ale grinzilor reale. Utilizînd formula lui Bredt [3] și cu notațiile din figura 4*d*, rigiditatea secțională a unei grinzi longitudinale se calculează cu relația :

$$GI_t = \frac{G(a + b)^2 h^2}{\dfrac{a}{h_1} + \dfrac{b}{h_3} + \dfrac{2s}{h_2}}. \tag{39}$$

Rigiditățile torsionale ale „grinzilor" transversale se neglijează.

4.3. FÎȘII CU GOLURI

Tablierele alcătuite din fîșii cu goluri constituie un caz particular al suprastructurilor cu grinzi chesonate. La acest tip de tabliere repartiția transversală a încărcării se realizează fie prin intermediul unei plăci de

monolitizare turnate deasupra fîşiilor (fig. 6*a*), fie cu ajutorul unor pene introduse în locaşuri amenajate pe feţele laterale ale grinzilor (fig. 6*b*).

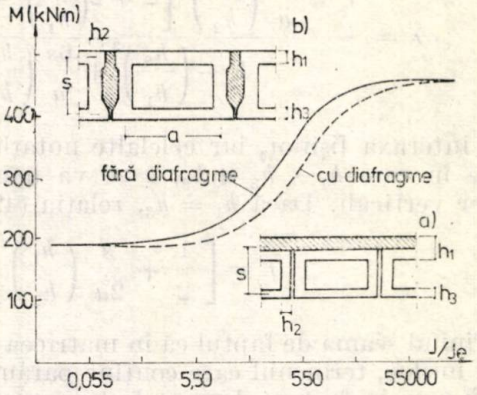


Fig. 6. — Variaţia momentului încovoietor maxim din fişia marginală; *a*) Fişii cu placă de monolitizare; *b*) Fişii solidarizate prin pene laterale.

Dacă tablierul este prevăzut cu placă de monolitizare, calculele se pot efectua pe baza celor discutate în legătură cu relaţiile (25), (27) şi (33). Înălţimea H care intervine în (25) se poate determina cu ajutorul relaţiei (38).

În lipsa plăcii de monolitizare şi în ipoteza că dispozitivele de îmbinare a fişiilor nu pot transmite decît forţe verticale, este necesar ca în calcul elementele transversale ale structurii echivalente să fie prevăzute cu articulaţii în cîmp. Autorul foloseşte de mai mult timp acest tip de echivalenţă; fie uzînd de un program specializat, scris pentru tabliere cu grinzi joantive [22], fie cu un program general de reţele de grinzi, în care bara dublu încastrată cu articulaţie în cîmp [9] este utilizată drept element al formei de bază. În limitele ipotezelor rezistenţei materialelor, cele două programe furnizează soluţii identice.

În cazul utilizării celui de al doilea program şi cu notaţiile din figura 6*b*, rigidităţile secţionale ale „grinzilor" transversale se calculează astfel:

$$(EI)_e = \frac{Eh_1h_3s^2a_x}{(1-\nu^2)(h_1+h_3)}, \quad (GI_t) = 0 \tag{40}$$

În relaţia (40) s-a neglijat aportul momentelor de inerţie proprii ale tălpilor. Evident, rigidităţile elementelor longitudinale ale reţelei echivalente şi cele ale fişiilor reale, sînt identice.

În cazurile în care grosimea pereţilor fişiilor este relativ redusă, repartiţia transversală se înrăutăţeşte datorită deformării secţiunii. Acest aspect poate fi prins în calcul dacă, în sens transversal tablierului, se ia în consideraţie efectul forţelor tăietoare. Utilizînd a doua din relaţiile (18), în care se egalează energia de deformaţie acumulată într-un tronson de fişie de lăţime a_x supus unei deformări de tip distorsiune, cu energia acumulată prin deformarea antisimetrică a echivalentului, se obţine:

$$\frac{Eh_1^3a_x}{2a(1-\nu^2)}\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \frac{6(EI)_e\lambda}{(1+t)L}, \tag{41}$$

în care

$$\lambda = \frac{1 + \frac{s}{a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \left[2 + 2\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^3 + \frac{3s}{a}\left(\frac{h^3}{h_2}\right)^3\right]}{1 + \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^3 + \frac{6s}{a}\left(\frac{h_3}{h_2}\right)^3} \left(\frac{a}{L}\right)^3, \tag{42}$$

L este interaxa fișiilor, iar celelalte notații sînt arătate în figura 6*b*. În cazurile în care $h_1 \sim h_3 \ll h_2$, a se va măsura între fețele interioare ale pereților verticali. Dacă $h_1 = h_3$, relația (42) poate fi adusă la forma :

$$\lambda = \left[\frac{1}{2} + \frac{s}{2a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3\right]\left(\frac{a}{L}\right)^3. \tag{43}$$

Ținînd seama de faptul că în matricea de rigiditate a barei cu articulație la mijloc, termenul care conține parametrul deformației din forfecare poate fi scos în factor, elementele transversale ale rețelei echivalente pot fi caracterizate printr-un singur parametru :

$$\overline{(EI)}_e = \frac{(EI)_e}{1 + t} = \frac{Eh_1^3\, a_x}{12(1 - \nu^2)\lambda} = \frac{EI_1}{(1 - \nu^2)\lambda}. \tag{44}$$

La fel ca în paragraful anterior, la stabilirea relațiilor de mai sus s-a admis că sînt îndeplinite condițiile încovoierii cilindrice.

4.4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră un tablier de 8,4 m deschidere, alcătuit din 8 fișii articulate în lungul rosturilor, avînd $I = 0{,}00594$ m^4 și $I_t = 0{,}0146$ m^4. Cu notațiile din figura 6*b*, celelalte date de calcul sînt : $s = 37$ cm, $h_1 = h_3 = 8$ cm, interaxa fișiilor $= 100$ cm. a și h_2 sînt variabile. Tablierul este încărcat la mijloc cu un vehicul S60 așezat cu una din șenile pe o fișie marginală. În figura 6 este reprezentată creșterea momentului încovoietor de la mijlocul fișiei marginale direct încărcate, pe măsură ce crește raportul I/I_e. Domeniul de variație al momentului încovoietor este mărginit de soluția Ulițki [21] și de valoarea momentului încovoietor de la grinda simplu rezemată încărcată cu jumătate din S60. Rezultatele obținute, în două ipoteze de calcul — cu și fără diafragme de reazem — concordă — cu rezultatele prezentate în referatul [10].

5. TABLIERE CU SECȚIUNE ÎNCHISĂ

În această categorie sînt incluse tablierele ale căror principale elemente de rezistență sînt solidarizate prin dală atît la extrados, cît și la intrados. În figura 7 este schematizată o porțiune din secțiunea transversală a unui tablier de acest tip. În cazul în care numărul celulelor este mai mare de trei, calculul acestor tabliere se poate face aplicînd teoria plăcilor ortotrope [19, 8].

După West [18], dacă raportul dintre secțiunea netă și secțiunea brută a tablierului este mai mică de 0,4, este necesar ca în calcul să se țină seama de caracterul tridimensional al deformatei structurii. Teoria rețelelor de grinzi poate oferi o imagine concludentă a stării de eforturi din structură și în situațiile de acest fel.

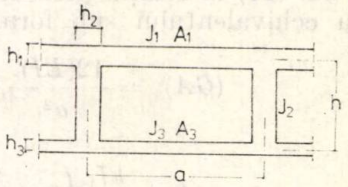


Fig. 7. — Tablier cu secțiune închisă.

5.1. RIGIDITĂȚI LA ÎNCOVOIERE ȘI FORFECARE

Rigiditățile secționale la încovoiere ale grinzilor longitudinale, grinzi amplasate de regulă în dreptul pereților structurii reale, se determină împărțind rigiditatea tablierului la numărul pereților longitudinali. Această regulă este impusă de existența unei axe neutre unice pentru întreaga secțiune transversală.

Rigiditățile la forfecare ale grinzilor longitudinale se consideră a fi infinite.

Rigiditățile elementelor transversale ale rețelei se determină pe baza condițiilor de echivalență în ipoteza încovoierii cilindrice în sens transversal.

Cu notațiile din figura 7, energia potențială acumulată într-o celulă de lățime a_x, cînd pereților verticali li se imprimă rotiri unitare simetrice, se calculează cu relația:

$$\pi' = \frac{2h^2 EA_1 A_3}{a(1-\nu^2)(A_1+A_3)} + \frac{6EI_1}{a(1-\nu^2)\lambda^*}\left(1+\frac{I_3}{I_1}+\frac{2hI_3}{aI_2}\right), \quad (45)$$

în care

$$\lambda^* = \left(2+\frac{hI_1}{aI_2}\right)\left(2+\frac{hI_3}{aI_2}\right) - 1. \quad (46)$$

Din condiția $\pi' = 2(EI)_e/L$, cu $L = a$, rezultă

$$(EI)_e = \frac{h^2 A_1 A_3 E}{(A_1+A_3)(1-\nu^2)} + \frac{3EI_1}{(1-\nu^2)\lambda^*}\left(1+\frac{I_3}{I_1}+\frac{2hI_3}{aI_2}\right). \quad (47)$$

La fel ca în [19] și [8], în [7] se recomandă ca $(EI)_e$ să se calculeze luînd în considerație numai aportul celor două dale. Aceasta revine la a considera I_2 egal cu infinit în (46) și (47), sau, dacă se neglijează momentele de inerție proprii ale dalelor, la a reține numai primul termen din relația (47).

Cea de a doua condiție de echivalență conduce la relația (41) în care $L = a$, iar $(EI)_e$ se calculează cu (47). Se obține

$$\frac{EI_1}{(1-\nu^2)\lambda} = \frac{(EI)_e}{1+t}. \tag{48}$$

Substituind t din (17) în relația precedentă, rezultă rigiditatea secțională la forfecare a echivalentului sub forma

$$(GA)_e = \frac{12(EI)_e}{a^2} \frac{I_1}{\lambda I_e - I_1}, \tag{49}$$

în care

$$\lambda = \frac{1 + \frac{hI_1}{aI_2}\left(2 + \frac{2I_3}{I_1} + \frac{3h\,I_3}{a\,I_2}\right)}{1 + \frac{I_3}{I_1} + \frac{6h\,I_3}{aI_2}}. \tag{50}$$

Dacă $I_1 \sim I_3 \ll I_2$ și dacă din (47) se reține numai primul termen, relația (49) poate fi adusă la forma

$$(GA)_e = \frac{24\,G}{a(1-\nu)} \frac{I_2(I_1+I_3)}{aI_2 + h(I_1+I_3)} \tag{51}$$

recomandată în [7, 8]. Alte relații de calcul pentru $(GA)_e$ sînt date în [19] și [14].

5.2. RIGIDITĂȚI LA TORSIUNE

Rigiditatea la torsiune se poate determina pentru toate grinzile rețelei echivalente cu aceiași relație care, cu notațiile din figura 7, se scrie

$$(GI_t)_e = \frac{2h^2 h_1 h_3}{h_1 + h_3 + \alpha h_2} Gd. \tag{52}$$

În (52), d este lățimea casetei pe direcția considerată, împărțită la numărul corespunzător de „grinzi", iar α este un coeficient adimensional. Potrivit referatelor [7, 8] această relație trebuie să corespundă unei jumătăți din constanta torsională a lui St. Venant calculată pentru o secțiune casetată foarte lată, ceea ce revine la a lua $\alpha = 0$. Pe de altă parte, în cazul tablierelor relativ înguste condiția $\alpha = 0$ conduce la supraevaluarea rigidităților grinzilor longitudinale ale rețelei echivalente.

În [19] se recomandă să se ia în considerație și contribuția pereților exteriori ai casetei. Pentru grinzile longitudinale ale rețelei echivalente, această recomandare conduce la :

$$\alpha = 2(h_1/h_2)\,(h_3/h_2)\,(h/B), \tag{53}$$

în care B este interaxa pereților exteriori ai tablierului.

În spiritul modului de abordare adoptat în paragrafele anterioare, rigidității grinzilor longitudinale trebuie să se calculeze cu relația (52) în care α este dat de (53). Pentru „grinzile" transversale, utilizarea condiției de echivalență conduce la relația (52) cu $\alpha = 0$.

5.3. CALCULUL EFORTURILOR DIN SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ

În [4,7] se recomandă ca eforturile din tălpile grinzii Vierendeel care constituie secțiunea transversală a tablierului, să se obțină împărțind momentul din „grinda" transversală corespunzătoare, proporțional cu rigiditățile celor două tălpi. Dar, după cum arată Sawko într-o discuție pe marginea referatului [4], acest mod de calcul poate duce la erori semnificative dacă pereții verticali ai tablierului sînt subțiri.

O cale mai bună de a determina aceste eforturi constă în a reține un tronson de tablier de lățime a_x și a i se impune deplasările rezultate în urma calculului rețelei echivalente. Efectiv, se calculează o grindă Vierendeel „încărcată" cu deplasări și, dacă se urmărește și efectul local al sarcinilor, cu forțe acționînd pe tălpile grinzii. Evident, pentru aceasta este necesar ca programul de calcul utilizat să admită încărcarea simultană a structurii cu sarcini și deplasări.

Acest mod de calcul este aplicabil și în cazul tablierelor cu grinzi chesonate.

5.4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră un tablier cu secțiunea închisă avînd deschiderea de 18,3 m. Tablierul are cinci pereți longitudinali echidistanți și diafragme numai pe reazeme. Cu notațiile din figura 7, datele de calcul sînt următoarele : $a = 213$ cm, $h = 76$ cm, $h_1 = 16{,}5$ cm, $h_2 = 20{,}3$ cm, $h_3 = 14$ cm. O sarcină concentrată pe peretele central la mijlocul deschiderii, încarcă tablierul. Rețeaua echivalentă este alcătuită din cinci grinzi longitudinale la 2,13 m una de alta, și 11 grinzi transversale la 1,83 m. În tabelul 5 sînt date eforturile unitare normale din secțiunea de la mijlocul deschiderii, în punctele de intersecție ale pereților verticali cu dala superioară. Eforturile din tabel, normalizate în raport cu efortul din dreptul grinzii centrale, sînt calculate în trei ipoteze :

a — Prin metoda elementelor finite, utilizînd o discretizare apropiată de aceea a rețelei echivalente [4];

b — Cu ajutorul echivalenților, caracteristicile „grinzilor" transversale fiind calculate cu relațiile (47) în care $I_2 =$ infinit, (51) și (52) în care $\alpha = 0$ ($\alpha = 0$ s-a folosit și în sens longitudinal);

c — Cu ajutorul echivalenților, caracteristicile „grinzilor" transversale fiind calculate cu relațiile (47), (49) și (52) în care $\alpha = 0$ (în sens longitudinal, α a fost determinat cu ajutorul relației (53)).

Tabelul 5

ipoteza de calcul	grinda longitudinală				
	1	2	3	4	5
a	0,46	0,52	1,00	0,52	0,46
b	0,48	0,55	1,00	0,55	0,48
c	0,45	0,53	1,00	0,53	0,45

6. CONCLUZII

A fost prezentat un procedeu simplificat pentru calculul tablierelor de pod, procedeu care se încadrează în metoda echivalenţelor. Comparativ cu modul de soluţionare curent din această metodă, aici s-a introdus un parametru suplimentar derivat din componenta antisimetrică a energiei de deformaţie. În acest fel pot fi calculate diferite tipuri de tabliere, deformabilitatea sau variaţia înălţimii secţiunii transversale încetînd a mai fi o piedică în calea unei tratări unitare. În plus, după cum rezultă din [23], acest procedeu se poate aplica fără nici-o restricţie şi la calculul spaţial a podurilor pe cadre, cu sau fără luarea în consideraţie a conlucrării structurii cu terenul de fundaţie.

Posibilitatea înlocuirii în calcul a barelor cu moment de inerţie variabil prin bare prismatice găseşte aplicaţie şi în afara domeniului tablierelor de pod. Multe din programele de calculator destinate calculului structurilor în cadre nu acceptă coeficienţi de secţiune variabilă. În situaţiile de acest fel, utilizarea relaţiilor de echivalenţă (19) constituie cea mai bună alternativă.

Primit la redacţie la 11 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. E. ABSI, *La théorie des équivalences et son application*, A.T.P.B., 3 (1971/72).
2. C. AVRAM şi colab., *Structuri din beton armat, Metoda elementelor finite, Teoria echivalenţelor*, Editura Academiei, Bucureşti, 1984.
3. A CARACOSTEA, *Manual pentru calculul construcţiilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977, p. 223—461.
4. M. A. CRISFIELD, *Finite element methods for the analysis of multicellular structures*, Proc. Instn. Civ. Engrs., **48** (1971).
5. A. R. CUSENS et al., *Elastic Rigidities of Ribbed Plates*, Build. Sci., 7, (1972).
6. J. FAUCHART, J. TRINH, *Poutraisons croissées*, A.I.T.B.T.P., 339 (1976).
7. E. C. HAMBLY, E. PENNELLS, *Grillage analysis applied to cellular bridge decks*, The Structural Engineer, **53** (1975).
8. E. HINTON, D. J. OWEN, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press Swansea, U.K., 1984.
9. G. KESSLER, *Caracteristici statice ale barei încastrate la extremităţi având o articulaţie în deschidere*, Rev. Construcţiilor, **15**, 7, (1963).
10. V. KRISTEK, *Need for Diaphragms in Concrete Box Girders*, J.S. Div., ST 12 (1971).
11. R. T. MELOSH, *A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending*, J. Aerospace Sci., **28**, 1 (1961).
12. G. OBLEMENCO, *Calculul plăcilor ortotrope cu echivalenţi elastici idealizaţi*, St. Cerc. Mec Apl., **46**, 3 (1987).
13. V. PETCU, *Asupra staticii grinzii cu secţiune variabilă la torsiune*, Rev. Construcţiilor, 4 (1958).
14. F. SAWKO et al., *A New Approach to the Analysis of Cellular Bridge Decks*, ACI Publication SP-35, p. 185—210, 1973.
15. M. SOARE, *Plăci plane*, sect. VI în *Manual pentru calculul construcţiilor* (coord. A. Caracostea), Edit. Tehnică, Bucureşti, 1977.
16. K. J. WILLAM, A. C. SCORDELIS, *Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffners*, Rep. No. SESM 70—2, Univ. of Calif., 1970.

17. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. Tehnică, București, 1959.

18. R. WEST, *The use of grillage analogy for the analysis of slab and pseudo-slab bridge decks*, Research rep. 21, Cement & Concrete Association, London, 1973.

19. J. C. ROBERTSON et al., *Transverse Shear Deformation in Multicell Box Beam Bridges*, IABSE Pub., **30—II** Zürich, 1970.

20. G. ONU, *Shear Effect in Beam Stiffness*, Capitolul 13. În *Civil Engineering Practice. Structures*, Technomic Pub., Lancaster Pa., 1987.

21. B. ULITKY, *Prostranstvenie rascioti mostov*, Avtotransizdat, Moscova, 1963.

22. G. ONU, *Calculul tablierelor cu grinzi joantive pe reazeme elastice*, Construcții, 4 (1975).

23. G. ONU, *The elastic response of the pile foundation bridge*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **25**, 6 (1980).

DETERMINAREA PUTERII NECESARE ACȚIONĂRII AMESTECĂTOARELOR PENTRU MATERIALE PULVERULENTE ȘI GRANULARE, CU DISPOZITIVE MECANICE DE AMESTECARE

de GH. I. ENE și GH.-D. PASAT
Institutul Politehnic, București

În lucrare s-au stabilit relații de calcul care pot fi utilizate atît pentru calculul de rezistență, cît și pentru determinarea puterii necesare acționării mașinilor cu dispozitive mecanice de agitare de tip paletă, destinate amestecării materialelor pulverulente și granulare, în regimul de funcționare cu îndesarea materialului. Relațiile stabilite țin seama atît de caracteristicile fizico-mecanice ale materialului amestecat, cît și de geometria amestecătorului.

1. GENERALITĂȚI

Prin amestecarea materialelor pulverulente și granulare se înțelege acel proces mecanic în care, din două sau mai multe componente, se obține în final un amestec (compoziție) omogen (din punctul de vedere al concentrațiilor).

Procesul complex al amestecării materialelor pulverulente și granulare are loc în timp, durata procesului și uniformitatea amestecului depinzînd în foarte mare măsură, printre altele, de proprietățile fizico-mecanice ale componenților și de construcția amestecătorului.

Deși foarte răspîndit în diverse industrii : chimică (coloranți, produse farmaceutice etc.), a materialelor de construcții, metalurgică (metalurgia pulberilor), alimentară etc., procesul de amestecare a materialelor pulverulente și granulare este insuficient studiat, atît teoretic, cît și experimental, construcția amestecătoarelor realizîndu-se, de cele mai multe ori, pe baze empirice.

O largă utilizare au, pentru amestecarea materialelor pulverulente și granulare, amestecătoarele cu dispozitive mecanice de amestecare de tip paletă, care vor fi studiate în cele ce urmează.

2. REGIMURI DE FUNCȚIONARE ALE AMESTECĂTORULUI

O amestecare intensă a materialelor se produce atunci cînd se realizează fluidizarea acestora. Fluidizarea materialului pulverulent sau granular cu ajutorul amestecătorului cu palete depinde în foarte mare măsură de turația acestuia, de înălțimea stratului de material aflat deasupra paletelor și de proprietățile fizico-mecanice ale materialului pulverulent. Trecerea materialului în starea fluidizată are loc într-o serie de etape succesive care sînt caracterizate de către viteza periferică a amestecătorului corespunzătoare capătului paletei [1]. La viteza $v < 1{,}0$ m/s se observă o înde-

sare a materialului, înălțimea lui scăzînd sub valoarea inițială $H_{inițial}$ (fig. 1*a*). Pentru valori $v = 1{,}0 \ldots 2{,}0$ m/s îndesarea materialului continuă, iar la suprafața acestuia apar crăpături (fig. 1*b*); pentru $v = 2{,}0 \ldots 2{,}5$ m/s materialul începe să se miște în toată masa lui (fig. 1*c*). Cînd viteza periferică atinge valori $v = 2{,}5 \ldots 3{,}5$ m/s, apare dilatarea stratului de material,

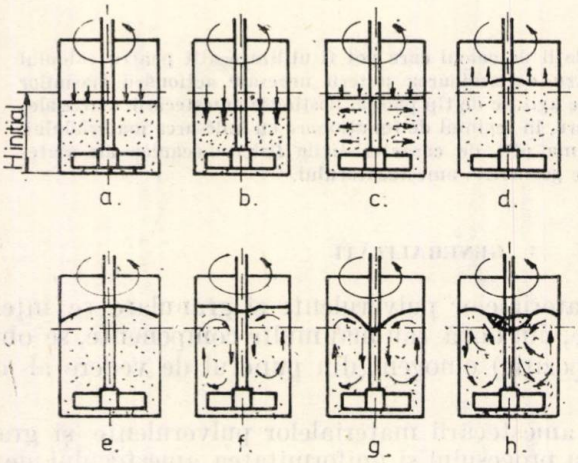


Fig. 1. — Etapele succesive care apar la amestecarea materialelor pulverulente și granulare cu dispozitive mecanice de amestecare [1].

la început lîngă arborele amestecătorului, apoi pe întreaga secțiune a recipientului (fig. 1*d*,*e*). La viteza periferică $v = 4{,}0 \ldots 5{,}0$ m/s materialul începe să circule în interiorul recipientului, iar la $v = 5{,}0 \ldots 8{,}0$ m/s, circulația devine foarte intensă și este urmată de fluidizarea materialului (fig. 1*g*, *h*), fază care se caracterizează printr-o dilatare vizibilă a stratului (de aproximativ 10...15% din volumul inițial al materialului).

La funcționarea în regim de îndesare a materialului (fig. 1*a*, *b*, *c*) amestecarea are loc ca urmare a unui proces de difuzie, iar în cazul regimului cu fluidizare (fig. 1*d*, *e*, *f*, *g*, *h*,) ca urmare a transportului convectiv datorit circulației intense a materialului. Din această cauză amestecarea materialelor pulverulente și granulare în amestecătoare cu palete decurge rapid, într-un interval de timp de aproximativ 80...100 s [1].

Experimental s-a observat că valoarea vitezei periferice la care are loc fluidizarea este cu atît mai ridicată cu cît este mai mare înălțimea stratului de material. În general, înălțimea maximă a stratului care poate fi fluidizat este $H_{max} = (6 \ldots 10)b$ (unde b este lățimea paletei). Pentru înălțimi ale stratului care depășesc valoarea H_{max} este necesar ca amestecătorul să prezinte, de obicei, două sau trei etaje (niveluri), paletele nivelului superior fiind decalate cu un anumit unghi față de cele ale nivelului inferior. Unghiul de decalare este 90° cînd amestecătorul este format din două palete și de 60° cînd amestecătorul este format din trei palete.

Puterea necesară acționării amestecătorului depinde de caracteristicile fizico-mecanice ale materialului amestecat, de geometria (forma și dimensiunile) amestecătorului și de turația acestuia. În perioada de pornire a amestecătorului se constată o creștere a puterii absorbite proporțională cu viteza periferică, pînă cînd se atinge valoarea vitezei periferice la care are loc fluidizarea materialului. După ce s-a realizat fluidizarea, densi-

tatea stratului (respectiv coeficientul de frecare internă al materialului) scade apreciabil conducînd la o scădere importantă a rezistenței opuse de către material paletelor. În acest mod scade momentul de torsiune necesar antrenării și deci și puterea absorbită. În perioada de demaraj motorul electric trebuie să fie capabil să facă față supraîncărcărilor de scurtă durată anterioare fluidizării (se precizează că aceste supraîncărcări pot fi evitate dacă alimentarea materialului în recipient se face după demararea în gol a amestecătorului) [1].

3. DETERMINAREA PUTERII NECESARE ACȚIONĂRII AMESTECĂTORULUI CU PALETE LA FUNCȚIONAREA ÎN REGIM DE ÎNDESARE A STRATULUI DE MATERIAL

Comportarea materialului (pulverulent sau granular), total diferită de comportarea corpurilor solide sau lichide, este descrisă de mecanica materialelor pulverulente sau granulare (vezi, de exemplu, [2]). Considerînd recipientul amestecătorului de înălțime redusă ($H/D < 2$), presiunea verticală în material poate fi determinată cu relația :

$$p_v = \rho g H,$$

unde ρ este densitatea aparentă (masa volumică) a materialului ; g — accelerația gravitației ; H — înălțimea stratului de material.

Datorită presiunii verticale, materialul transmite pereților recipientului sau oricărei suprafețe plasată vertical în interiorul materialului (respectiv paletei amestecătorului), presiunea orizontală.

$$p_H = m p_v, \tag{2}$$

unde

$$m = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \tag{3}$$

este coeficientul de mobilitate a materialului (coeficientul transmiterii presiunii), $\varphi = \text{arc tg } f$ fiind unghiul frecării interne a materialului (f este coeficientul de frecare internă).

Se consideră în interiorul materialului un element de volum, limitat de unghiul la centru $d\alpha$ și plasat la raza r față de axa recipientului, avînd lățimea dr și înălțimea b (egală cu lățimea paletei) (fig. 2).

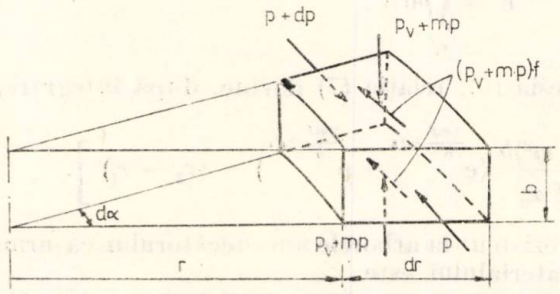


Fig. 2. — Încărcările elementului de volum.

Asupra elementului de volum acționează încărcările prezentate în figura 2, ecuația de echilibru a acestora fiind

$$(p + dp)\ b\ dr - pb dr - 2(p_v + mp) f\ r\ dr\ d\alpha = 0. \tag{4}$$

Ecuaţia (4) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{dp}{p_v + mp} = \frac{2f}{b} r \, d\alpha. \tag{5}$$

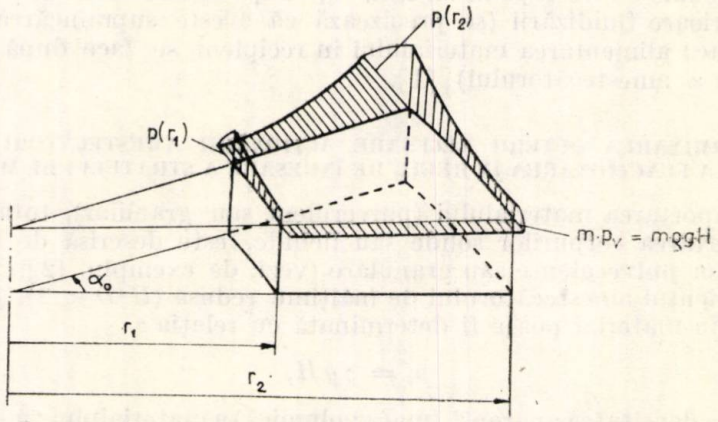


Fig. 3. — Variaţia presiunilor care se dezvoltă în material, datorită acţiunii paletei amestecătorului.

Integrînd ecuaţia diferenţială (5) cu condiţia la limită : la $\alpha = 0$, $p = mp_v$ şi ţinînd seama de relaţia (1), se obţine

$$p = \frac{\rho g H}{m}\left[(1 + m^2)e^{\frac{2mf}{b} r\alpha_0} - 1\right], \tag{6}$$

care reprezintă presiunea pe care materialul o exercită asupra paletei amestecătorului.

Variaţia presiunilor care se dezvoltă în materialul pulverulent ca urmare a acţiunii paletei amestecătorului este prezentată calitativ în figura 3.

Forţa care acţionează asupra paletei amestecătorului este :

$$F = \int_{r_1}^{r_2} p \, dA. \tag{7}$$

Ţinînd seama de expresia (6), relaţia (7) devine, după integrare,

$$F = \frac{\rho g H b}{m}\left[\frac{(1 + m^2)b}{2mf\,\alpha_0}\left(e^{\frac{2mf}{b}\alpha_0 r_2} - e^{\frac{2mf}{b}\alpha_0 r_1}\right) - (r_2 - r_1)\right]. \tag{8}$$

Momentul de torsiune rezistent la arborele amestecătorului ca urmare a acţiunii paletei asupra materialului este

$$M = \int_{r_1}^{r_2} rp \, dA. \tag{9}$$

Ținînd seama de expresia (6), relația (9) devine, după realizarea integrării,

$$M = \frac{\rho g H b}{m}\left\{\frac{b(1+m^2)}{2fm\,\alpha_0}\left[\left(r_2 e^{\frac{2fm\alpha_0}{b} r_2} - r_1 e^{\frac{2fm\alpha_0}{b} r_1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{b}{2fm\,\alpha_0}\left(e^{\frac{2fm\alpha_0}{b} r_2} - e^{\frac{2fm\alpha_0}{b} r_1}\right)\right] - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\right\}. \qquad (10)$$

Centrul de aplicație al forței F (punctul în care această forță concentrată acționează asupra paletei) este plasat la raza

$$r_m = \frac{M}{F}, \qquad (11)$$

unde expresiile mărimilor F și M sînt date de relațiile (8), respectiv (10).

Mărimea α_0 care intervine în expresiile (6), (8) și (10) este dată de relația

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{K}, \qquad (12)$$

unde K este numărul de palete în planul orizontal (numărul de palete ale unui nivel (etaj)).

Puterea necesară acționării amestecătorului cu un singur nivel este

$$N = KM\omega, \qquad (13)$$

unde ω este viteza unghiulară a amestecătorului.

În cazul unui amestecător cu mai multe etaje, puterea necesară amestecării se calculează cu relația

$$N_e = \Sigma N_i, \qquad (14)$$

unde N_i este puterea necesară acționării etajului numărul i calculată cu relația (13) în care în expresia momentului de torsiune se introduce înălțimea stratului de material corespunzătoare etajului respectiv.

Relațiile (13) și (14) dau aceleași rezultate ca și relația [1]

$$N_e = K_1 K_2 N, \qquad (15)$$

unde N este puterea necesară etajului inferior considerat ca fiind format din două palete (brațe) diametral opuse, calculată cu relația (13), iar K_1 și K_2 sînt coeficienți stabiliți experimental ale căror valori sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Valori ale coeficienților K_1 și K_2 [1]

Coeficientul	Numărul de palete ale unui etaj			Numărul de etaje		
	2	4	6	1	2	3
	Valorile coeficienților					
K_1	1,0	0,8	0,6	—	—	—
K_2	—	—	—	1,0	1,5	1,8...2,0

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră un amestecător al cărui recipient are volumul total $V_t = 0{,}5$ m^3, gradul de umplere cu material fiind $\varphi_u = 80\%$. Materialul amestecat este nisip cuarțos cu granulația 1,0...2,0 mm având, coeficientul de frecare internă $f = 0{,}6$ și densitatea aparentă (în grămadă) $\rho = 1\,700$ kg/m^3.

Unghiul de frecare internă al materialului este

$$\varphi = \text{arc tg } f = \text{arc tg } 0{,}6 = 30°.$$

Coeficientul de mobilitate al materialului, calculat cu relația (3) este $m = 0{,}33$.

Volumul util al recipientului amestecătorului este

$$V_u = \varphi_u V_t = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4 \text{ m}^3.$$

Considerînd raportul $H/D = 1$, rezultă diametrul recipientului

$$D = \sqrt[3]{\frac{4V_u}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0{,}4}{\pi}} = 0{,}8 \text{ m}.$$

Înălțimea stratului de material din recipient este

$$H = D = 0{,}8 \text{ m}.$$

Anvergura paletelor amestecătorului (diametrul circumferinței care înfășoară capetele paletelor) se consideră $D_p = 0{,}7$ m, iar lățimea paletelor se adoptă $b = 0{,}1$ m, raportul $\frac{H}{b} = \frac{0{,}8}{0{,}1} = 8$ încadrîndu-se în limitele recomandate (vezi punctul 2).

Viteza unghiulară a amestecătorului, corespunzătoare regimului de îndesare a materialului, rezultă ($v = 1$ m/s).

$$\omega = \frac{v}{D/2} = \frac{1}{0{,}7/2} = 2{,}86 \text{ s}^{-1},$$

ceea ce corespunde unei turații $n = 27$ rot/min.

Utilizînd relațiile (10), (13) și (14) și datele din tabelul 1 se calculează puterea necesară acționării amestecătorului în următoarele cazuri:

— amestecător cu un singur etaj $Z = 1$ si cu $K = 2$, respectiv $K = 3$, palete pe nivel;

— amestecător cu două etaje $Z = 2$ și cu $K = 2$, respectiv $K = 3$, palete pe nivel.

Rezultatele calculului sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Valori ale puterilor de acționare calculate cu relațiile stabilite

Numărul de etaje Z	Numărul de palete ale unui etaj K	Puterea calculată kW
1	2	40
	3	36
2	2	60
	3	54

Valorile rezultate din calcul pentru puterea necesară acționării sînt comparabile, ca ordin de mărime, cu valorile de catalog ale unor amestecătoare de construcție similară prezentate în monografia [1].

5. CONCLUZII

În lucrare s-au stabilit relații de calcul pentru mașinile destinate amestecării materialelor pulverulente și granulare, cu dispozitive mecanice de amestecare de tip paletă, lucrînd în regimul de funcționare cu îndesarea materialului. La stabilirea relațiilor s-a ținut seama de caracteristicile fizico-mecanice ale materialului amestecat și de geometria amestecătorului.

S-a avut în vedere atît calculul de rezistență al elementelor amestecătorului (palete, arbore) (relațiile (8), (10), (11)), cît și determinarea puterii necesare acționării amestecătorului (relațiile (10), (13), (14)).

Determinarea puterii necesare acționării amestecătorului care funcționează în regimul de fluidizare a materialului, va face obiectul unei lucrări ulterioare.

Primit la redacție la 4 mai 1987

BIBLIOGRAFIE

1. IU. I. MAKAROV, *Apparati dlia smeșeniia sipucih materialov*, Moskva, Mașinostroenie, 1973.
2. R. L. ZENKOV, *Mehanika nasîpnîh gruzov*, Moskva, Mașinostroenie, 1964.

ASUPRA UNEI PROBLEME NELINIARE DE REZISTENȚA MATERIALELOR

de M. V. SOARE

Institutul de Construcții, București

Fie o bară de secțiune constantă, greutate proprie p (pe unitatea de lungime) și lungime totală l, așezată pe un pat orizontal rigid. Se ridică, cu o forță Q, capătul O al barei. Se cere să se determine lungimea a pe care bara se desprinde de patul rigid și săgeata în O, în două ipoteze: a) se neglijează deformațiile grinzii datorate forței tăietoare; b) deformațiile barei produse de forța tăietoare sînt luate în considerare (fig. 1). Care este soluția cînd lungimea barei este foarte mare ($l \to \infty$)?

Punctul a) al problemei a fost studiat de O. Belluzzi [1], iar punctul b) de V.I. Feodosiev [3] pentru o valoare particulară a încărcării. Unele aspecte neclare ale punerii condițiilor la limită ne-au făcut să reluăm problema sub forma generală.

a) *Neglijarea influenței forței tăietoare.* Fie A punctul în care tronsonul de bară se desprinde de patul rigid, precizat prin abscisa a și B capătul din dreapta al barei.

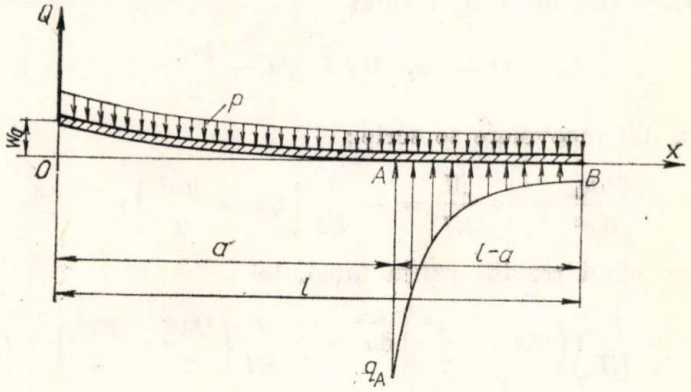


Fig. 1

Tronsonul OA reprezintă o grindă simplu rezemată în O și A; în capătul O momentul încovoietor este nul ($M_0 = 0$), de asemenea el este nul și în A, deoarece curbura fibrei medii deformate — care rămîne dreaptă pe lungimea AB — este nulă. Unghiul θ pe care axa x îl face cu linia OA este

$$\theta \approx \frac{w_0}{a} = \frac{pa^3}{24EI}, \qquad \text{(a)}$$

unde EI reprezintă rigiditatea la încovoiere a barei.

Din relația (a) se deduce lungimea de desprindere a

$$a = \sqrt[4]{\frac{24\,EI\,w_0}{p}}, \tag{b}$$

în ipoteza că deplasarea w_0 este dată (impusă).

Forța Q corespunzătoare ridicării capătului O cu w_0 este

$$Q = \frac{pa}{2} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}\,EIp^3w_0}. \tag{c}$$

Relațiile (b) și (c) pun în evidență neliniaritatea fenomenului.

În A va apare o forță concentrată $Q = pa/2$, fapt explicabil prin neglijarea influenței forței tăietoare.

b) *Luarea în considerare a influenței forței tăietoare.* Vom distinge intervalul OA în care $x \in (0, a)$ și intervalul AB în care $x \in (a, l)$ lungimea a fiind necunoscută.

Expresiile forței tăietoare și momentului încovoietor, în intervalul OA, sînt:

$$T = Q - px, \quad M = Qx - \frac{px^2}{2}; \tag{d}$$

în particular, în secțiunea A, rezultă

$$T_A = Q - pa, \quad M_A = Qa - \frac{pa^2}{2}. \tag{e}$$

Curbura din încovoiere se scrie:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_M}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(Qx - \frac{px^2}{2}\right);$$

prin integrare odată rezultă panta tangentei

$$\frac{\mathrm{d}w_M}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{EI}\int\left(Qx - \frac{px^2}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Qx^2}{2} - \frac{px^3}{6}\right) + C_1,$$

în care C_1 este o constantă de integrare.

Panta tangentei datorită lunecării se scrie direct:

$$\frac{\mathrm{d}w_T}{\mathrm{d}x} = \frac{kT}{GA} = \frac{k}{GA}(Q - px),$$

în care k este un coeficient care ține seama de distribuția neuniformă a lunecărilor pe înălțimea secțiunii, iar GA este rigiditatea la lunecare a barei.

Însumînd cele două pante rezultă

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Qx^2}{2} - \frac{px^3}{6}\right) + \frac{k}{GA}(Q - px) + C_1, \tag{f}$$

iar prin integrare se obține expresia săgeții :

$$w = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{px^4}{24}\right) + \frac{k}{GA}\left(Qx - \frac{px^2}{2}\right) + C_1 x + C_2, \qquad (g)$$

unde C_2 este o a doua constantă de integrare.

C_1 și C_2 se determină exprimînd că panta tangentei și săgeata în A sînt nule :

$$C_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{Qa^2}{2} - \frac{pa^3}{6}\right) - \frac{k}{GA}(Q - pa),$$

$$C_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{Qa^3}{6} - \frac{pa^4}{24} - \frac{Qa^3}{2} + \frac{pa^4}{6}\right) - \frac{kpa^2}{2GA}.$$

Ducînd cele două constante în (g), rezultă expresia finală a săgeții pe intervalul OA :

$$w = \frac{1}{EI}\left[\frac{Q}{6}(a^3 - x^3) - \frac{Qa^2}{2}(a - x) - \frac{p}{24}(a^4 - x^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{pa^3}{6}(a - x)\right] + \frac{kp}{GA}(a - x)^2. \qquad (h)$$

Vom trece, mai departe, la intervalul AB. Patul rigid va exercita asupra barei o încărcare distribuită $q(x)$, a cărei intensitate urmează s-o determinăm. Ținînd seama de sensurile încărcărilor p și $q(x)$ se poate scrie relația diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -p + q(x). \qquad (i)$$

Curbura din moment este

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_M}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI}.$$

și analog aceea datorită forței tăietoare

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_T}{\mathrm{d}x^2} = \frac{k}{GA}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{GA}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2}.$$

Prin însumare se obține curbura totală

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{k}{GA}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2}. \qquad (j)$$

Însă, deoarece porțiunea AB rămîne dreaptă, curbura trebuie să fie nulă. Introducînd notația

$$\alpha^2 = \frac{GA}{kEI} \qquad (k)$$

din (j) rezultă ecuația diferențială care determină momentul încovoietor M,

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \alpha^2 M = 0. \tag{l}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (1) este

$$M = C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x. \tag{m}$$

Constantele de integrare C_3 și C_4 se determină din condițiile

— pentru $x = a \rightarrow M = M_A = Qa - \frac{pa^2}{2}$ (conform (e)),

— pentru $x = l \rightarrow M = M_B = 0$.

Rezultă ușor expresiile

$$C_3 = -\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{\operatorname{ch} \alpha l}{\operatorname{sh} \alpha(l-a)}, \quad C_4 = +\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{sh\alpha l}{\operatorname{sh} \alpha(l-a)},$$

iar expresia finală a momentului încovoietor pe intervalul AB este :

$$M = \left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{\operatorname{sh} \alpha(l-x)}{\operatorname{sh} \alpha(l-a)}; \tag{n}$$

ea respectă condiția de continuitate de ordonată a momentului încovoietor în secțiunea A.

Prin derivarea lui M rezultă forța tăietoare T

$$T = -\alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{\operatorname{ch} \alpha(l-x)}{\operatorname{sh} \alpha(l-a)}, \tag{o}$$

care în secțiunea A are valoarea

$$T_A = -\alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\operatorname{cth} \alpha(l-a). \tag{p}$$

Exprimînd continuitatea forței tăietoare din cele două intervale, în secțiunea A, adică egalînd expresiile date de (e) și (p), rezultă ecuația transcendentă care determină abscisa a :

$$Q - pa + \alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\operatorname{cth} \alpha(l-a) = 0. \tag{q}$$

La capătul B rezultă forța tăietoare

$$T_B = -\alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha(l-a)}.$$

Se vede deci că deformațiile din lunecare perturbă distribuția reacțiunii patului rigid nu numai în zona de tranziție, dar și la capătul B unde apare forța concentrată T_B [3] ; T_B apare datorită imposibilității satisfacerii tuturor condițiilor la limită în baza ipotezelor rezistenței materialelor. În fapt, așa cum se va vedea la aplicația numerică, valoarea lui T_B este neglijabil de mică.

Presupunînd determinată abscisa a, săgeata în origine (în dreptul forței Q) se obține din (h), făcînd $x = 0$:

$$w_0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Qa^3}{3} + \frac{pa^4}{8}\right) + \frac{kpa^2}{GA}. \tag{r}$$

În (r) se recunoaște săgeata unei console de deschidere a, sub acțiunea unei forțe concentrate Q și a unei încărcări uniform distribuite p. Semnul minus indică săgeată în sus.

Pentru ca săgeata w_0 să fie în sus (negativă), între Q și p va trebui să existe inegalitatea

$$Q > \frac{3}{8} pa\left(1 + \frac{8}{\alpha^2 a^2}\right). \tag{s}$$

Reacțiunea patului rigid rezultă din (l) :

$$q(x) = p + \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} \tag{t}$$

sau, ținînd seama de (l) și de soluția (n) ;

$$q(x) = p + \alpha^2 M = p + \alpha^2\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha(l-x)}{\operatorname{sh}\alpha(l-a)}, \tag{u}$$

În secțiunea A reacțiunea are intensitatea

$$q_A = p + \alpha^2\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right), \tag{v}$$

iar la capătul B avem $q_B = p$.

Rămîne să mai controlăm condiția de echilibru global

$$Q - pl + \int_a^l q(x)\,\mathrm{d}x - T_B = 0.$$

Ținînd seama de (t), relația precedentă se scrie

$$Q - pl + \int_a^l \left(p + \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x - T_B = Q - pl + p(l-a) + (T_B - T_A) - T_B \equiv 0.$$

Revenind la rezolvarea ecuației transcendente (q) aceasta se face prin încercări. Se poate indica următoarea soluție asimptotică : cînd $\alpha(l-a) > 8{,}4$ — ceea ce este uzual — se poate face aproximația $\operatorname{cth}\alpha(l-a) \approx 1$.

Ecuația (q) se reduce atunci la forma

$$Q - pa + \alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) = 0 ;$$

ordonînd convenabil termenii, se ajunge la ecuația de gradul al doilea

$$a^2 + 2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{Q}{p}\right)a - \frac{2Q}{p\alpha} = 0,$$

cu rădăcina pozitivă convenabilă

$$a = -\frac{1}{\alpha} + \frac{Q}{p} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{Q^2}{p^2}}, \qquad (w)$$

cu condiția $a \in (0, l)$.

Aplicație numerică. Fie $Q = pl/3$ și $\alpha l = 50$.

Din (w) rezultă $a = 0{,}6473l$.

Condiția (s) este satisfăcută rezultînd inegalitatea

$$\frac{pl}{3} > \frac{3}{8}p \cdot 0{,}6473\, l\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{50}{l}\right)^2 \cdot (0{,}6473l)^2}\right]$$

sau $1 > 0{,}7338$.

Săgeata în dreptul forței Q rezultă din relația (r) :

$$w_0 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{pl}{3} \cdot \frac{(0{,}6473l)^3}{3} + \frac{p(0{,}6473l)^4}{8} - p(0{,}6473l)^2\left(\frac{l}{50}\right)^2\right] =$$

$$= -\,0{,}0080228\,\frac{pl^4}{EI}.$$

Momentul încovoietor și forța tăietoare în secțiunea A sînt :

$$M_A = \frac{pl}{3} \cdot 0{,}6473\, l - \frac{p}{2}(0{,}6473\, l)^2 = 0{,}006268\, pl^2,$$

$$T_A = \frac{pl}{3} - p \cdot 0{,}6473\, l = -\,0{,}3140\, pl,$$

iar forța concentrată în B rezultă

$$T_B = -\frac{50}{l}\left[\frac{pl}{3} \cdot 0{,}6473\, l - \frac{p}{2}(0{,}6473l)^2\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{50}{l}(l - 0{,}6473l)} =$$

$$= -\,1{,}375 \times 10^{-8}\, pl;$$

ea este practic neglijabilă.

Să mai evaluăm lungimea de desprindere a pentru cazul cînd se neglijează efectul forței tăietoare.

Plecînd de la valoarea $w_0 = 0{,}0080228\,\frac{pl^4}{EI}$ (luată în valoare absolută deoarece a fost stabilită pe cale geometrică), din relația (b) se deduce

$$a = \sqrt[4]{\frac{24EI}{p} \cdot 0{,}0080228\,\frac{pl^4}{EI}} = 0{,}6624\, l$$

care diferă cu numai 2,34% de valoarea stabilită cu luarea în considerare a forței tăietoare.

Intensitatea reacțiunii în A se determină cu ajutorul relației (v):

$$q_A = p + \left(\frac{50}{l}\right)^2 \cdot \left[\frac{pl}{3} \cdot 0{,}6473\, l - \frac{p}{2}(0{,}6473l)^2\right] = 16{,}67p.$$

Pentru valori mai mari ale lui αl, q_A crește și, la limită (cînd $GA \to \infty$), se va produce o forță concentrată în A.

Cazul barei de lungime infinită. Soluția pentru intervalul OA rămîne neschimbată. Pentru intervalul AB, soluția (m) va fi scrisă sub forma

$$M = C_3 e^{-\alpha x} + C_4 e^{+\alpha x}, \tag{m'}$$

cu condițiile la limită

— pentru $x = a \to M = M_A = Qa - \frac{pa^2}{2}$,

— pentru $x \to \infty \to M = M_B = 0$.

Rezultă ușor valorile $C_3 = Qa - \frac{pa^2}{2}$, $C_4 = 0$, iar expresia finală a momentului încovoietor pe intervalul AB este

$$M = \left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha x}. \tag{n'}$$

Prin derivarea lui M rezultă forța tăietoare:

$$T = -\alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha x}; \tag{o'}$$

în secțiunea A avem

$$T_A = -\alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha a}. \tag{p'}$$

Exprimînd continuitatea forței tăietoare în A, cînd se trece de la intervalul OA la AB, rezultă ecuația transcendentă care determină abscisa a:

$$Q - pa + \alpha\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha a} = 0. \tag{q'}$$

Reacțiunea patului rigid rezultă

$$q(x) = p + \alpha^2\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha a};$$

în A ea are intensitatea

$$q_A = p + \alpha^2\left(Qa - \frac{pa^2}{2}\right) e^{-\alpha a}$$

și descrește asimptotic către p.

Se mai observă că $T_B = 0$ cînd $l \to \infty$.

O valoare asimptotică a lui a rezultă din (q'), dacă $\alpha a > 10$; atunci se obține expresia simplă

$$a = \frac{Q}{p}. \qquad (w')$$

Primit la redacție la 3 septembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. O. BELLUZZI, *Scienza delle costruzioni*, 3 vol., Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1954.
2. C. BIA, V. ILLE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. V. I. FEODOSYEV, *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*, Mir Publishers, Moscow, 1977.
4. M. M. FILONENKO-BORODICI ș.a., *Curs de Rezistența materialelor* (Trad. din l. rusă), Edit. Tehnică, București, vol. I 1951, vol. II 1952.

J. E. LENZ (sub red.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Simulation in Manufacturing. 24—26 june 1986 Chicago, USA* (Lucrările celei de-a doua Conferințe internaționale asupra simulării în fabricație) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo, 1986, 264 p.

Volumul conține un număr de 24 articole comunicate la cea de-a doua Conferință internațională „Simulare în fabricație" SIM-2, care a avut loc la Chicago, S.U.A., în zilele de 24—26 iunie 1986.

Volumul este organizat în șase capitole pe teme și unul conținînd articole întîrziate.

Primul capitol este consacrat noilor tehnologii în simulare și conține șase articole, la care se pot adăuga și cele două articole întîrziate". Se prezintă rezultatele unor cercetări referitoare la simularea (modelarea) sistemelor de fabricație flexibilă (FMS), a sistemelor de fabricație integrate cu calculatorul (CIM). Un interes deosebit merită acordat celor trei articole care discută implicațiile inteligenței artificiale în simularea funcționării sistemelor de fabricație.

Cel de-al doilea capitol, conținînd trei articole, se referă la rolul simulării în proiectarea sistemelor de fabricație. Se remarcă exemplele prezentate privind proiectarea unui sistem flexibil de asamblare și privind modelarea fluxului materialelor metalice într-un sistem de fabricație de înaltă precizie.

Capitolul al 3-lea, conținînd trei articole, se referă la simularea în sistemele de comandă-control. Merită cîte o mențione specială studiul prezentat de J.M. Granier referitor la implementarea unui nou sistem de proiectare asistată la calculator într-un sistem existent de fabricație asistată de calculator și articolul prezentat de un grup de cercetători de la Universitatea Waterloo, Canada despre planificarea prin simulare (modelare) a spațiului de depozitare într-un sistem de fabricație „just-in-time" (deci o fabricație concepută astfel încît materialele, semifabricatele și piesele să sosească la locul de prelucrare, respectiv de montaj chiar în momentul începerii prelucrării, respectiv montajului).

Capitolul al 4-lea, cu patru lucrări, se referă la utilizarea simulării în atelier. Se prezintă modul de utilizare a simulării pentru stabilirea programului de producție, respectiv controlul îndeplinirii acestui program. Interesant este studiul de caz prezentat de un grup de cercetători de la IPA Stuttgart referitor la utilizarea simulării pentru planificarea asamblării finale într-o fabrică de autoturisme din RFG.

Capitolul al 5-lea se ocupă de simularea ca suport pentru decizii ale conducerii întreprinderii; conține trei articole.

Capitolul al 6-lea se referă la evaluarea unor procese de fabricație utilizînd simularea. Cele trei articole se ocupă de compararea modelării convenționale cu simularea interactivă vizuală, bazată pe furnizarea de date, utilizarea simulării în proiectarea funcționării unui sistem de fabricație flexibilă și simularea unui proces de fabricație a semiconductorilor prin litografie.

Volumul se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii, respectiv a organizării și planificării întreprinderilor industriale.

Articolele sînt semnate de 51 autori din S.U.A., Canada, Marea Britanie, R.F.G., Franța, Italia, Belgia, Danemarca, Irlanda și India.

F. Kovács

H. VAN BRUSSEL (sub red.), *Proceedings of the 16th International Symposium on Industrial Robots and of the 8th International Conference on Industrial Robot Technology, 30 September — 20 October 1986, Brussels, Belgium* (Lucrările celui de al 16-lea Simpozion internațional despre roboți industriali și a celei de a 8-a Conferință despre procese tehnologice folosind roboți industriali), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986, 1194 p., 500 fig.

Volumul conține un număr de 108 articole prezentate la ediția din 1986 a Simpozionului internațional despre roboți industriali, manifestare științifică de înalt prestigiu care se desfășoară anual împreună cu Conferința despre procese tehnologice folosind roboți industriali.

Volumul este organizat în 23 capitole, dintre care 22 cu teme bine definite, iar ultimul rezervat lucrărilor întîrziate.

Primul capitol este consacrat şedinţei de deschidere. Conţine trei comunicări. Prima dintre acestea are ca autor pe editorul volumului, prof. H. von Brussel şi se ocupă de starea de dezvoltare a roboticii în lume în anul 1986. În celelalte două comunicări profesorul H. Tanaka prezintă impactul robotizării asupra structurii industriale a Japoniei, iar A. Lafaille se ocupă de o privire generală şi tendinţele de dezvoltare ale roboticii în Franţa.

Două capitole sînt consacrate proiectării roboţilor în ansamblu iar unul, motoarelor de acţionare, sistemelor compliante şi efectorilor finali (dispozitivelor de prehensiune). Cel 15 articole ale capitolelor menţionate mai sus se ocupă între altele de concepţia construcţiei modulare a sistemelor mecanice ale roboţilor industriali, cercetări asupra rigidităţii şi complianţei dispozitivelor de ghidare, optimizarea structurilor mecanice ale roboţilor industriali ţinînd seama de puterea sistemului de acţionare, construcţia unor dispozitive de prehensiune pentru aplicaţii speciale (spre exemplu manipularea unor stofe).

Două capitole ale volumului sînt consacrate cinematicii şi dinamicii roboţilor industriali, cuprinzînd 11 articole. Ele tratează între altele analiza spaţiului de lucru utilizînd elemente de geometrie diferenţială, folosirea modelelor directe şi inverse în analiza cinematică, dinamică şi simularea sistemelor mecanice ale roboţilor industriali, analiza vibraţiei braţului de robot, metode de compensare dinamică a erorilor.

Trei capitole sînt consacrate sistemelor de senzori, respectiv comenzi bazate pe senzori, conţinînd 13 articole. Sînt tratate probleme ale construcţiei şi funcţionării senzorilor video, construcţiei senzorilor ultrasonori şi utilizarea acestora în detectarea obstacolelor tridimensionale la roboţi mobili, construcţia senzorilor tactili şi tip ,,piele artificială" bazată pe fenomene de magnetoinducţie, senzori de alunecare bazaţi pe lumină reflectată, asamblare robotizată folosind dispozitiv de complianţă activă, înzestrat cu senzori şi altele.

Două capitole ale volumului, conţinînd zece articole, sînt consacrate comenzii — controlului roboţilor industriali. O parte din articole se referă la comanda unor sisteme de roboţi industriali se abordează — între altele — studiul condiţiilor de compatibilitate a unor componente livrate de diferite firme (aşa-zisul MAP) Interesante sînt de asemenea articolele care tratează sistemele de comandă adaptive şi cele care realizează compensarea numerică a erorilor în funcţionare a roboţilor industriali.

O parte importantă a volumului se referă la aplicaţii industriale ale roboţilor în sisteme de producţie integrate. Asemenea probleme sînt încadrate în patru capitole, cuprinzînd 18 articole (un articol în plus se găseşte în capitolul cu articole întîrziate). Sînt prezentate aplicaţii în domeniul sudării (în puncte şi cu arc, folosind senzori de rost), inclusiv a unor construcţii metalice terestre şi navale de mari dimensiuni, în domeniul tăierii cu plasmă, a curăţirii pieselor turnate, a montajului, a controlului şi inspecţiei. Un interes deosebit prezintă aplicaţiile neconvenţionale trecute în revistă : utilizarea roboţilor în industria textilă, în industria încălţămintelor, în construcţii (spre exemplu vehicul robotic cu ,,picioare" magnetice sau vacumatice pentru pereţi verticali).

Două capitole ale volumului (11 articole) sînt consacrate programării şi simulării funcţionării roboţilor industriali. Se prezintă diferite software de programare a roboţilor, simularea pe calculator a funcţionării roboţilor şi a celulelor flexibile respectiv folosind terminale grafice de înaltă performanţă.

Un capitol cu cinci articole se referă la testarea performantelor şi la măsuri de protecţie a roboţilor industriali, iar altul, tot cu cinci articole la aşa-zişii ,,factori umani" : impactul robotizării asupra forţei de muncă, protecţia muncitorilor în zonele de lucru ale roboţilor industriali, proiectarea ergonomică a locurilor de muncă robotizate.

Un capitol cu trei articole (şi un articol din capitolul de ,,Articole întîrziate") se referă la consideraţii economice şi strategice. Sînt prezentate cercetări privind justificarea economică a robotizării proceselor tehnologice şi strategia de dezvoltare a robotizării în ţările Pieţii Comune şi într-o economie de dimensiuni reduse.

În sfîrşit, un capitol cu opt articole se referă la probleme de învăţămînt şi antrenament în domeniul roboticii, cu referiri la situaţia din Regatul Unit, Austria, Belgia şi Canada.

Volumul este o reprezentativă şi semnificativă trecere în revistă a stadiului atins în cercetările privind construcţia roboţilor, fabricaţia acestora şi utilizarea lor în aplicaţii industriale.

Se adresează cercetătorilor care lucrează în domeniul roboticii. Articolele sînt rezumate de 246 autori, dintre care 22 din ţări socialiste (U.R.S.S., China şi R.P. Polonă, Jugoslavia).

F. Kovács

FRIEDAL HARTMANN, *Methode der Randelemente. Boundary Elements in der Mechanik auf dem PC* (Metoda elementelor de frontieră în mecanică, pe calculatorul personal), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 378 pag., 159 fig., 367 indic. bibl.

Cartea de față ocupă un loc aparte în literatura privind metoda elementelor de frontieră (MEFR), reprezentînd o introducere orientată spre aspectele practice ale utilizării ei în probleme de mecanica corpurilor solide. Sînt prezentate trei programe (pentru membrane, șaibe și dale), oferite de discuri flexibile. Pentru rularea lor se necesită un microcalculator compatibil IBM de 640 KO, cu disc de masă și coprocesor 8087.

După o scurtă expunere a metodei și a avantajelor și dezavantajelor ei comparativ cu alte metode numerice în introducerea cărții, primul capitol tratează bazele MEFR atît din punct de vedere matematic, cît și ingineresc, punînd în evidență legătura între acestea. Apare clar originea comună a metodei elementelor finite (MEF) și a MEFR, cît și aspectul universal al funcțiilor de influență ce intervin la formularea curentă a celei de a doua. Acest capitol poate fi sărit la o primă lectură de către cei interesați mai mult de aplicații practice. Capitolul al 2-lea se referă la elemente unidimensionale de tip bară solicitată axial și grindă supusă la încovoiere. Se arată că principiul deplasărilor virtuale, al forțelor virtuale și cel al lui Betti derivă din identitățile Green, astfel încît metodele numerice utilizate au aceeași rădăcină.

Membrana elastică este studiată în capitolul al 3-lea. După o prezentare intuitivă a rezolvării cu MEF și MEFR se arată detaliat cum cu ajutorul unei soluții fundamentale și a teoremei Betti, se deduc funcțiile de influență pentru săgeți. Drept exemplu de calcul se tratează problema torsiunii, a distribuției temperaturii și a mișcării browniene. Capitolul se încheie cu prezentarea generală a celor trei programe și cu descrierea detaliată a utilizării programului BE-LAPLACE. Capitolul al 4-lea se ocupă de problemele clasice ale teoriei elasticității, calculul șaibelor și al corpurilor elastice, cuprinzînd și cazul domeniilor infinite și zvelte, cazul singularităților și al forțelor concentrate. Exemplele de calcul se referă la grinzi cu diferite goluri și la un resort. În încheiere se descrie utilizarea programului BE-PLATES pentru calculul șaibelor.

Problemele neliniare sînt tratate în capitolul al -5-lea. Pe lîngă necunoscutele primare (deplasări și forțe pe frontieră) al căror număr determină mărimea sistemului de ecuații apar și necunoscute secundare (deformații și tensiuni plastice în interior), rezolvarea necesitînd un calcul iterativ. Capitolul al 6-lea se ocupă de calculul plăcilor pe baza teoriei lui Kirchhoff, referindu-se și la rezemări pe stîlpi, încărcări parțiale, singularități, suprafețe de influență, cît și la rezemarea pe mediu elastic și la voalare. Teoria este aplicată la calculul unor plăci dreptunghiulare și oblice, izolate și continue respectiv rezemate pe stîlpi. Programul utilizat și descris este BE-PLATE BENDING. „Mariajul la modă „elemente finite — elemente de frontieră este prezentat pe scurt în capitolul al 7-lea, discutîndu-se mai multe variante de formare a matricelor caracteristice.

Ultimele două capitole tratează probleme de vibrații : după oscilațiile armonice ale barelor, grinzilor, șaibelor, plăcilor și corpurilor elastice se prezintă probleme tranzitorii.

Ca și în cartea sa anterioară „The Mathematical Fondations of Structural Mechanics", autorul a reușit o prezentare foarte clară a aspectelor matematice și inginerești ale problemelor studiate. Pune un accent deosebit pe compararea MEFR cu MEF și insistă asupra realizării numerice a primei metode. Prin urmare studiul cărții nu asigură doar însușirea temeinică a MEFR ci și dobîndirea unei priviri de ansamblu foarte utile asupra metodelor numerice moderne.

R. Friedrich

KONRAD ZUSE, *Der Computer. Mein Lebenswerk* (Calculatorul. Opera vieții mele), Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1984, 218 p., 78 fig., 42 indic. bibl.

Profesorul Konrad Zuse a realizat în 1941 — sub denumirea Z3 — primul calculator programabil complet automatizat, lucrînd în sistemul binar cu virgulă mobilă. Acest lucru este bine cunoscut azi, după ce, mult timp, calculatorul MARK1 al lui H. Aiken a fost considerat primul din lume.

Cartea de față cuprinde o istorie a calculatorului, în viziunea renumitului inventator, precedată de o scurtă autobiografie. Născut la Berlin în 1910, Zuse a urmat școala elementară și medie în provincie. S-a remarcat prin talent la desen și matematici și prin performanțe în realizarea unor dispozitive și instalații mecanice, participînd cu succes la concursurile firmelor

de jucării din piese metalice asamblate. Mediul industrial în care a crescut l-a determinat să opteze pentru studiul ingineriei la Politehnica din Berlin—Charlottenburg. După un an de construcții de mașini a trecut la arhitectură, hotărîndu-se în sfîrșit pentru studiul construcțiilor, apreciind că răspunde cel mai bine aptitudinilor sale tehnice și artistice. În cadrul activității practice obligatorii a lucrat în meseriile de zidar, dulgher, faur și podar. După o întrerupere de un an în care a încercat să se formeze ca pictor de reclame s-a întors la facultate obținînd diploma de inginer constructor în 1934. În timpul studiilor s-a ocupat de diferite cercetări proprii legate de probleme de circulație urbană, de automatizare a operațiilor fotografice, de proiecții cinematografice și de conceperea unor săli de cinematograf cu vizibilitate optimă, de problema automatelor de mărfuri cu restituirea restului și de probleme ale cuceririi spațiului cosmic. De asemenea, a participat activ la viața cultural-artistică studențească.

Activitatea profesională a început-o ca statician într-o firmă de construcția avioanelor. Cum încă în timpul studiilor a fost nemulțumit de faptul că inginerul constructor trebuie să consume mult timp cu calcule numerice plicticoase a hotărît să construiască mijloace de calcul automat, fără a avea experiență în acest domeniu. A renunțat chiar la post și cu ajutorul familiei și al unor colegi de liceu și facultate a început să construiască calculatoare mecanice și electromecanice. În 1941 reușește să termine calculatorul Z3 ce s-a dovedit mai tîrziu a fi fost primul calculator programabil complet automatizat. El a dispus de 2000 relee electromagnetice, a lucrat în sistem binar cu virgulă mobilă, memoria a avut capacitatea de 64 cuvinte de cîte 22 bits, și a fost comandat prin benzi perforate. Fiind distrus în timpul bombardamentelor din 1944, a fost reconstruit în 1960 pentru muzeul tehnic din München. Concentrat și determinat să lucreze din nou în industria aeronautică, Zuse a conceput și realizat un calculator de proces pentru corectarea abaterilor dimensionale ale unor subansambluri. Pe lîngă activitatea practică a întreprins și studii teoretice, sistematizate într-o teză de doctorat „Elemente ale unei teorii a calculului general", ce nu a putut fi însă susținută. A avut curajul să înființeze o firmă proprie, la început cu doar doi angajați, sfîrșitul războiului suprinzîndu-l lucrînd la calculatorul perfecționat Z4, de care nu se desparte nici în peregrinările după evacuarea din Berlin în 1944. În timpul refugiului în sudul Germaniei reia studiile teoretice punînd bazele unui limbaj general de programare și dezvoltînd ideea „spațiului calculator", ce interpretează spațiul cosmic ca fiind un calculator gigant.

După război, Zuse a înființat o nouă firmă și termină în 1949 calculatorul Z4, utilizat cu mare succes la Școala Tehnică Superioară din Zürich. Următoarele calculatoare concepute și fabricate sub conducerea lui Zuse au fost utilizate mai ales în industria optică, pentru lucrări topografice și geodezice, Încercări de a introduce calculatoarele în medicină și în industria textilă s-au dovedit premature. Începînd din 1955 firma Zuse a construit calculatoare electronice, la început cu tuburi și apoi cu tranzistori. Au fost realizate și calculatoare de proces pentru industria siderurgică cît și dispozitive de desen automat. După preluarea firmei sale de către un concern, Zuse devine din nou liber pentru cercetări științifice, preocupîndu-se de trei grupe de probleme originale, actuale și astăzi : limbajul algoritmic general, spațiul calculator și sistemele autoreproducătoare. Este onorat cu titluri științifice, ordine și medalii în R.F.G., cît și în R.D.G., Austria, Belgia și S.U.A.

Prodigioasa activitate științifică a profesorului Zuse a fost dublată de transpunerea ideilor sale în practică, pe risc propriu, rezultînd calculatoare ce au reprezentat premiere și realizări de vîrf în domeniu. Acest lucru nu a putut fi realizat fără inspirație, dar nu miraculoasă ci ca rezultat al unei munci asidue, confirmîndu-se părerea lui Edison că inventarea se compune din 1% inspirație și 99% transpirație. Cartea marelui inventator se adresează unui cerc larg de cititori interesați (cuprinzînd însă și șase anexe științifice pentru specialiști), punînd în evidență căutările, succesele și insuccesele unei vieți puse în slujba calculatoarelor.

R. Friedrich

M. POPESCU, D. ARSENIE, *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidroelectrice și stații de pompare*, Editura Tehnică, București, 1987, 350 p., 180 fig.

Lucrarea în forma prezentată de autori constituie un manual de referință în literatura tehnică românească, încă de la prima ediție, datorită importanței domeniului calculelor hidraulice pentru amenajările hidroelectrice și stațiile de pompare, elaborat în contextul cerinței modernizării activității de construcții hidrotehnice. Problematica studiată este dezvoltată atît teoretic, la înalt nivel științific, cu numeroase aspecte originale, cît și aplicativ cu exemple

practice foarte diverse, de un real folos în proiectare, pentru alegerea schemelor hidraulice optime din punct de vedere tehnico-funcțional.

Autorii au tratat, în mod deliberat, metodele de calcul hidraulic, în strînsă legătură atît cu rezultatele experimentale, obținute pe instalații de laborator sau în natură, cît și cu soluțiile practice aplicate la proiectarea unor instalații din țara noastră.

Domeniul asupra căruia se axează lucrarea este cel al mișcărilor nepermanente în sistemele hidraulice sub presiune ale centralelor hidroelectrice și stațiilor de pompare, extinzîndu-se de la șocul hidraulic la fenomenele de rezonanță și domeniul intermediar, între mișcările rapid variabile și lent variabile.

Cartea are la bază experiența autorilor de peste 20 de ani de activitate continuă în acest domeniu.

Tratarea unitară a unor metode de calcul și soluții tehnice privind funcționarea și concepția schemelor hidraulice ale uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare a permis autorilor tratarea complexă și sistematică atît a problemelor teoretice și aplicative, cît și promovarea unor soluții și scheme hidraulice moderne aplicabile ambelor tipuri de lucrări.

Lucrarea, care, în concepția autorilor, se adresează în egală măsură inginerilor din domeniul proiectării, execuției și exploatării, cît și specialiștilor din cercetare și cadrelor didactice din învățămînt, sau poate veni în ajutorul studenților din învățămîntul hidrotehnic, hidroenergetic și de îmbunătățiri funciare care doresc să ia contact cu problemele de calcul hidraulic și soluții specifice domeniului, cuprinde nouă capitole.

Capitolele 1, 2, și 3 dezvoltă problemele legate de calculul șocului hidraulic (lovitura de berbec) și sistemelor de protecție a stațiilor de pompare. Se remarcă introducerea noțiunii de sensibilitate la șoc hidraulic a conductei gravitaționale, definită prin raportul dintre variația maximă a presiunii și presiunea de regim, propunîndu-se, funcție de valoarea obținută, alegerea tipului de vană și modul de manevră.

Se prezintă o instalație de laborator care permite studiul experimental al tipurilor de mișcări nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune întîlnite în practică, în domeniul hidrotehnic, precum și un sistem de protecție a stațiilor de pompare de mare performanță care folosește efectul rezistenței hidraulice asimetrice.

Sfîrșitul capitolului al 3-lea redă sistematic principalele caracteristici ale sistemelor de protecție la 70 de stații de pompare din țara noastră.

Capitolul al 4-lea abordează problemele legate de rezonanța hidraulică la centralele hidroelectrice și la stațiile de pompare, introducîndu-se noțiunea de sensibilitate la rezonanță. Se prezintă metode de calcul și exemple pentru schemele hidraulice prioritare, simple sau complexe, utilizate în practică. Se impune pledoaria pentru strategia de abordare a problemei prin calcule de rezonanță cuplate cu măsuri practice de supraveghere în exploatarea sistemelor hidraulice sensibile la rezonanță.

Din capitolele 5, 6 și 7, care tratează problemele legate de calculul și studiul experimental al oscilațiilor în masă din sistemele hidraulice sub presiune, se remarcă metodele analitice și numerice de analiză a stabilității hidraulice în funcționarea uzinelor hidroelectrice prevăzute cu castele de echilibru. Aplicațiile de calcul și studiile experimentale se referă la uzine hidroelectrice din țara noastră, în prezent în exploatare. Impune diversitatea schemelor imaginate și analizate de autori.

Capitolul al 8-lea tratează problema funcționării uzinelor hidroelectrice în timpul regimurilor hidraulice tranzitorii. Se remarcă metodele analitice și numerice propuse și folosite, concepe-rea unor scheme complexe pentru analiză. Se fac aplicații la o serie de uzine hidroelectrice importante din țara noastră : U.H. Lotru, U.H. Tismana, U.H. Rîul Mare-Retezat, Stația de pompare Rașova-Vederoasa.

Într-un paragraf special, se tratează cazul uzinei hidroelectrice cu acumulare prin pompaj.

Ultimul capitol (9), studiază, prin metode de calcul, și metode experimentale, categoria specială de mișcări nepermanente situată în domeniul intermediar, între mișcările rapide și lente din sistemele hidraulice sub presiune. Acest tip de mișcări nepermanente, definit de autori în domeniul intermediar (DI), se caracterizează prin faptul că este influențat atît de elasticitatea lichidului și a pereților conductei (mișcări rapid variabile) cît și de transportul de masă al apei (mișcări lent variabile). În sistemul hidraulic cu castel de echilibru, asemenea mișcări pot fi generate prin variația rezistenței hidraulice locale de la baza castelului (diafragma) sau a volumului pernei de aer în sistemul hidraulic cu rezervor de aer (stații de pompare).

Se propune un model matematic care descrie mișcarea nepermanentă a apei din conducte prin ecuații liniare cu derivate parțiale, castelul și rezervorul intervenind în condițiile de limită. Metoda analitică bazată pe dezvoltări asimptotice s-a dovedit capabilă să furnizeze concluzii concordante cu rezultatele experimentale.

Bibliografia prezentată la fiecare capitol este bogată și diversificată și cuprinde, în afara cercetărilor autorilor: articole, cărți, documentații ale autorilor și laboratoarelor de marcă în domeniu.

Stilul de redactare este clar și unitar.

Expunerea este concisă și riguros sistematizată, relevîndu-se înaltul nivel științific al bazelor teoretice și caracterul aplicativ.

Lucrarea este deosebit de utilă unui cerc larg de specialiști care activează sau se perfecționează în domeniul amenajărilor hidroelectrice și stațiilor de pompare.

A. Stănucă

PÁL CSONKA, *Theory and Practice of Membrane Shells* (Teoria și practica plăcilor curbe subțiri cu comportare de membrană), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987, 726 p., 567 fig., 429 referințe bibliografice.

Cartea de față reprezintă o versiune engleză ușor prescurtată a cărții Héjszerkezetek Structuri din plăci curbe subțiri) apărută în limba maghiară în anul 1981, editată de Editura Academiei de științe ungare din Budapesta. Autorul, astăzi nonagenar, este o autoritate în materie și studiile sale au apărut pe parcursul a peste patru decenii în cele mai variate publicații de circulație internațională.

Plecînd de la premisa că teoria plăcilor curbe subțiri este deosebit de complicată și necesită un aparat matematic care nu este totdeauna accesibil inginerului proiectant, preocuparea constantă a autorului a fost de a dezvolta o metodă aproximativă, în măsură să ia în considerare principalele caracteristici ale structurii și care să dea o imagine apropiată a stării de eforturi. Cea mai simplă metodă, bazată pe neglijarea rigidității la încovoiere a plăcii curbe subțiri, este bazată pe teoria de membrană.

Cartea, deși bazată pe o extrem de bogată bibliografie, poate fi privită ca o sinteză a activității profesorului Csonka în acest domeniu. Ea cuprinde 16 capitole ale căror titluri ne mărginim să le enumerăm.

1. Introducere. 2. Plăci subțiri de rotație. 3. Plăci subțiri cilindrice. 4. Plăci curbe subțiri de formă oarecare. 5. Plăci curbe subțiri pe contur triunghiular. 6. Plăci curbe subțiri pe contur dreptunghiular. 7. Plăci curbe subțiri diagonale (plăci de translație pe contur paralelor gram și ale căror curbe directoare sînt situate în plane perpendiculare pe planul conturului și trec prin diagonalele acestuia. 8. Plăci subțiri conoidale. 9. Paraboloizi hiperbolici. 10. Plăci sectoriale (denumite și plăci intersectate). 11. Plăci curbe subțiri poligonale. 12. Plăci curbe subțiri rezemate punctual. 13. Plăci curbe subțiri stelate (conturul este un poligon regulat cu laturi curbe concave). 14. Plăci curbe subțiri pe contur eliptic. 15. Plăci curbe subțiri în absidă. 16. Teoria încovoierii.

Redactarea este extrem de clară, iar prezentarea grafică excelentă.

Autorul își încheie prefața cărții sale cu speranța că aceasta va reprezenta o sursă valoroasă de referințe pentru oricine este interesat în comportarea statică a structurilor din plăci curbe subțiri și se ocupă cu calculul și proiectarea unor asemenea structuri.

Recomandăm cu toată căldura consultarea acestei cărți de excepție.

M. V. Soare

E. H. GOTTHARD FRANZ (sub. red.), *Beton-Kalender 1987. Taschenbuch für Beton, Stahlbeton- und Spannbeton sowie die verwandten Fächer, Teil I, II.* (Calendarul betonului 1987. Manual pentru beton armat și precomprimat și domenii înrudite) 76. Jahrgang, Ernst & Sohn, Berlin, 1987, 777 p. și 803 p.

Ediția din anul 1987, a 76-a ca apariție de la înființarea manualului, este a doua ca apariție în noul format 145 × 210 mm, permițînd o mai comodă consultare pentru urmărirea textului, tabelelor și diagramelor.

Autorii și titlurile secțiunilor sînt următoarele.

Vol. I A. Betonul de Prof. Dr.-Ing. J. Bonzel, Düsseldorf.
B. Mortare de Prof. Dr.-Ing. J. Bonzel, Düsseldorf.
C. Oțelul în construcții de Dr.-Ing. D. Bertram, Düseldorf.

F. Tabele pentru plăci dreptunghiulare de Prof. Ing. Dr. F. Czerny, Wien.
J. Rezistența materialelor de Prof. Dr.-Ing. N. Dimitrov, Stuttgart.
L. Dimensionarea elementelor din beton armat
I. Dimensionarea la încovoiere cu solicitare axială, lunecare și torsiune de Prof. Dr.-Ing. E. Grasser, München
II. Dimensionarea elementelor zvelte-Verificarea la flambaj de 0. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h.K. Kordina, Braunschweig și Prof. Dr.-Ing. U. Quast, Hamburg.
M. Dimensionarea elementelor din beton precomprimat—inclusiv precomprimarea parțială de 0. Prof. Dr.-Ing. H. Kupfer, München

Vol. II A. Prescripții de Dr.-Ing. H. Goffin, Düsseldorf.
B. Costuri în construcții de Ing. K.H. Wildt, Weinheim.
C. Fundații de Ing. W. Klöckner, Ing. P. Arz, Dr.-Ing. H. G. Schmidt și Ing. H. Zeiese, Mannheim.
D. Construcția căilor de comunicații de 0. Prof. Dr.-Ing. J. Eisenmann și Prof. Dr.-Ing. habil. G. Leykauf, München.
E. Împingerea pămîntului de Dr.-Ing. G. Jenne, Essen.

Secțiunile E (Lemnul de construcție, materiale și elemente pentru cofraje), G (Plăci) din vol. I și B (Execuția lucrărilor), C (Elemente de construcție din beton impermeabil), D (Poduri din beton armat) și E (Rezervoare) din anul 1986 nu mai figurează ; în schimb au fost introduse noile secțiuni B, F și J din vol. I, respectiv B, C, D și E din vol. II cu titlurile menționate precedent.

Așa cum menționam și într-o recenzie anterioară, deși prescripțiile la care se referă materialul diferă de cele din țara noastră, secțiunile reprezintă, prin problematica lor, o sursă de informație de o deosebită valoare.

M.V. Soare

* * * *Experimentelle Mechanik in Forschung und Praxis* (Mecanica experimnetală în cercetare și practică), VDI-BERICHTE 631, VDI-Verlag Düsseldorf, 1987, 414 pag.

Cartea cu titlul de mai sus reprezintă volumul de comunicări al celui de al 10-lea Simpozion GESA (Die Gemeinschaft Experimentelle Spannungsanalyse in der VDI/VDE — Gesellschaft Mess-und Automatisierungstechnik — Asociația pentru studiul experimental al tensiunilor din cadrul societății VDI/VDE pentru tehnica măsurării și a automatizării) care a avut loc la Augsburg (R.F.G.) în zilele de 7 și 8 mai 1987.

Volumul cuprinde 32 referate din cele mai variate domenii de măsurare a tensiunilor și deformațiilor.

Astfel, referatele tratează tehnici experimentale mai puțin întîlnite, ca : măsurări de deformații ale șasiurilor automobilelor în timpul montajului pe bandă, făcute prin fotogrametrie ; măsurări de tensiuni prin metode spectrometrice ; traductori tensometrici lucrînd pînă la temperaturi de 600°C ; studiul propagării fisurilor în arbori, prin măsurări de vibrații ; studiul tensiunilor prin metoda emisiei optice.

Sînt prezentate, de asemenea, diverse probleme cu caracter de noutate, tratate prin metode experimentale : efecte de concentrare a tensiunilor, studiate prin fotoelasticitate, la materiale cu comportare neliniară ; efectul favorabil al șlefuirilor spirelor de capăt ale arcurilor elicoidale, asupra stării de tensiune ; stări de tensiune tridimensionale în soluri anizotrope ; înregistratori de vibrații pentru conductorii liniilor electrice de înaltă tensiune ; determinarea deformațiilor pneurilor în timpul mersului ; măsurări de tensiuni la o piesă solicitată prin șoc pe mai multe direcții ; parametrii dinamici ai suportului unui reactor etc.

Cea mai mare parte dintre referate sînt redactate de autori din țara gazdă ; numai cinci lucrări provin din alte țări, între acestea una fiind din România (Metoda emisiunii optice în analiza tensiunilor — autori H.N. Teodorescu, M. Irimia, E. Sofron, Chr. Simionescu).

Cartea este realizată prin fotografierea textelor dactilografiate, prezentîndu-se în foarte bune condiții tehnice.

Apreciez că studierea acestui volum poate fi de real folos pentru specialiștii care lucrează în domeniile mecanicii experimentale.

Gh. Buzdugan

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 2 martie—aprilie 1988

SUMAR

STUDII

S. GOGONEA, Asupra problemei tridimensionale a mişcării fluidelor în medii poroase armonic neomogene în prezenţa unei cavităţi 95

F. IONESCU, M. POPESCU, Asupra folosirii modelelor numerice pentru studiul mişcării nepermanente a apei în râuri şi canale 103

N. MARCOV, Aplicarea metodei Imai-Lamla-Iacob la studiul unor mişcări subsonice potenţiale 115

D. BENA, Asupra problemei Helmholtz pentru domenii vecine 131

M. PECULEA, C. STOICA, Hidrodinamica etanşării cu film de lichid şi pompare dinamică 137

I. JELEV, GH. CONSTANTINESCU, Mişcarea permanentă şi nepermanentă a apei în reţelele de conducte sub presiune ale sistemului de irigaţie Kirkuk-Adhaim (Irak) . 149

M. V. SOARE, V. PETCU, Studiul plăcilor dreptunghiulare cu o linie de articulaţie intermediară 169

V. HANDRA-LUCA, M. V. BARA, Reductor de turaţie frontal cu bile 175

RECENZII 183

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU. Existence of Couette flows in second grade fluids. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

ASUPRA PROBLEMEI TRIDIMENSIONALE A MIȘCĂRII FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE ARMONIC NEOMOGENE ÎN PREZENȚA UNEI CAVITĂȚI

de S. GOGONEA

Institutul Agronomic București

Lucrarea se ocupă cu mișcarea fluidelor incompresibile într-un mediu poros armonic neomogen. Se demonstrează unicitatea soluției problemei, se determină tipul de singularitate a soluției și se reduce problema considerată la o problemă cu singularități impuse pentru domeniul dat. Rezultatele generale sînt exemplificate în cazul cavității sferice.

1. Printre mediile poroase neomogene mai mult studiate se numără și cele denumite în mod curent armonic neomogene și pentru care rădăcina pătrată a coeficientului de filtrație sau a celui de permeabilitate este o funcție armonică [1]—[3]. Atenția acordată acestor medii se datorează faptului că, pe de o parte, ele se întîlnesc destul de des în practică, iar pe de altă parte, posibilităților mai mari de rezolvare efectivă a unor probleme grație reprezentării soluției acestor probleme prin intermediul funcțiilor armonice.

Marea majoritate a problemelor studiate pînă în prezent au avut în vedere mișcarea fluidelor de filtrație în domenii mărginite, iar singularitățile mișcării, atunci cînd existau, erau de tip sursă. Probleme de mișcare pentru domenii nemărginite și cu singularități la mari distanțe nu au fost încă luate în considerare.

În lucrarea de față vom aborda o astfel de problemă, anume mișcarea în prezența unei cavități provocată de un curent uniform la mari distanțe. Mișcarea va fi presupusă tridimensională și permanentă, iar fluidul incompresibil. În această primă abordare a problemei admitem că în interiorul cavității nu se găsesc singularități ale mișcării și deci debitul de fluid care intră în cavitate este egal, în tot timpul mișcării, cu debitul de fluid ce iese prin cavitate. Valoarea comună a acestor debite va fi denumit debitul ce străbate cavitatea. Admitem de asemenea că pe frontiera cavității există numai componenta normală a vitezii ceea ce corespunde așa numitei probleme reduse pentru cavități [2].

2. Să considerăm deci în spațiul raportat la un triedru drept $Ox_1x_2x_3$ cu axa Ox_3 dirijată vertical în sus, un mediu poros ce ocupă domeniul D situat în exteriorul unei suprafețe netede închise S. Domeniul interior lui S este sediul unei cavități umplute cu un fluid perfect.

Relativ la coeficientul de filtrație $k = k(x_1, x_2, x_3)$ vom face ipoteza deja menționată că $\Delta\sqrt{k} = 0$ în orice punct din D. Sîntem obligați de asemenea să facem anumite ipoteze asupra unor valori limită ale funcției k. Vom presupune astfel că această funcție este prelungibilă continuu pe frontiera S a domeniului D. Admitem apoi că $k(x_1, x_2, x_3)$ tinde pentru

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \to \infty$, uniform în raport cu direcția, către o valoare k_0 finită și diferită de zero.

Mișcarea este provocată de un curent uniform la mari distanțe în D, vectorul viteză asimptotică fiind $\vec{V}_0 = V_0(\alpha_1 \vec{i}_1 + \alpha_2 \vec{i}_2 + \alpha_3 \vec{i}_3)$, $\vec{i}_m$ fiind versorul axei Ox_m, $m = 1, 2, 3$, iar $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Dacă admitem că mișcarea este guvernată de legea de filtrație a lui Darcy și notăm cu $\vec{v}$ vectorul viteză de filtrație în D, cu p presiunea și cu γ_f greutatea specifică a fluidului, atunci avem

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = -k(x_1, x_2, x_3) \cdot \operatorname{grad}\left[\frac{p(x_1, x_2, x_3)}{\gamma_f} + x_3\right]. \tag{1}$$

Dacă u_m, $m = 1, 2, 3$, sînt componentele lui $\vec{v}$ pe cele trei axe și dacă punem

$$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{p(x_1, x_2, x_3)}{\gamma_f} + x_3, \tag{2}$$

atunci (1) se scrie sub forma

$$\vec{v} = -k \operatorname{grad} h, \quad u_m = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad m = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Fluidul fiind incompresibil și mișcarea permanentă, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, ceea ce conduce, ținînd seama de (3), la cunoscuta ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea și de tip eliptic pentru funcția h,

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} h) = 0 \text{ sau } \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(k\frac{\partial h}{\partial x_m}\right) = 0. \tag{4}$$

Funcția h este regulată peste tot în D dar are la infinit o singularitate, de un tip ce va fi determinat ceva mai jos, consecință a faptului că

$$\lim_{r\to\infty} \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = V_0(\alpha_1 \vec{i}_1 + \alpha_2 \vec{i}_2 + \alpha_3 \vec{i}_3) \tag{5}$$

sau echivalent

$$\lim_{r\to\infty} u_m(x_1, x_2, x_3) = V_0\alpha_m, \quad m = 1, 2, 3. \tag{5'}$$

Datorită ipotezei făcute, pe S există numai viteza normală. Atunci, după cum se știe, h ia o valoare constantă în fiecare punct al lui S și cum h însăși este determinată, abstracție făcînd de o constantă arbitrară aditivă, putem considera

$$h(x_1, x_2, x_3)|_S = 0. \tag{6}$$

3. Vom aborda acum chestiunea importantă a unicității soluției problemei formulate. În cazul domeniului mărginit problema unicității soluției în diferite cazuri de mișcare a fost rezolvată de către T. Oroveanu, [1].

În cazul de față domeniul fiind nemărginit, pentru studiul unicității soluției devine esențială forma comportamentului soluției regulate la mari

distanțe. Deși acest comportament ar putea fi dedus, în cazul nostru al mediilor armonic neomogene, într-un mod mai simplu utilizînd reprezentarea lui h (relația (14)), preferăm să facem acest lucru într-un cadru mai general în care se încadrează o clasă destul de largă de medii neomogene. Acest cadru este asigurat de rezultate obținute de către J. Serrin, D. Gilbarg și R. Finn, sinteza acestor rezultate fiind prezentată în [4].

Ecuația (4) se mai scrie, în ipoteza ca funcția k este diferențiabilă, sub forma

$$\sum_{i,m} a_{im}(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_m} + \sum_m b_m \frac{\partial h}{\partial x_m} = 0, \tag{7}$$

unde

$$a_{im} = k\delta_{im}\,; \quad b_m = \frac{\partial k}{\partial x_m}\cdot \tag{8}$$

Dacă funcțiile a_{im} sînt hölderiene, au limita finită pentru $r \to \infty$, iar $b_m = O(r^{-1})$ pentru valori mari ale lui r și dacă există $a_0 > 0$ astfel încît pentru orice triplet (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

$$a_0 \sum_m \xi_m^2 \leqslant \sum_{i,m} a_{im}(x_1, x_2, x_3)\,\xi_i \xi_m \leqslant a_0^{-1} \sum_m \xi_m^2 \tag{9}$$

(se spune în acest caz că ecuația este uniform eliptică în D), atunci orice soluție regulată și mărginită a ecuației (7) are o limită finită la infinit h_∞ și satisface pentru valori mari ale lui r o relație de tipul

$$h(x_1, x_2, x_3) = h_\infty + O\left(\frac{1}{r}\right)\cdot \tag{10}$$

Ținînd seama de (8), relația (9) devine în cazul nostru

$$a_0 \sum_m \xi_m^2 \leqslant k \sum_m \xi_m^2 \leqslant a_0^{-1} \sum_m \xi_m^2$$

și ea este satisfăcută oricare ar fi funcția $k > 0$ mărginită în D, așa cum se poate verifica imediat.

Cealaltă condiție relativă la coeficienții a_{im} este deasemenea satisfăcută pentru orice funcție k diferențiabilă ținînd seama că din (8) rezultă că ei au derivate parțiale continui iar k are limită finită pentru $r \to \infty$. Condiția $\dfrac{\partial k}{\partial x_m} = O(r^{-1})$ este și ea satisfăcută la medii armonic neomogene. Într-adevăr, avem

$$\frac{\partial k}{\partial x_m} = 2\sqrt{k}\,\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_m}\cdot$$

Pe de altă parte, $\sqrt{k} - \sqrt{k_0}$ este armonică și regulată în D și atunci avem, în baza unei proprietăți cunoscute, $\sqrt{k} = \sqrt{k_0} + O(r^{-1})$. Urmează că $\dfrac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_m} = O(r^{-2})$ ceea ce asigură îndeplinirea condiției cerute.

Mai general, pentru ca $\dfrac{\partial k}{\partial k_m} = O(r^{-1})$, este suficient să fie îndeplinită, pentru valori mari ale lui r, condiția

$$k = k_0 + O(r^{-\nu}),\ 0 < \nu < 1. \tag{11}$$

Rezumînd, relația (10) este valabilă pentru orice soluție regulată și mărginită a ecuației (4) în care k este o funcție diferențiabilă ce satisface condiția (11).

4. Putem trece acum la demonstrarea unicității soluției problemei formulată mai sus. Fie $h_0(x_1, x_2, x_3)$ o funcție care satisface în D ecuația (4) și care are o singularitate la infinit astfel încît diferența $\hat{h} = h - h_0$ este regulată și în acest punct. Vom dovedi că soluția problemei formulată la nr. 2 și pentru care

$$\lim_{r\to\infty} [h(x_1, x_2, x_3) - h_0(x_1, x_2, x_3)] = c, \tag{12}$$

c fiind o constantă dată, este, dacă există, unică.

Să presupunem că ar exista două soluții $h^{(1)}$ și $h^{(2)}$ care verifică ecuația (4), condiția la limită (6) și condiția la infinit (12). Atunci diferența $\hat{h} = h^{(1)} - h^{(2)}$ ar satisface (4), (6) și în baza relației (12) ar avea limită nulă la infinit. Atunci, ținînd seama de (10), avem pentru valori mari ale lui r

$$\hat{h}(x_1, x_2, x_3) = O(r^{-1}). \tag{13}$$

Fie S_R o sferă cu centrul în origine și cu raza R suficient de mare astfel încît să conțină în interiorul ei sfera S și fie D_R domeniul mărginit de S și de S_R. Avem

$$\operatorname{div} [\hat{h}(k \operatorname{grad} \hat{h})] = \hat{h} \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \hat{h}) + k (\operatorname{grad} \hat{h})^2.$$

Primul termen este, în baza ecuației (4), nul, așa încît

$$\operatorname{div} [\hat{h}(k \operatorname{grad} \hat{h})] = k (\operatorname{grad} h)^2.$$

Atunci, o formulă de tip Green ne dă

$$\iiint_{D_R} k [\operatorname{grad} \hat{h}]^2 \, d\tau = \iiint_{D_R} \operatorname{div} [\hat{h} (k \operatorname{grad} \hat{h})] \, d\tau =$$

$$= \iint_S \hat{h}\, k \frac{\partial \hat{h}}{\partial n} \, d\sigma + \iint_{S_R} \hat{h}\, k \frac{\partial \hat{h}}{\partial n} \, d\sigma,$$

$\frac{\partial \hat{h}}{\partial n}$ reprezentînd derivata în direcția normalei exterioare. Dar pe S, $\hat{h} = 0$, iar pe S_R avem, ținînd seama de (13),

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial n} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial r} = O(r^{-2}); \quad \hat{h}\frac{\partial \hat{h}}{\partial n} = O(r^{-3}).$$

Rezultă atunci imediat că pentru $r \to \infty$ integrala pe S_R tinde către zero și prin urmare

$$\iiint_D k(\operatorname{grad} \hat{h})^2 \, d\tau = 0.$$

Cum $k(\operatorname{grad} \hat{h})^2 \geqslant 0$ în D, rezultă $\operatorname{grad} \hat{h} = 0$, adică h este constantă în D. Cum pe S, $\hat{h} = 0$, rezultă $\hat{h} = 0$ în D, adică $h^{(1)} = h^{(2)}$ în orice punct din D ceea ce încheie demonstrația.

5. Trecem acum la determinarea funcției h_0. În acest scop vom folosi reprezentarea bine cunoscuta a funcției h,

$$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Phi(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{k(x_1, x_2, x_3)}}, \tag{14}$$

în care Φ este o funcție armonică în D și regulată în toate punctele de regularitate ale lui h. În cazul nostru este evident că Φ are la infinit o singularitate ce urmează a fi determinată. Fie Φ_0 o funcție armonică în D, avînd o singularitate la infinit astfel încît $\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0$, este o funcție armonică în D și regulată inclusiv la infinit. Atunci funcția

$$\tilde{h}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\tilde{\Phi}(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{k(x_1, x_2, x_3)}} = \frac{\Phi(x_1, x_2, x_3) - \Phi_0(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{k(x_1, x_2, x_3)}} \tag{15}$$

este o soluție regulată a ecuației (4). Din (14) și (15) rezultă că

$$h_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Phi_0(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{k(x_1, x_2, x_3)}} \tag{16}$$

este o soluție a ecuației (4) avînd o singularitate la infinit astfel încît diferența $\tilde{h} = h - h_0$ este regulată, și în acest punct.

Vom dovedi că h_0 este de forma

$$h_0(x_1, x_2, x_3) = A V_0 \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\sqrt{k(x_1, x_2, x_3)}}, \tag{17}$$

unde A este o constantă convenabil aleasă. Este evident, în primul rînd, că $A V_0 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$ este o funcție armonică în D, deci h_0 satisface în D ecuația (4). Este de asemenea clar că h_0 are la infinit o singularitate. Va trebui să determinăm A astfel încît să fie îndeplinită condiția (5').

Ţinînd seama de (3) aceasta se scrie

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial h}{\partial x_m}=-\frac{1}{k_0}V_0\alpha_m. \tag{18}$$

Dar $\frac{\partial h}{\partial x_m}=\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_m}+\frac{\partial h_0}{\partial x_m}$, iar pe de altă parte, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_m}$ este armonică şi regulată în D şi deci are limita nulă la infinit, aşa încît condiţia (18) devine

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial h_0}{\partial x_m}=-\frac{1}{k_0}V_0\alpha_m. \tag{19}$$

Pe de altă parte, din (17) deducem că

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_m}=AV_0\left[\frac{\alpha_m}{\sqrt{k}}-(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)\frac{1}{k}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_m}\right]. \tag{20}$$

Dar cum prin ipoteză

$$\sqrt{k(x_1,\ x_2,\ x_3}=\sqrt{k_0}+\mathrm{O}(r^{-1}), \tag{21}$$

urmează că $\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_m}=\mathrm{O}(r^{-2})$. Atunci cel de al doilea termen din (20) tinde către zero cînd $r\to\infty$ şi obţinem

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial h_0}{\partial x_m}=\frac{AV_0\alpha_m}{\sqrt{k_0}}. \tag{22}$$

Din (19) şi (22) obţinem valoarea lui A

$$A=-\frac{1}{\sqrt{k_0}}. \tag{23}$$

Prin urmare

$$h_0(x_1,\ x_2,\ x_3)=-\frac{V_0}{\sqrt{k_0}}\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3}{\sqrt{k(x_1,\ x_2,\ x_3)}}, \tag{24}$$

$$\Phi_0(x_1,\ x_2,\ x_3)=-\frac{V_0}{\sqrt{k_0}}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3). \tag{25}$$

6. Ţinînd seama de (14) rezultă că problema este rezolvată îndată ce cunoaştem funcţia Φ. Aceasta, aşa cum am văzut, este armonică în D şi are la infinit o singularitate, astfel încît diferenţa $\Phi-\Phi_0$, unde Φ_0 este dată de (25) este regulată şi în acest punct. Din (6) şi (14) se obţine că Φ trebuie să satisfacă condiţia la limită

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)|_S=0. \tag{26}$$

Prin urmare, problema formulată la nr. 2 s-a redus la o problemă Dirichlet cu o singularitate dată la infinit pentru domeniul D. Cunoaşterea lui Φ permite determinarea presiunii şi cîmpului vitezelor prin intermediul relaţiilor (2) şi (3).

7. Fie $\vec{n}$ versorul normalei exterioare la S şi să notăm cu S', respectiv cu S'', reuniunea porţiunilor de pe S pentru care $\vec{v}\vec{n} < 0$, respectiv $\vec{v}\vec{n} > 0$. Prin urmare prin S' fluidul intră în cavitate, iar prin S'' iese din această cavitate. Debitul de fluid care străbate cavitatea va fi dat atunci de una din relaţiile

$$Q = \left| \iint_{S'} \vec{v}\vec{n}\, d\sigma \right|; \quad Q = \left| \iint_{S''} \vec{v}\vec{n}\, d\sigma \right| \cdot \tag{27}$$

8. Vom ilustra rezultatele de mai sus în cazul unei cavităţi sferice cu centrul în origine şi de raza R. Trecînd la coordonatele sferice $x_1 = r\sin\theta\cos\lambda$, $x_2 = r\sin\theta\sin\lambda$, $x_3 = r\cos\theta$, şi notînd pentru simplitate o funcţie $f(x_1, x_2, x_3)$ în coordonate sferice prin $f(r, \theta, \lambda)$, avem

$$\Phi_0(r, \theta, \lambda) = -\frac{V_0 r}{\sqrt{k_0}}(\alpha_1 \sin\theta\cos\lambda + \alpha_2 \sin\theta\sin\lambda + \alpha_3\cos\theta). \tag{28}$$

Soluţia problemei lui Dirichlet pentru sferă este dată de [5].

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \Phi_0(r, \theta, \lambda) - \frac{R}{r}\Phi_0\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \lambda\right) \cdot \tag{29}$$

Ţinînd seama de (28), rezultă

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = -\frac{V_0}{\sqrt{k_0}}(\alpha_1 \sin\theta\cos\lambda + \alpha_2 \sin\theta\sin\lambda + \alpha_3\cos\theta)\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \tag{30}$$

sau, revenind la coordonatele carteziene,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{V_0}{\sqrt{k_0}}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\left(1 - \frac{R^3}{r^2}\right) \cdot \tag{31}$$

Din (30) se deduce

$$h(r, \theta, \lambda) = -\frac{V_0}{\sqrt{k_0 \cdot k(r, \theta, \lambda)}}(\alpha_1 \sin\theta\cos\lambda + \alpha_2 \sin\theta\sin\lambda + \alpha_3\cos\theta)\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \cdot \tag{32}$$

Cum pentru sfera $\vec{v}\vec{n} = -k\left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=R}$ obţinem cu uşurinţă

$$\vec{v}\vec{n} = 3V_0\sqrt{\frac{k(R, \theta, \lambda)}{k_0}}(\alpha_1 \sin\theta\cos\lambda + \alpha_2 \sin\theta\sin\lambda + \alpha_3\cos\theta), \tag{33}$$

unde $k(R, \theta, \lambda)$ este limita lui k pentru $r \to R$. Relaţia (33) permite determinarea porţiunilor S' şi S'' îndată ce funcţia k a fost precizată.

Să considerăm că, în particular, k depinde numai de r, $k = k(r)$. Atunci $k(R, \theta, \lambda) = k(R)$ și datorită simetriei problemei este clar că rezultatul nu depinde de direcția lui V_0. Vom lua $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ și $\alpha_3 = 1$ și obținem din (33) pe S

$$\vec{v}\vec{n} = 3V_0 \sqrt{\frac{k(R)}{k_0}} \cos\theta. \tag{34}$$

Cum $\cos\theta > 0$ pentru $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că prin porțiunea de pe sferă caracterizată prin $z > 0$ fluidul iese din cavitate așa cum era de așteptat. Atunci obținem din (27)

$$Q = \left| 3V_0 \sqrt{\frac{k(R)}{k_0}} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right|$$

și efectuînd toate calculele rezultă

$$Q = 3\pi V_0 R^2 \sqrt{\frac{k(R)}{k_0}} \tag{35}$$

Primit la redacție la 17 noiembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei, București, 1963.
2. ST. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
3. H. I. ENE, S. GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973.
4. C. MIRANDA, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 1970.
5. S. GOGONEA, *Asupra problemei neomogenității sferice în teoria filtrației*. St. cerc. mat., **26**, 2 (1984).

ASUPRA FOLOSIRII MODELELOR NUMERICE PENTRU STUDIUL MIȘCĂRII NEPERMANENTE A APEI ÎN RÎURI ȘI CANALE

F. IONESCU

Institutul de Cercetări și Proiectări pentru Gospodărirea Apelor-București

M. POPESCU

Institutul de Cercetări Hidrotehnice București

În lucrare sînt discutate unele aspecte privind dezvoltarea și evoluția modelelor numerice pentru simularea regimurilor nepermanente în rîuri și canale deschise. Pe baza prezentării concise a două metode de construire a unor asemenea modele de calcul sînt discutate aspecte legate de scrierea ecuațiilor în diferențe finite, tehnicile de rezolvare numerică, stabilitatea și convergența soluțiilor numerice, criteriile de stabilire a condițiilor de discretizare și de cerințele practice pentru datele de bază. Pentru ilustrare sînt prezentate cîteva rezultate obținute în două aplicații practice.

1. INTRODUCERE

Utilizarea modelelor numerice de simulare în studiul regimurilor de curgere în albii de rîuri și canale deschise a devenit o practică curentă în mai toate studiile și proiectele de amenajare hidrotehnică (a cursurilor de apă). Numeroase metode și modele au fost dezvoltate, obținîndu-se progrese însemnate în acest domeniu [2], [5]. Totuși, o serie de aspecte, ținînd fie de fundamentarea fizică a modelelor matematice, fie de tehnicile de analiză și calcul numeric sau de cerințele validării și calibrării modelelor și datelor de bază ce le definesc, pot fi încă dezvoltate și perfecționate.

În acest sens ne propunem să prezentăm în continuare unele observații și idei, pornind de la prezentarea concretă a două metode de calcul folosite deja în practica curentă.

2. ECUAȚII GENERALE ȘI ALTERNATIVE DE REALIZARE A MODELELOR NUMERICE

Modul obișnuit de rezolvare, în modelele de simulare numerică a regimurilor nepermanente ale apei în albii deschise, este : se pleacă de la ecuațiile diferențiale ale mișcării care se transpun în *diferențe finite*, aproximînd derivatele prin diferențe și obținînd astfel ecuații algebrice ce se rezolvă numeric prin diferite metode, directe sau iterative.

În acest fel se recurge la un dublu proces de aproximare :

— mai întîi la scrierea ecuațiilor diferențiale, prin neglijarea termenilor „infinit mici" de ordin superior, ce rezultă prin aplicarea legilor fizice de conservare (masă, impuls, energie, care guvernează fenomenul de mișcare) la dimensiunile unui element infinitesimal din masa de fluid.

— iar apoi la transpunerea în diferențe finite, la dimensiunile unui element finit, a acestor ecuații diferențiale, cînd din nou, prin aproximarea derivatelor prin diferențe finite, se consideră neglijabile diferențele de ordin superior (ipoteză ce implică o anume densitate-rafinare a rețelei de calcul).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 2, 1988, P. 103—113

Pentru a diminua efectul acestor aproximări asupra calității soluției numerice (precizie, convergență, stabilitate), în scrierea ecuațiilor în diferențe finite se utilizează formule și scheme de aproximare „centrate" sau „simetrice" sau, în schemele implicite, se introduc factori de pondere diferiți pentru valorile funcțiilor la momentul inițial și final al intervalului de calcul.

O alternativă la acest mod de rezolvare (abordare) este aceea de a considera direct un *element finit*, de a admite, de exemplu, aceeași ipoteză că mărimile fizice ce descriu fenomenul au o variație liniară între nodurile rețelei de calcul (pe elementul finit) și de a aplica legile mișcării (de conservare) în condițiile elementului finit și a ipotezei admise. Se obțin în acest fel, în mod direct, ecuațiile în diferențe finite, cu o justificare a factorilor de pondere (diferiți pentru diferiți termeni din ecuații) în concordanță cu condițiile și ipotezele admise în scrierea ecuațiilor (aplicarea legilor mișcării) pentru elementul finit.

3. PREZENTAREA METODELOR DE CALCUL

3.1. În prima metodă de calcul prezentată aici se pornește de la ecuațiile diferențiale ale mișcării nepermanente în albii deschise (Saint Venant) sub forma [3], [4], [6]:

$$B\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{1}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{g\omega^2}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{Q|Q|}{K^2}=0, \tag{2.a}$$

unde notațiile sînt cele obișnuit folosite.

Condițiile inițiale și la limită necesare integrării numerice a acestor ecuații constau în cunoașterea la un moment oarecare a repartiției debitelor și nivelurilor în fiecare secțiune de calcul

$$Z_{t=t_0}=Z(x) \text{ și } Q_{t=t_0}=Q(x), \tag{3.a}$$

cu condiții la limită, care, de obicei, se exprimă astfel:

— se cunoaște hidrograful debitelor în secțiunea de intrare $Q=Q(t)$;

— se cunoaște relația între debite și niveluri în secțiunea de ieșire $f(Z, Q)=0$, sau alte condiții.

Pentru transcrierea în diferențe finite a ecuațiilor (1.a) și (2.a) la un pas de timp Δt, se consideră un tronson de rîu de lungime Δx cuprins între secțiunile de calcul i, $i+1$ numerotate din amonte spre aval (fig. 1).

Adoptînd următoarea formă de scriere în diferențe finite pentru derivatele funcțiilor $Z(x, t)$ și $Q(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2\Delta t}[f(x, t+\Delta t)+f(x+\Delta x, t+\Delta t)-f(x, t)-f(x+\Delta x, t)], \tag{4.a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}\,[f(x+\Delta x, t) + f(x+\Delta x, t+\Delta t) - f(x,t) - f(x, t+\Delta t)], \tag{5.a}$$

sistemul de ecuații (1.a), (2.a) devine :

$$\overline{\Delta Z} = -\left[\frac{1}{g\bar{\omega}}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\delta Q_m + \frac{2\bar{Q}_m}{g\bar{\omega}^2}\,\overline{\Delta Q} - \frac{\bar{Q}_m^2}{g\bar{\omega}^3}\,\overline{\Delta\omega} + \Delta x\,\frac{\bar{Q}_m|\bar{Q}_m|}{K^2}\right], \tag{6.a}$$

$$\overline{\Delta Q} = -\bar{B}\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\delta Z_m, \tag{7.a}$$

unde s-au aplicat următoarele reguli de scriere :

— valorile medii la timpul $\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ se notează cu bară ;

— valorile din secțiunea x_i se notează cu indicele i, iar cele din secțiunea medie $\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$ cu indicele m ;

— creșterea mărimilor după x se notează cu Δ, iar după t cu δ.

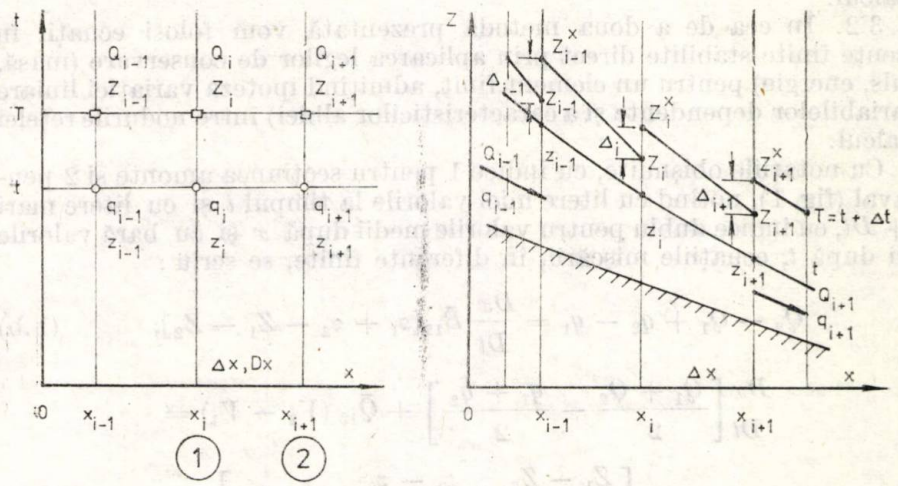


Fig. 1. — Reprezentarea metodei de calcul pentru un pas de timp Δt.

Metoda de calcul se bazează pe ideea că, în cadrul unui pas de calcul în care se cunosc mărimile z_i și q_i la timpul t, să se propună mărimile Z_i și Q_i în toate secțiunile de calcul la timpul $T = t + \Delta t$, mărimi care să fie corectate succesiv pînă ce satisfac ecuațiile (Saint Venant) în diferențe finite pe toate sectoarele, precum și condițiile la limită [6]. Pe un sector de calcul oarecare $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, presupunînd cunoscute mărimile Q_i și Z_{i+1} se pot calcula mărimile Q_{i+1} și Z_i, rezolvînd printr-o metodă iterativă directă sistemul de ecuații algebrice (6.a), (7.a).

Fie $C_j(T)$ o curbă a suprafeței libere a apei, definită de valorile Z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, adoptată ca o aproximație.

Aplicînd algoritmul de mai sus din sector în sector, din amonte spre aval, se poate calcula o nouă curbă a suprafeţei libere a apei $C_j^*(T)$, caracterizată de valorile Z_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se verifică condiţia de precizie

$$|Z_i^* - Z_i| = |\Delta_i| < \varepsilon \tag{8.a}$$

în fiecare secţiune de calcul, iar în cazul în care nu este satisfăcută, se propune o nouă curbă a suprafeţei libere la timpul T, $C_{j+1}(T)$, determinată de valorile $Z_i + \Delta_i^*$, unde

$$\Delta_i^* = \frac{1}{4}[2\theta\Delta_i + (1 - \theta)(\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1})], \tag{9.a}$$

iar θ este un coeficient subunitar cuprins între 0,5 şi 1.

În secţiunea aval, Z_n^* se determină din condiţia $f(Z_n^*, Q_n^*) = 0$, iar verificarea de închidere se face tot printr-o relaţie de forma (8.a).

Pentru prima propunere $C_0(T)$ se poate lua curba suprafeţei libere a apei de la timpul t. Calculul se consideră încheiat pentru un interval de timp Δt, cînd condiţia (8.a) este satisfăcută simultan în toate secţiunile de calcul.

3.2. În cea de a doua metodă prezentată vom folosi ecuaţii în diferenţe finite stabilite direct prin aplicarea legilor de conservare (masă, impuls, energie) pentru un element finit, admiţînd ipoteza variaţiei liniare (a variabilelor dependente şi a caracteristicilor albiei) între nodurile reţelei de calcul.

Cu notaţiile obişnuite, cu indice 1 pentru secţiunea amonte şi 2 pentru aval (fig. 1), notînd cu litere mici valorile la timpul t şi cu litere mari la $t + Dt$, cu indice dublu pentru valorile medii după x şi cu bară valorile medii după t, ecuaţiile mişcării, în diferenţe finite, se scriu :

$$Q_2 - Q_1 + q_2 - q_1 = \frac{Dx}{Dt}\bar{B}_{12}[z_1 + z_2 - Z_1 - Z_2], \tag{1.b}$$

$$\frac{Dx}{Dt}\left[\frac{Q_1 + Q_2}{2} - \frac{q_1 + q_2}{2}\right] + \bar{Q}_{12}(V_2 - V_1) =$$

$$= g\omega_{12}\left[\frac{Z_1 - Z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} - \bar{J}_{12}\,Dx\right] \tag{2.b}$$

prima fiind ecuaţia de continuitate (a masei) iar a doua ecuaţia dinamică (impuls), cu factorul de pondere $\theta = 1/2$ în prima ecuaţie şi $\theta = 1/2$ sau $\theta = 1$ în cea de a doua ecuaţie.

În condiţiile ipotezei admise, rezultă că ecuaţia dinamică (impuls) redă corect aplicarea legii conservării cantităţii de mişcare dacă mărimea paşilor reţelei de calcul satisface relaţia

$$\bar{V}_{12}\,Dt \leqslant Dx. \tag{3.b}$$

Dacă această condiţie este în dezacord cu scara fenomenului (în sensul că variaţiile în timp sînt prea lente şi creşterile pe intervalul Dt cerut

de (3.b) sînt de ordinul de mărime al preciziei de calcul) înseamnă că pentru condițiile modelului nostru numeric fenomenul fizic este mai bine descris prin aplicarea legii conservării energiei (în locul impulsului) și atunci (2.b) devine :

$$Q_{12}(V_2 - V_1) = g\Omega_{12}(Z_1 - Z_2 - J_{12}\,Dx) \tag{4.b}$$

fără restricția (3.b) pentru mărimea pasului Dt. În cazul folosirii ecuațiilor diferențiale ca forme primitive în dezvoltarea modelelor numerice, aceste situații sînt tratate prin neglijarea unor termeni (inerțiali) în ecuația dinamică, menținînd aceeași schemă de aproximare prin diferențe finite.

Ecuațiile (1.b) și (2.b) se pot, prin gruparea convenabilă a termenilor, scrie sub forma :

$$-\beta Q_1 + Z_1 + \beta Q_2 + Z_2 = C_{12}, \tag{5.b}$$

$$S_1 Q_1 - Z_1 + S_2 Q_2 + Z_2 = E_{12}, \tag{6.b}$$

cu valorile necunoscute Z_1, Q_1, Z_2 și Q_2 exprimate explicit și folosind notațiile :

$$\beta = Dt/(\bar{B}_{12}\,Dx), \tag{7.b}$$

$$S = |Q|/(2K^2)Dx + Dx/(2g\omega_{12}\,Dt) \triangleq Q/(2g\omega_{12}\Omega), \tag{8.b}$$

iar C_{12}, E_{12} grupează restul termenilor care sînt funcții numai de valorile cunoscute z_1, z_2, q_1 și q_2.

De multe ori, în cazul simulării propagării undelor de viitură în albii de rîuri, cînd ecuația (4.b) poate fi folosită în loc de (2.b), expresiile de mai sus se simplifică în mod corespunzător ; totuși, pentru regimurile nestaționare induse în albiile rîurilor (sau pe canale) de funcționarea centralelor hidroelectrice sau de diverse sisteme de reglaj pe canale de irigații, este nevoie de utilizarea ecuației dinamice sub forma (2.b).

Cum ecuațiile în diferențe (5.b) și (6.b) conțin termeni neliniari este necesar să se utilizeze o procedură iterativă de rezolvare.

Presupunem că o soluție aproximativă (propusă) ar fi :

$$Z_1 = Z_1^0 - DZ_1 \tag{9.b}$$

și similar pentru Z_2, Q_1 și Q_2, unde

Z_1^0 — soluția corectă, căutată ;

DZ_1 — corecție necesară pentru Z_1 spre a obține Z_1^0.

Înlocuind expresiile de forma (9.b) în ecuațiile (5.b) și (6.b) se obține :

$$-\beta\,DQ_1 + DZ_1 + \beta DQ_2 + DZ_2 = DDZC, \tag{10.b}$$

$$S_1\,DQ_1 - DZ_1 + S_2\,DQ_2 + DZ_2 = -DDZ\,M, \tag{11.b}$$

unde s-au folosit notaţiile :

$$DZC = \beta(Q_1 - Q_2 + q_1 - q_2); \qquad DZC_1 = Z_1 + Z_2 - z_1 - z_2,$$

$$DZM = S_1Q_1 + S_2Q_2; \qquad DZM_1 = Z_1 - Z_2,$$

$$DDZC = DZC - DZC_1; \qquad DDZM = DZM - DZM_1.$$

Cu aceste notaţii ecuaţiile (5.b) şi (6.b) pot fi scrise în etapa finală a procesului iterativ de calcul sub forma :

$$DZC - DZC_1 = 0, \tag{12.b}$$

$$DZM - DZM_1 = 0. \tag{13.b}$$

Adunînd şi scăzînd ecuaţiile (10.b) şi (11.b) obţinem :

$$(-S_1 - \beta)DQ_1 + 2DZ_1 + (-S_2 + \beta)DQ_2 = DDZC + DDZM, \tag{14.b}$$

$$(S_1 - \beta)DQ_1 + (S_2 + \beta)DQ_2 + 2DZ_2 = DDZC - DDZM. \tag{15.b}$$

Dacă considerăm acum două sectoare de calcul consecutive $(i-1, i)$ şi $(i, i+1)$, şi folosim ecuaţia (15.b) pentru primul sector $(i-1, i)$, iar pentru al doilea sector $(i, i+1)$ ecuaţia (14.b) şi scadem cele două ecuaţii astfel scrise, se obţine o ecuaţie de forma :

$$A_iDQ_{i-1} + B_iDQ_i + C_iDQ_{i+1} = D_i \tag{16.b}$$

unde

$$D_i = Z_i^{i-1} - Z_i^{i+1}, \tag{17.b}$$

iar

$$Z_i^{i-1} = (z_{i-1} + z_i)/2 + (DZC - DZM)_{i-1,i} \tag{18.b}$$

(şi analog Z_i^{i+1}) fiind valorile obţinute în nodul i din cele două sectoare adiacente pentru soluţia aproximativă propusă şi care trebuie să fie egale pentru soluţia corectă ($Z_i^{i-1} = Z_i^{i+1}$).

Deci, pentru întreg domeniul de calcul sistemul de $2N$ ecuaţii se reduce la un sistem de N ecuaţii liniare simultane, cu o matrice de formă tridiagonală, ce se rezolvă convenabil printr-un algoritm de dublu baleiaj. Pentru aceasta, sistemul poate fi pus sub o formă mai avantajoasă (pentru rezolvarea numerică pe calculator) prin eliminarea coeficienţilor A_i chiar la momentul calculării lor (prima fază a algoritmului de baleiaj amonte—aval) şi sistemul devine [1], [3] :

$$DQ_i + C1_iDQ_{i+1} = C2_i \tag{19.b}$$

unde

$$C1_i = C_i/(B_i - A_iC1_{i-1}), \tag{20.b}$$

$$C2_i = (D_i - A_iC2_{i-1})/(B_i - A_iC1_{i-1}). \tag{21.b}$$

Desigur, ecuațiile (16.b) și (19.b) se scriu corespunzător condițiilor (de margine) limită introduse de condițiile date la capetele amonte și aval ale domeniului modelat. Acest mod de sistematizare a calculelor permite introducerea și altor condiții limită în interiorul domeniului, cum ar fi cele date de confluențe-derivații, baraje cu condiții impuse de nivel, debit sau relații nivel-debit și altele, fără a segmenta sectorul studiat [3].

Procedura iterativă se continuă pînă ce în toate nodurile de calcul termenii $D_i = Z_i^{i-1} - Z_i^i$ din ecuația (9.b) devin zero, desigur în limita preciziei de calcul propuse.

4. APLICAȚII

4.1. Prima metodă s-a aplicat la efectuarea calculelor hidraulice pentru elaborarea planurilor de amenajare hidrotehnică complexă a unor rîuri din țara noastră.

De asemenea, se menționează aplicarea metodei la un studiu hidraulic special privind funcționarea la regimuri tranzitorii a unei uzine hidroelectrice cu aducțiunea formată dintr-un canal cu nivel liber cu funcționare automată și galerie sub presiune [6].

În continuare se prezintă cîteva din rezultatele acestui studiu privind mișcarea nepermanentă a apei din canal.

Iată cîteva caracteristici tehnico-funcționale ale canalului de aducțiune :

— *Stavila amonte* funcționează după o lege de reglaj de forma :

$$\text{sign } \Delta a \neq \text{sign } [k\Delta Z_{am} + (1 - k)\Delta Z_{av} + \varepsilon_z]; \quad \Delta a = m\Delta t,$$

unde Δa este variația deschiderii stavilei, ΔZ_{am} — variația nivelului apei în secțiunea amonte a canalului, ΔZ_{av} — variația nivelului apei în secțiunea aval, k — coeficient de pondere ($0 \leqslant k \leqslant 1$), ε_z — domeniul de insensibilitate și m — coeficient de reglaj.

Debitul pe sub stavilă este dat de relația :

$$Q_{am} = \mu b\, a\sqrt{2g(H_{am} - Z_{am})},$$

unde H_{am} este cota apei în rezervorul amonte, b — lățimea stavilei, μ — coeficient de debit.

— *Canalul de aducțiune* este de secțiune dreptunghiulară cu lungimea $L = 2\,500$ m, lățimea $B = 10$ m și panta longitudinală $i = 0{,}001$.

— *Camera de încărcare*, situată în partea aval a canalului funcționează după ecuația de continuitate scrisă sub forma :

$$Q_n = \Omega \frac{dZ_n}{dt} + Q_a,$$

unde Q_a este debitul în galeria de aducțiune, iar Ω — aria secțiunii orizontale a camerei ($\Omega = 1\,000$ m^2).

În calculul nivelurilor extreme din canal s-au considerat manevre de pornire și oprire totală a uzinei la debitul maxim $Q_T = 60$ m³/s, iar rezultatele pentru o variantă de calcul sînt prezentate sub formă grafică în figura 2.

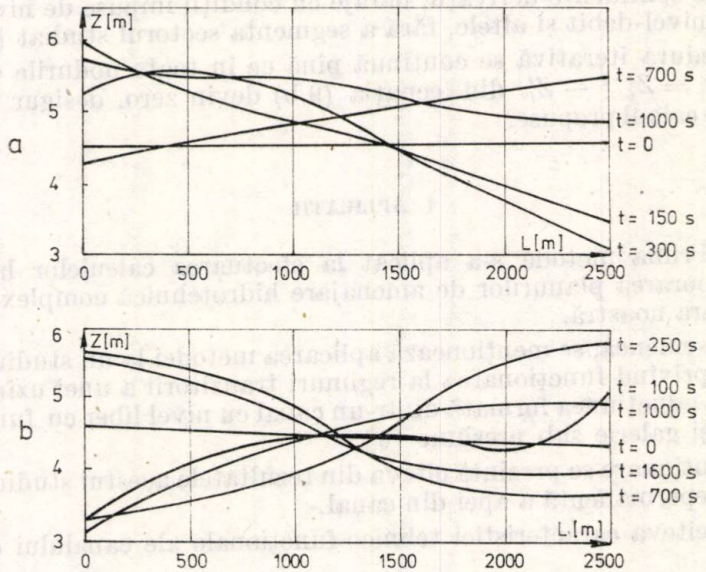


Fig. 2. — Calculul nivelurilor extreme ale apei din canalul de aducțiune la : *a*) pornirea uzinei hidroelectrice ; *b*) oprirea uzinei hidroelectrice.

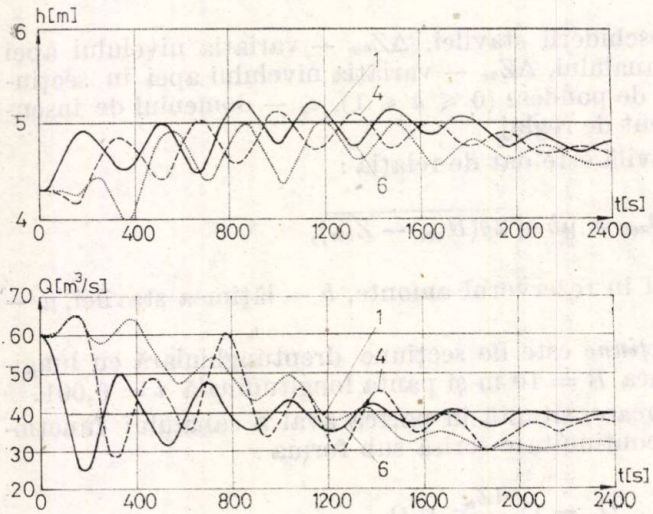


Fig. 3. — Curbele de variație în timp a unor parametri hidraulici ai mișcării nepermanente din canal; *1, 4, 6* — secțiuni de calcul ($\Delta x = 500$ m).

Pentru studiul stabilității hidraulice de funcționare a uzinei hidroelectrice s-a considerat o manevră de putere la centrală de la $N_1 = 120$ MW la $N_2 = 80$ MW, iar rezultatele calculelor privind mișcarea nepermanentă

a apei din canal sînt prezentate sub formă grafică în figura 3, unde s-a notat cu h — adîncimea apei în canal.

4.2. Cea de a doua metodă s-a aplicat de asemenea în numeroase modele de simulare atît a mișcării nestaționare în albii sau canale deschise cu sisteme de reglaj, cît și a propagării viiturilor sau chiar a undelor de inundație produse în ipoteza unor accidente la baraje.

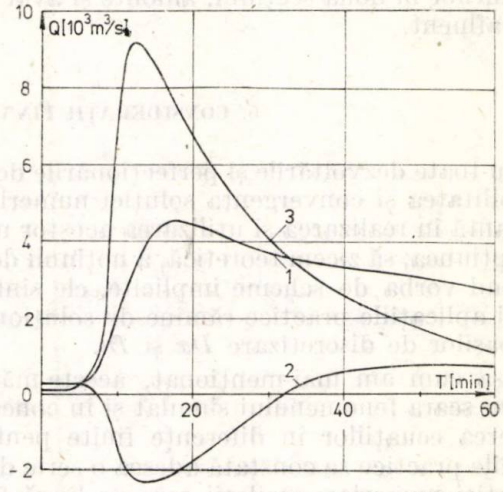


Fig. 4. — Curbe de variație în timp a debitelor în două secțiuni pe rîu — amonte și aval — de confluența cu un afluent.

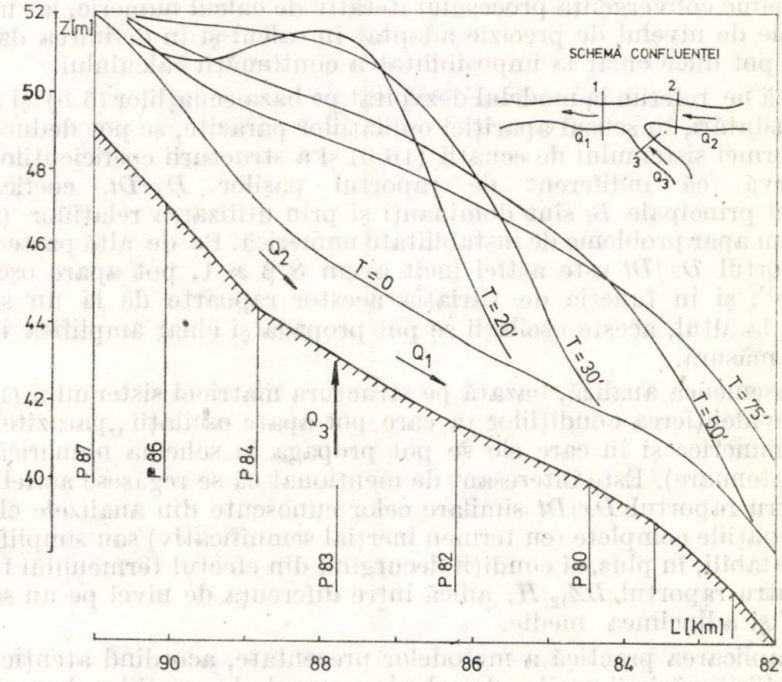


Fig. 5. — Curbe de variație în timp a nivelurilor în aceleași secțiuni.

Sistematizarea scrierii sistemului de ecuații în diferențe finite și a modului de rezolvare a acestui sistem permit introducerea ușoară a unor condiții limită în secțiuni intermediare, corespunzător celor mai diverse situații sau sisteme de reglaj și control.

Rezultatele prezentate spre exemplificare se referă la cazul propagării unei unde de viitură pe o albie naturală, cu pantă relativ ridicată și o undă relativ rapidă. În figurile 4 și 5 sînt redate variația în timp a debitelor și nivelurilor în două secțiuni, amonte și aval de o secțiune de confluență cu un afluent.

5. CONSIDERAȚII FINALE

Cu toate dezvoltările și perfecționările de pînă acum, aspectele legate de stabilitatea și convergența soluției numerice rămîn încă o preocupare importantă în realizarea și utilizarea acestor modele numerice. Chiar dacă în accepțiunea, să zicem teoretică, a noțiunii de stabilitate a soluției numerice, fiind vorba de scheme implicite, ele sînt teoretic stabile, în dezvoltările și aplicațiile practice rămîne de soluționat problema stabilirii mărimilor pașilor de discretizare Dx și Dt.

Așa cum am mai menționat, aceste mărimi trebuie să fie în concordanță cu scara fenomenului simulat și în concordanță cu ipotezele admise n scrierea ecuațiilor în diferențe finite pentru definirea modelului. În aplicațiile practice se constată adesea o serie de oscilații așa-zis „parazite" ale soluției numerice, oscilații care pe lîngă faptul că alterează această soluție, reduc convergența procesului iterativ de calcul numeric, iar uneori (în funcție de nivelul de precizie adoptat în calcul și în definirea datelor de bază) pot duce chiar la imposibilitatea continuării calculului.

Dacă ne referim la modelul dezvoltat pe baza ecuațiilor (5.b) și (6.b), unele constatări, în sensul apariției oscilațiilor parazite, se pot deduce din analiza formei sistemului de ecuații (16.b) și a structurii coeficienților săi. Se observă că indiferent de raportul pașilor Dx/Dt, coeficienții diagonalei principale B_i sînt dominanți și prin utilizarea relațiilor (20.b) și (21.b) nu apar probleme de instabilitate numerică. Pe de altă parte însă, dacă raportul Dx/Dt este astfel încît avem $S/\beta \gg 1$, pot apare oscilații „parazite", și în funcție de variația acestor rapoarte de la un sector de calcul la altul, aceste oscilații se pot propaga și chiar amplifica într-o anumită măsură.

O asemenea analiză, bazată pe structura matricei sistemului (16.b), permite evidențierea condițiilor în care pot apare oscilații „parazite" ale soluției numerice și în care ele se pot propaga în schema numerică (cu sau fără atenuare). Este interesant de menționat că se regăsesc astfel condiții pentru raportul Dx/Dt similare celor cunoscute din analizele clasice pentru ecuațiile complete (cu termen inerțial semnificativ) sau simplificate și se pot stabili, în plus, și condiții decurgînd din efectul termenului frecărilor, pentru raportul DZ_{12}/H, adică între diferența de nivel pe un sector de calcul și adîncimea medie.

În aplicarea practică a metodelor prezentate, acordînd atenție specială stabilirii mărimii pașilor de calcul în sensul observațiilor de mai sus,

s-au obținut rezultate bune atît sub aspectul preciziei și acurateței soluțiilor, cît și economicității aplicațiilor (timp și volum de calcul).

Primit la redacție la 17 octombrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. M. B. ABBOTT, F. IONESCU, *On the numerical computation of nearly horizontal flows*, Journal of Hydraulic Research IAHR, 5, (1967).
2. M. B. ABBOTT, *Computational Hydraulics — a short pathology*, Journal of Hydraulic Research IAHR, 4, (1976).
3. R. AMAFTIESEI, F. IONESCU, *O metodă de calcul al mișcării nepermanente a apei în albii deschise*, Hidrotehnica, 1, (1966).
4. S. HÂNCU, M. POPESCU, E. ZAHARESCU ș.a., *Hidraulică aplicată. Simularea numerică a mișcării nepermanente a fluidelor*, Edit. Tehnică, București, 1985.
5. K. MAHMOUD, V. YEVJEVICH (sub red.), *Unsteady flow in open channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, U.S.A., 1975.
6. M. POPESCU, *Stabilité du fonctionnement des usines hydroélectriques et des stations de pompage à adductions mixtes munies de régulateurs automatiques*, Proceedings of the IAHR Symposium on Fluid Motion Stability in Hydraulic Systems with Automatic Control, Bucharest, September 26—29, 1976.

APLICAREA METODEI IMAI-LAMLA-IACOB LA STUDIUL UNOR MIȘCĂRI SUBSONICE POTENȚIALE

de N. MARCOV

Universitatea din București

Particulele unui fluid compresibil și izentropic se deplasează în prezența unui profil plan simetric semiinfinit. Ecuațiile bordului de impact al profilului depind de un parametru $a \in (1, 2)$ și ele sînt specificate în formulele (5). Ecuațiile neliniare ale mișcării potențiale a fluidului sînt studiate pe baza metodei Imai-Lamla-Iacob. Utilizînd numărul lui Mach de la mari distanțe de bordul profilului, se alege parametrul mic b precizat în formula (6). În formulele (19) și (20) se propune o variantă parametrică de aproximare a curbei izentropice (2). Sistemului ecuațiilor cu derivate parțiale (1)—(3) i se asociază forma complexă (13). Utilizarea variabilelor hodografice w și s conduce la sistemul neliniar (33) pentru determinarea potențialului complex F. Atît acest potențial, cît și viteza complexă W corespunzătoare se dezvoltă în serie limitată la trei termeni, în raport cu parametrul mic b, conform notațiilor (38), respectiv (39). Primii termeni ai dezvoltărilor în serie reprezintă potențialul f, respectiv viteza complexă w corespunzătoare deplasării unui fluid incompresibil în jurul aceluiași profil (5). Acest potențial este precizat în formulele (27) și (29). Pentru coeficienții corecțiilor liniare de compresibilitate ale potențialului f și vitezei w, notate Ab, respectiv Bb, au fost obținute reprezentările generale (53), respectiv (63) cu ajutorul a două funcții g și h de o variabilă complexă w din D. Pentru domeniul D precizat în formula (23), domeniu specific profilului considerat, se calculează expresiile explicite (59), respectiv (61) ale acestor funcții. Pentru coeficientul corecției pătratice A_2bb a potențialului $Ab + f$ se precizează reprezentarea generală (82) în care funcțiile H_1, H_2 și H sînt soluții ale unor probleme la limită liniare pentru domeniul D. Soluțiile acestor probleme liniare sînt date numai pentru cazul limită $a = 2$. Forma profilului și coeficienții de presiune corespunzători acestui caz limită sînt precizați în figura 2.

Testele efectuate recent în tunelul aerodinamic *EOLIN 350 CE 5V* arată că în vecinătatea bordului de impact al unei plăci plane subțiri se află o zonă în care presiunea statică scade sensibil sub valoarea presiunii statice din camera de experiență. Parametrii geometrici și cinematici ai acestei zone depresionare depind de grosimea plăcii, de forma bordului de impact al acesteia și de compresibilitatea fluidului antrenat în mișcare. Pentru a evalua această dependență se studiază teoretic mișcarea subsonică a unui fluid izentropic în jurul unui profil simetric semimărginit. Ecuațiile de mișcare sînt preluate din lucrările [1], [2] sau [3], dar într-o formă adimensională în care viteza, densitatea și presiunea de la mari distanțe de bordul profilului sînt considerate drept elemente de referință. Această alegere a elementelor de referință permite obținerea unei variante de aproximare a legii izentropice de compresibilitate, variantă care pentru anumite profile aerodinamice rămîne acceptabilă atît pentru mișcări subsonice, cît și pentru unele mișcări supersonice.

Pentru a determina o soluție aproximativă a ecuațiilor neliniare de mișcare a fluidului izentropic în jurul unui profil, se utilizează metoda

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 2, 1988, P. 115—130

Imai-Lamla-Iacob [4]. Pe baza acestei metode, potențialul complex de mișcare F și viteza complexă W se dezvoltă în serii limitate la trei termeni

$$F = f + Ab + A_2b^2 + \ldots, \quad W = w + Bb + B_2b^2 + \ldots, \quad b = M_\infty^2/4,$$

în care numărul lui Mach M_∞ are prin ipoteză valori din intervalul $(0,1/2)$. Coeficienții acestor dezvoltări se determină ca soluții ale unor probleme la limită liniare în care condițiile la limită corespund condiției de alunecare a particulelor fluide pe frontiera profilului. Uzual, argumentele acestor coeficienți sînt coordonatele complexe z și $\bar{z}$ ale unei particule fluide, iar $f(z)$ și $w(z)$ reprezintă potențialul, respectiv viteza complexă asociate unui fluid incompresibil ale cărui particule se deplasează în prezența aceluiași profil. Deoarece domeniul fluid este nemărginit, se preferă în cele ce urmează utilizarea variabilelor hodografice w și $\bar{w}$ al căror domeniu de variație este mărginit. Pentru simplificarea scrierii unor formule, variabilele $\bar{w}$ și $\bar{z}$ se notează s, respectiv t.

Coeficienții A, A_2 și B, funcții de argumentele w și s, admit reprezentări generale în care intervin funcții de o singură variabilă complexă. Astfel, coeficientul A verifică ecuația (44), condiția la limită (46) și admite reprezentarea (53) în care integrala $g(w)$ depinde liniar de potențialul $f(w)$, iar funcția $h(w)$ verifică condiția la limită (55). Coeficientul A_2 verifică ecuația (45′), condiția la limită (46) și admite reprezentarea (82) în care integralele g_2 și h_2 depind liniar de f, respectiv h, iar funcțiile H_1, H_2 și H verifică condițiile la limită (83). Coeficientul B are expresia (63), iar coeficientul P din dezvoltarea limitată (52) a presiunii p, are reprezentarea (69).

În cazul în care particulele fluidului se deplasează în prezența profilului plan simetric semimărginit specificat în formulele (5) și (5″), se obțin expresiile explicite ale funcției g și ale soluției h a problemei la limită liniare (55). Astfel, pe baza formulelor (70)—(72), se pot preciza valorile aproximative ale vitezei maxime U_e și ale presiunii minime p_e din extremitățile bordului de impact al profilului, valori care depind de numărul lui Mach, M_∞ și de parametrul de formă, a, caracteristic profilului. Coeficienții $B(a, a)$, respectiv $P(a, a)$ care intervin în expresiile acestor valori sînt reprezentați grafic în figura 1.

Expresiile explicite obținute pentru funcțiile g, g_2, h și h_2 nu pot fi aplicate direct atunci cînd parametrului de formă a i se atribuie valoarea 2. Pentru a obține ușor limitele acestor expresii în punctul $a = 2$, s-a renunțat la o simplificare excesivă a formelor inițiale echivalente ale acestor expresii, și s-a introdus argumentul auxiliar w_a și funcțiile f_1 și f_4 precizate în formulele (56), (57), respectiv (87). Forma profilului și coeficienții de presiune corespunzători valorii $a = 2$ sînt precizați grafic în figura 2.

ECUAȚII ALE MIȘCĂRII UNUI FLUID COMPRESIBIL

Studiul mișcării potențiale și staționare a unui fluid compresibil izentropic într-un sistem de referință adimensional xOy, presupune determnarea vitezelor cartesiene $U \cdot V_\infty$ și $V \cdot V_\infty$, a potențialuli ureal $V_\infty\varphi$, a

funcției de curent $V_\infty\psi$, a densității ρ, a presiunii p și a vitezei de propagare a sunetului $\tilde{a}$ corelate prin ecuațiile

$$U = \partial\varphi/\partial x = (\rho_\infty/\rho)\,\partial\psi/\partial y,\quad V = \partial\varphi/\partial y = -(\rho_\infty/\rho)\,\partial\psi/\partial x, \tag{1}$$

$$p = p_\infty(\rho/\rho_\infty)^\gamma,\ \tilde{a}^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = \gamma p/\rho = a_\infty^2\,(\rho/\rho_\infty)^{\gamma-1}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\,V_\infty^2\,(1 - U^2 - V^2) = \int_{v_\infty}^{p} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\gamma - 1}\,(\tilde{a}^2 - a_\infty^2), \tag{3}$$

în care γ este o constantă reală supraunitară, iar viteza V_∞, densitatea ρ_∞, presiunea p_∞ și viteza de propagare a sunetului a_∞ sînt constante pozitive specifice particulelor fluide de la mari distanțe de profilul în jurul căruia are loc mișcarea fluidă. Condiția de alunecare a particulelor fluidului ideal pe frontiera profilului conduce la condiția de anulare a funcției de curent pe această frontieră

$$(x, y) \in \mathfrak{L} \Rightarrow \psi(x, y) = 0. \tag{4}$$

În cele ce urmează se construiește o soluție aproximativă a ecuațiilor precizate pentru cazul unui profil al cărui bord de impact $\mathfrak{B}$ are ecuațiile parametrice

$$x = (1 - \cos\theta)/(a - 1),\quad y = \theta + \sin\theta,\quad \theta \in [-\pi, +\pi], \tag{5}$$

în care $a \in (1, 2)$. Frontiera $\mathfrak{L}$ a profilului este netedă și include semidreptele $\sum_\pm$ tangente paralele din extremitățile bordului de impact,

$$\sum\nolimits_\pm = \left\{(x, \pm\pi) \mid x \in \left(\frac{2}{a-1}, \infty\right)\right\},\quad \mathfrak{L} = \mathfrak{B} \cup \sum\nolimits_+ \cup \sum\nolimits_-. \tag{5''}$$

Utilizînd numărul lui Mach, M_∞, notăm

$$M_\infty = V_\infty/a_\infty,\quad b = \frac{1}{4}\,M_\infty^2,\quad c = \frac{1}{\gamma - 1},\quad a_\infty = \gamma p_\infty/\rho_\infty, \tag{6}$$

$$X = (\gamma - 1)\,b(U^2 + V^2 - 1). \tag{7}$$

Din integrala lui Bernoulli (3) și din (2) obținem

$$\rho/\rho_\infty = (\tilde{a}/a_\infty)^{2c} = (1 - 2X)^c. \tag{8}$$

Utilizînd variabilele complexe

$$z = x + \mathrm{i}y,\quad t = x - \mathrm{i}y, \tag{9}$$

ecuațiile (1) pot fi retranscrise sub forma

$$W = U - \mathrm{i}V = \partial\varphi/\partial x - \mathrm{i}\partial\varphi/\partial y = 2\partial\varphi/\partial z = 2\mathrm{i}(\rho_\infty/\rho)\,\partial\psi/\partial z, \tag{10}$$

$$S = U + \mathrm{i}V = \partial\varphi/\partial x + \mathrm{i}\partial\varphi/\partial y = 2\partial\varphi/\partial t = -2i(\rho_\infty/\rho)\,\partial\psi/\partial t,$$

în care W reprezintă viteza complexă adimensională a particulelor fluide. Notăm cu F potențialul complex adimensional al mișcării fluidului compresibil,

$$F = \varphi + i\psi, \quad G = \varphi - i\psi. \tag{11}$$

Sistemul (10) pentru funcțiile φ și ψ conduce astfel la un sistem pentru funcțiile F și G

$$W = \partial(F + G)/\partial z = (\rho_\infty/\rho)\, \partial(F - G)/\partial z, \tag{12}$$

$$S = \partial(F + G)/\partial t = -(\rho_\infty/\rho)\, \partial(F - G)/\partial t,$$

altfel scris

$$\partial F/\partial t = r\, \partial G/\partial t, \quad \partial G/\partial z = r\, \partial F/\partial z, \tag{13}$$

unde raportul r are expresia

$$r = \frac{1 - \rho/\rho_\infty}{1 + \rho/\rho_\infty} = \frac{2}{1 + (1 - 2X)^c} - 1, \quad X = (\gamma - 1)\, b(WS - 1). \tag{14}$$

Ultima egalitate rezultă din (7) și (10) și ea precizează că raportul r depinde conform relațiilor (12) de derivatele funcțiilor necunoscute F și G. Condiția la limită (4) conduce la restricțiile următoare pentru soluția sistemului (13):

$$(x, y) \in \mathfrak{L} \Rightarrow t = \bar{z} \Rightarrow \operatorname{Im} F = -\operatorname{Im} G = 0. \tag{15}$$

VARIANTĂ PENTRU APROXIMAREA CURBEI IZENTROPICE

Densitatea fluidului intervine în sistemul (13) prin intermediul raportului r. Dezvoltînd în serie acest raport în vecinătatea originii se obține

$$r = \operatorname{th}\left(-\frac{c}{2} \ln (1 - 2X)\right) =$$

$$= cX\{1 + X - (c^2 - 4)X^2/3 + (2 - c^2)X^3 - (2c^2 - 1)(16 - c^2)X^4/15 + \ldots\} \tag{16}$$

În cazul aerului, primii doi termeni ai acestei dezvoltări sînt semnificativi într-o vecinătate a originii suficient de cuprinzătoare pentru unele aplicații de laborator.

Notă. Eroarea relativă ε, definită punctual prin

$$r = cX(1 + X)\,[1 + \varepsilon(X)], \tag{17}$$

are evaluarea următoare:

$$c = c_{aer} = 2{,}475, \quad X \in [-0{,}29,\ 0{,}075] \Rightarrow |\varepsilon(X)| \in [0,\ 0{,}00577]. \tag{18}$$

Această evaluare este corectă pentru numere Mach M_∞ pînă la valoarea 1,69, dar cu condiția ca viteza maximă în fluid să nu fie mai mare decît

1,12 V_∞. Cînd viteza maximă mV_∞ este mai mare decît 1,12 V_∞, pentru a conserva evaluarea (18), se limitează numărul Mach M_∞ la valoarea

$$0{,}85/\sqrt{m^2-1}.$$

În condițiile aplicative în care restricțiile precedente pentru numărul Mach sînt verificate, se poate utiliza în locul relației (16), relația (17) cu $\varepsilon = 0$. Se obține astfel o variantă de aproximare parametrică a curbei isentropice (2),

$$\rho/\rho_\infty = \frac{2}{1+cX(1+X)} - 1, \quad r = cX(1+X). \tag{19}$$

Presiunea $p(X)$ se obține pe baza integralei lui Bernoulli (3) și a notației (7),

$$-2ca_\infty^2 X = \int_0^X \frac{p'(X)}{\rho(X)}\,\mathrm{d}X.$$

Prin derivare și integrare rezultă

$$p = p_\infty - 2c\,a_\infty^2 \int_0^X \rho(X)\,\mathrm{d}X = p_\infty - \frac{1}{2}\,\rho_\infty V_\infty^2 (U^2+V^2-1)\,k(X), \tag{20}$$

unde

$$k(X) = \frac{1}{X}\int_0^X \frac{\rho}{\rho_\infty}\,\mathrm{d}X = \frac{4}{\sqrt{c(4-c)}\,X}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{c(4-c)}\,X}{2+cX} - 1. \tag{21}$$

În vecinătatea originii are loc dezvoltarea în serie

$$k(X) = 1 - cX + 2c(c-1)X^2/3 + \ldots. \tag{21''}$$

Pentru calculul aproximativ al presiunii se obține astfel din (20) expresia

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\,\rho_\infty V_\infty^2 (U^2+V^2-1)\left\{1 - \frac{1}{4}M_\infty^2(U^2+V^2-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{2-\gamma}{24}M_\infty^4 (U^2+V^2-1)^2 + \ldots\right\}. \tag{22}$$

APROXIMAȚIA FLUIDULUI INCOMPRESIBIL

Mișcarea unui fluid incompresibil ideal în jurul profilului specificat în formulele (5) și (5''), cînd particulele fluide de la mari distanțe de profil au o viteză de mărime adimensională 1, paralelă cu axa de simetrie a profilului, este caracterizată de un potențial complex f funcție de variabila complexă z. Acest potențial poate fi precizat sub formă parametrică prin intermediul vitezei complexe w a fluidului incompresibil. Domeniul D

al variabilei w este un disc cu tăietură pe segmentul real I, iar frontiera D a acestui domeniu este constituită dintr-un cerc C reunit cu segmentul I,

$$D = \{w \in \mathbb{C} \,|\, (w - a/2)(\bar{w} - a/2) < a^2/4\} \setminus I, \; I = [1, a), \tag{23}$$

$$C = \{w \in \mathbb{C} \,|\, 2w\bar{w} - a(w + \bar{w}) = 0\}, \; \partial D = C \cup I, \; a \in (1, 2). \tag{24}$$

Ecuația ce definește cercul C poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$a_2 = (2 - a)/a, \quad |1 - w| = |1 - a_2 w|, \quad \forall\, w \in C. \tag{25}$$

Altfel spus, cercul C admite reprezentarea parametrică

$$w \in C \Rightarrow \frac{1 - w}{1 - a_2 w} = e^{i\theta}, \quad w = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - a_2 e^{i\theta}}, \quad \theta \in [-\pi, +\pi]. \tag{26}$$

Potențialul complex $f(w)$ are expresiile următoare :

$$f = \frac{w}{w-1} + \frac{w}{1 - a_2 w} = w^2 \left(\frac{1}{w-1} + \frac{a_2}{1 - a_2 w} \right). \tag{27}$$

Partea imaginară a acestui potențial se anulează în punctele cercului C conform reprezentării (26), și evident în punctele segmentelor $[0, 1)$ și $(1, a)$,

$$w \in C \Rightarrow f = a(1 - \cos\theta)/(a - 1). \tag{27''}$$

Prin derivarea potențialului complex considerat se obține

$$f' = (1 - a_2 w)^{-2} - (w-1)^{-2} = -4(a-1)a^{-2} w\,(a - w)(1 - a_2 w)^{-2}(1 - w)^{-2}. \tag{27'}$$

Coordonata complexă $z(w)$ a unei particule fluide se obține ca soluție a ecuației diferențiale

$$z' = f'/w, \quad z(0) = 0, \tag{28}$$

și ea are expresia

$$z = \int_0^w (f'/w)\, dw = f/w + f_2 = 1/(w - 1) + 1/(1 - a_2 w) + f_2, \tag{29}$$

unde

$$f_2 = \int_0^w f\, w^{-2}\, dw = \ln(1 - w) - \ln(1 - a_2 w). \tag{30}$$

Utilizînd reprezentarea (26) se obțin restricțiile

$$w \in C \Rightarrow f_2 = i\theta, \tag{30''}$$

$$w \in C \Rightarrow z = (1 - \cos\theta)/(a - 1) + i(\theta + \sin\theta), \tag{29''}$$

$$V \in (1, a), \quad w = V \dotplus i0 \Rightarrow z = x(V) \dot{+} i\pi. \tag{29'}$$

Altfel spus, imaginea cercului C prin funcția z definită în formula (29) corespunde bordului de impact (5), iar imaginea tăieturii $(1, a)$ corespunde semidreptelor paralele (5''). Prin urmare condiția cinematică de alunecare a particulelor fluidului incompresibil pe profilul aerodinamic considerat este verificată.

$$z \in \{x + iy \,|\, (x, y) \in \mathfrak{D}\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = 0. \tag{31}$$

ECUAȚII PENTRU PRIMELE DOUĂ CORECȚII DE COMPRESIBILITATE

Se trece de la coordonatele complexe (z, t) la coordonatele (w, s) pe baza funcției $z : D \to z(D)$ definite în formulele (29) și (30) pentru care domeniul D și codomeniul $z(D)$ sînt invariante în raport cu operația de conjugare complexă,

$$z = z(w), \quad t = \bar{z}(s), \quad w = u - iv, \quad s = u + iv. \tag{32}$$

Sistemul (13) se scrie astfel sub forma echivalentă

$$\partial F/\partial s = r\, \partial G/\partial s, \quad \partial G/\partial w = r\, \partial F/\partial w, \tag{33}$$

în care raportul r depinde de produsul variabilelor hodografice

$$W = T(w)\, \partial(F + G)/\partial w, \quad S = \bar{T}(s)\, \partial(F + G)/\partial s \tag{34}$$

și unde

$$T(w) = \frac{1}{z'(w)} = \frac{w}{f'(w)} = -\frac{a^2(1 - w)^2\,(1 - a_2 w)^2}{4(a - 1)\,(a - w)}, \quad \bar{T}(s) = \frac{1}{\bar{z}'(s)}. \tag{35}$$

Pentru cazul aproximării curbei izentropice pe baza formulelor (19) și (20) rezultă

$$r = cX(1 \dot{+} X), \quad X = (\gamma - 1)\, b(WS - 1). \tag{36}$$

Condițiile la limită (15) se transformă în restricțiile

$$w = \bar{s} \in C \cup (1, a) \Rightarrow \operatorname{Im} F = -\operatorname{Im} G = 0. \tag{37}$$

Se presupune că soluția (F, G) a sistemului (33) este dezvoltabilă în serie în raport cu parametrul cinematic b precizat în formula (6),

$$F = f(w) + Ab + A_2 b^2 + \ldots, \quad G = \bar{f}(s) + \tilde{A}b + \tilde{A}_2 b^2 + \ldots, \tag{38}$$

$$W = w + Bb + B_2 b^2 + \ldots, \quad S = s + \tilde{B}b + \tilde{B}_2 b^2 + \ldots. \tag{39}$$

Din aceste dezvoltări și din (34) rezultă

$$B = T(w)\, \partial(A + \tilde{A})/\partial w, \quad \tilde{B} = \bar{T}(s)\, \partial(A + \tilde{A})/\partial s, \tag{40}$$

$$B_2 = T(w)\, \partial(A_2 + \tilde{A}_2)/\partial w, \quad \tilde{B}_2 = \bar{T}(s)\, \partial(A_2 + \tilde{A}_2)/\partial s, \tag{41}$$

$$WS - 1 = ws - 1 + (w\tilde{B} + sB)b + (w\tilde{B}_2 + sB_2 + \tilde{B}B)b^2 + \ldots, \quad (42)$$

$$r = b(WS - 1)(1 + (\gamma - 1)(WS - 1)b) = b(ws - 1 + (w\tilde{B} + sB)b + \ldots$$
$$\ldots)(1 + (\gamma - 1)\, b(ws - 1) + \ldots),$$
$$r = b(ws - 1 + Rb + \ldots), \quad R = (\gamma - 1)(ws - 1)^2 + w\tilde{B} + sB. \quad (43)$$

Substituind (38) și (43) în sistemul (33) rezultă

$$b\partial A/\partial s + b^2\partial A_2/\partial s + \ldots = b(ws - 1 + Rb + \ldots)(\bar{f}'(s) +$$
$$+ b\partial\tilde{A}/\partial s + \ldots) = \tilde{E}b + \tilde{E}_2b^2 + \ldots,$$
$$b\partial\tilde{A}/\partial w + b^2\partial\tilde{A}_2/\partial w + \ldots = b(ws - 1 + Rb + \ldots)(f'(w) +$$
$$+ b\partial\tilde{A}/\partial w + \ldots) = Eb + E_2b^2 + \ldots,$$
$$\partial A/\partial s = (ws - 1)\bar{f}'(s) = \tilde{E}, \quad \partial\tilde{A}/\partial w = (ws - 1)\, f'(w) = E, \quad (44)$$
$$\partial A_2/\partial s = R\bar{f}'(s) + (ws - 1)\ \partial\tilde{A}/\partial s = \tilde{E}_2, \quad (45')$$
$$\partial\tilde{A}_2/\partial w = Rf'(w) + (ws - 1)\ \partial A/\partial w = E_2, \quad (45)$$

în care ultimele egalități au rolul unor notații pentru diferite expresii. Expresiile E și $\tilde{E}$ sînt cunoscute conform formulelor (35), iar expresiile E_2 și $\tilde{E}_2$ sînt calculabile odată cu determinarea soluțiilor ecuațiilor (44).
Din formulele (37) și (38) se obțin condițiile la limită

$$w = \bar{s} \in C \cup (1, a) \Rightarrow \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \tilde{A} = \operatorname{Im} A_2 = \operatorname{Im} \tilde{A}_2 = 0. \quad (46)$$

Substituind formulele (44) și (45) în (40) se obțin expresiile primelor două corecții de compresibilitate pentru viteze,

$$B = T(w)\ \partial A/\partial w + w(ws - 1), \quad \tilde{B} = \bar{T}(s)\ \partial\tilde{A}/\partial s + s(ws - 1), \quad (47)$$
$$B_2 = T(w)\ (\partial A_2/\partial w + (ws - 1)\ \partial A/\partial w) + Rw, \quad (48')$$
$$\tilde{B}_2 = \bar{T}(s)\ (\partial\tilde{A}_2/\partial s + (ws - 1)\ \partial\tilde{A}/\partial s) + Rs. \quad (48)$$

Prin urmare rezultă expresiile definite în formulele (43) și (45),

$$P = w\tilde{B} + sB - (ws - 1)^2 = w^2s^2 - 1 + w\bar{T}(s)\ \partial\tilde{A}/\partial s$$
$$+ sT(w)\ \partial A/\partial w, \quad (49)$$
$$R = w\tilde{B} + sB + (\gamma - 1)(ws - 1)^2 = P + \gamma(w^2s^2 - 1) - 2\gamma(ws - 1), \quad (50)$$
$$E_2 = -2\gamma E + (\gamma + 1)\ (w^2s^2 - 1)\ f'(w) + wf'(w)\ \bar{T}(s)\ \partial\tilde{A}/\partial s +$$
$$+ (2ws - 1)\ \partial A/\partial w, \quad (51)$$
$$\tilde{E}_2 = -2\gamma\tilde{E} + (\gamma + 1)\ (w^2s^2 - 1)\bar{f}'(s) + s\bar{f}'(s)\ T(w)\ \partial A/\partial w +$$
$$+ (2ws - 1)\ \partial\tilde{A}/\partial s. \quad (51')$$

Pentru calculul presiunii în fluidul compresibil se utilizează formulele (10), (14), (22) şi (42),

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 (WS-1)\{1 - (WS-1)b + \\ + \frac{2}{3}(2-\gamma)(WS-1)^2 b^2 + \ldots\}, \tag{22''}$$

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \{ws - 1 + Pb + P_2 b^2 + \ldots\}, \tag{52}$$

în care coeficientul P este specificat în formula (49), şi

$$P_2 = -2(ws-1)P - \frac{2}{3}(\gamma+1)(ws-1)^3 + \tilde{B}B + w\tilde{B}_2 + sB_2. \tag{52''}$$

CALCULUL CORECŢIILOR LINIARE DE COMPRESIBILITATE

Soluţiile A şi $\tilde{A}$ ale ecuaţiilor cu derivate parţiale (44) admit reprezentările următoare :

$$A = w\bar{g}(s) - \bar{f}(s) - h(w), \quad \tilde{A} = sg(w) - f(w) - \bar{h}(s), \tag{53}$$

în care funcţia g este definită punctual,

$$g(w) = \int wf'\,dw = wf - \int f dw, \tag{54}$$

iar funcţia h trebuie determinată astfel încît să fie verificată condiţia la limită (46). Conform proprietăţii (27'') partea imaginară a potenţialului f se anulează pe frontiera domeniului astfel încît funcţiei $h : D \to \mathbb{C}$ i se impune condiţia la limită

$$w \in C \cup (1, a) \Rightarrow \operatorname{Im} h(w) = \operatorname{Im}\{w\,\overline{g(w)}\}. \tag{55}$$

Utilizînd funcţiile

$$w_a = a_2(1 - 2w/a), \quad 1 + w_a = 2(1 - a_2 w)/a, \quad a_2 = 2/a - 1, \tag{56}$$

$$f_1 = a^{-\frac{2}{2}}(w_a - \ln(1+w_a)) = \int_0^{w_a} \frac{t}{1+t}\,a^{-\frac{2}{2}}\,dt = \int_{a/2}^{w}\left(\frac{w}{1-a_2 w} - 1\right)dw \tag{57}$$

şi alegînd convenabil constanta de integrare în (54), se obţine, pe baza primei egalităţi din (27), expresia

$$f_3 = \int f dw = f_1 + \int\left(\frac{w}{w-1} + 1\right)dw = \ln\frac{2(1-w)}{a} + 2w - a_2 + f_1 =$$

$$= \ln \frac{2(1-w)}{a} - \ln(1+w_a) + w_a + 2w - a_2 + (1-a_2^2)f_1 =$$

$$= f_2 + a_2(1 - 2w/a) + 2w - a_2 + (1 - a_2^2)f_1. \tag{58}$$

Prin urmare funcția g din (54) are expresia

$$g(w) = wf(w) - a_1 f_1(w) - f_2(w) - a_3 w, \tag{59}$$

în care funcțiile f_1 și f_2 sînt specificate în formulele (57), respectiv (30), iar a_1 și a_3 sînt constante reale,

$$a_1 = 1 - a_2^2 = 4(a-1)a^{-2}, \quad a_3 = 2 - 2a_2/a = 2(a-1)(a+2)a^{-2},$$

$$a_2 = 2/a - 1. \tag{60}$$

Funcția h se obține pe baza condiției la limită (55) completată cu reprezentarea (59),

$$\operatorname{Im} h(w) = \operatorname{Im}\{ww\overline{f(w)} - a_1 w\overline{f_1(w)} - w\overline{f_2(w)} - a_3 w\bar{w}\} =$$

$$= 0 + \operatorname{Im}\{a_1 \frac{aw}{2w-a} f_1(w) + wf_2(w)\} - 0. \tag{55''}$$

A doua egalitate a rezultat din proprietatea (27''), din ecuația cercului din (24), respectiv din proprietatea (30''),

$$w \in C \Rightarrow w\bar{w} \operatorname{Im} \overline{f(w)} = 0, \quad \bar{w} = \frac{aw}{2w-a}, \quad \overline{f_2(w)} = -f_2(w). \tag{55'}$$

Această egalitate este corectă și în punctele tăieturii $(1, a)$ deoarece în aceste puncte w, f și f_1 au valori reale. Ultima egalitate (57) arată că f_1 se anulează în punctul $a/2$. Prin urmare funcția h are expresia

$$h(w) = a_1 \frac{aw}{2w-a} f_1(w) + wf_2(w). \tag{61}$$

Substituind expresiile (59) și (61) în (53) rezultă corecția liniară a potențialului complex pentru mișcarea fluidului compresibil,

$$A = (ws-1)\bar{f}(s) - a_1\left[w\bar{f}_1(s) + \frac{aw}{2w-a} f_1(w)\right] - w[\bar{f}_2(s) + f_2(w)] - a_3 ws. \tag{62}$$

Înlocuind (53) în (47) se obține corecția liniară a vitezei complexe a fluidului compresibil,

$$B = w(ws-1) + [\bar{g}(s) - h'(w)]\, w/f'(w), \tag{63}$$

unde

$$h'(w) = f_2 + wf_2' + a_1 f_1' \frac{aw}{2w-a} + a_1 f_1 \left(\frac{aw}{2w-a}\right)' =$$

$$= f_2 + f/w + a_1\left(\frac{w}{1 - a_2 w} - 1\right)\frac{aw}{2w - a} - a_1 f_1 a^2 (2w - a)^{-2},$$

$$h'(w) = z(w) + \frac{a_1 w}{1 - a_2 w} - a_1(a_2/w_a)^2 f_1(w), \tag{64}$$

$$\frac{w}{f'(w)} = \frac{(1 - w)^2 (1 - a_2 w)^2}{a_1(w - a)}.$$

Prin derivare, pe baza formulelor (57) și (54) se obține

$$h''(w) = wf'(w) + a_1(1 - a_2 w)^{-2} + \frac{2a_1 a_2}{aw_a(1 + w_a)} - \frac{4}{a} a_1(a_2/w_a)^3 f_1(w), \tag{65}$$

$$h''(a) = a_1\left\{(a - 1)^{-2} - 1/(a - 1) + \frac{4}{a} f_1(a)\right\}, \quad g'(a) = 0,$$

$$g''(a) = af''(a).$$

Substituind (59) și (64) în expresia (53), rezultă

$$\partial A/\partial w = \bar{g}(s) - h'(w) =$$

$$= s\bar{f}(s) - \bar{f}_2(s) - a_3 s - a_1\{\bar{f}_1(s) + w/(1 - a_2 w) - (a_2/w_a)^2 f_1(w)\} - z(w) =$$

$$= (s + 1/s)\bar{f}(s) - \bar{z}(s) - z(w) - a_3 s - a_1\{\bar{f}_1(s) - (a_2/w_a)^2 f_1(w) + w/(1 - a_2 w)\} =$$

$$= -h''(a)(w - a) + \frac{1}{2} af''(a)(s - a)^2 + \ldots . \tag{66}$$

Analog, se obține

$$\partial \tilde{A}/\partial s = g(w) - \bar{h}'(s) =$$

$$= wf(w) - f_2(w) - a_3 w - a_1\{f_1(w) + s/(1 - a_2 s) - a_2^2 w_a^{-2}(s)\bar{f}_1(s)\} - \bar{z}(s) \tag{67}$$

$$\tilde{B} = s(ws - 1) + [g(w) - \bar{h}'(s)]\, s/\bar{f}'(s). \tag{68}$$

Corecția liniară de presiune dinamică rezultă din (49).

$$P = w^2 s^2 - 1 + ws\{[g(w) - \bar{h}'(s)]/\bar{f}'(s) + [\bar{g}(s) - h'(w)]/f'(w)\}. \tag{69}$$

Utilizînd dezvoltarea în serie (66) se poate calcula atît corecția de viteză cît și corecția liniară de presiune dinamică în extremitățile bordului de impact al profilului.

$$B(a, a) = \lim_{w \to a \pm 0i} B(w, \bar{w}) = a(a^2 - 1) - (a - 1)^4 h''(a)/a_1,$$

$$B(a, a) = 2(a - 1)(a^2 - a + 1 - 2(a - 1)^3 f_1(a)/a), \tag{70}$$

unde

$$f_1(a) = -(\ln(1 - a_2) + a_2)a_2^{-2}, \quad a_2 = (2 - a)/a,$$
$$P(a, a) = 2aB(a, a) - (a^2 - 1)^2. \tag{71}$$

Viteza dimensională U_e și presiunea p_e din extremitățile bordului de impact al profilului au evaluările următoare :

$$U_e = V_\infty \left\{ a + \frac{1}{4} B(a, a) M_\infty^2 + \ldots \right\},$$
$$p_e = p_\infty - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \left\{ a^2 - 1 + \frac{1}{4} P(a, a) M_\infty^2 + \ldots \right\}. \tag{72}$$

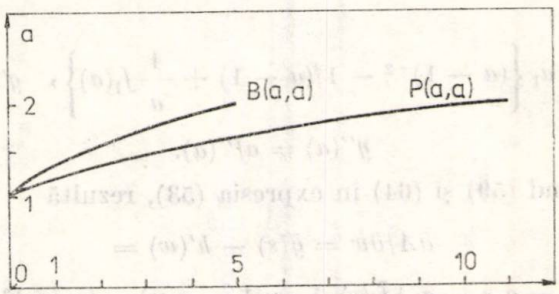


Fig. 1

În figura 1 se precizează dependența corecțiilor de viteză și de presiune din extremitățile bordului de impact (5) de forma acestui bord, formă caracterizată de valorile parametrului a din intervalul (1, 2).

CAZUL LIMITĂ $a = 2$

Formulele precedente nu pot fi aplicate direct atunci cînd parametrul a are valoarea 2. Trecînd la limită, în unele dintre aceste formule se obține soluția mișcării în jurul unui profil avînd bordul de impact (73),

$$a = 2, \quad x = 1 - \cos\theta, \quad y = \theta + \sin\theta, \quad \theta \in [-\pi, +\pi], \tag{73}$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2, \quad f_1 = (1 - w)^2/2, \quad f_2 = \ln(1 - w),$$
$$f = 1 + w + 1/(w - 1), \quad w/f' = (w - 1)^2/(w - 2), \tag{74}$$
$$z = 1 + \ln(1 - w) + 1/(w - 1), \quad z' = f'/w,$$
$$g = (w^2 + 1)/2 - \ln(1 - w) + 1/(w - 1), \quad g' = wf',$$
$$h = w\ln(1 - w) + w(w - 1)/2, \quad h' = z + w - 1/2,$$
$$A = (w - 1)/(s - 1) - 1 - s + w\{(s^2 - w)/2 + 1 - \ln(1 - s)(1 - w)\},$$
$$s = \bar{w},$$

$$B = w(ws-1) + \frac{(w-1)^2}{w-2}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{w-1} - \ln(1-s)(1-w) - \right.$$

$$\left. - w + s^2/2\right\},$$

$$P = 2\mathrm{Re}\{\bar{w}B(w,\bar{w})\} - (w\bar{w}-1)^2,$$

$$F = f + \frac{1}{4}A\,M_\infty^2 + \ldots, \quad W = w + \frac{1}{4}B\,M_\infty^2 + \ldots,$$

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2\left(w\bar{w} - 1 + \frac{1}{4}P\,M_\infty^2 + \ldots\right).$$

Domeniul variabilei w este în acest caz un disc avînd ca diametru segmentul (0,2) şi avînd o tăietură pe segmentul (1, 2).

În punctele bordului de impact (73) se obţin valorile

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad f = 2x, \quad w = x - \mathrm{i}\sin\theta, \quad w\bar{w} = 2x,$$

$$A = 2x^2 - 3x, \quad B = w(2x - 3/2), \quad P = 4x^2 - 2x - 1, \qquad (75)$$

$$(p - p_\infty)/\left(\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2\right) = C_p = 1 - 2x + \frac{1}{4}(1 + 2x - 4x^2)\,M_\infty^2 + \ldots.$$

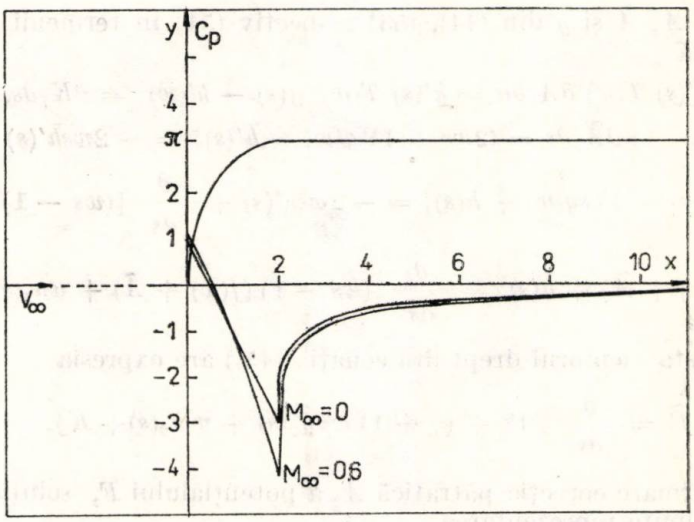


Fig. 2

În punctele semidreptelor care delimitează profilul, coeficientul de presiune se obţine sub formă parametrică,

$$x = 1 + \ln(u-1) + 1/(u-1), \quad u \in (1, 2),$$

$$P = u^4 - 1 + u(u-1)^2\left\{u - \frac{4}{u-2}\ln(u-1)\right\}, \tag{76}$$

$$C_p = 1 - u^2 - \frac{1}{4}P\,M_\infty^2 + \ldots .$$

În figura 2 se arată graficele coeficientului de presiune pentru mișcarea subsonică la numere Mach mici a unui fluid ideal compresibil și izentropic în jurul profilului (73), funcție de abscisa punctelor acestui profil.

ASUPRA CALCULULUI CORECȚIILOR PĂTRATICE DE COMPRESIBILITATE

Pentru a integra ecuația (45′) cu condiția la limită (46), se notează

$$A^* = -2\gamma A - (\gamma+1)\bar{f}(s) + (ws-1)(f(w)+\tilde{A}), \tag{77}$$

$$g_2(w) = \int w^2 f'(w)\,dw, \tag{78}$$

$$h_2(w) = wh(w) - \int 2w\,h'(w)\,dw, \tag{79}$$

$$K(w,s) = \frac{1}{2}w\{\bar{g}(s) - h'(w)\}^2/f'(w). \tag{80}$$

Substituind A, $\tilde{A}$ și g din (44), (53) respectiv (54) în termenii expresiei (51′), rezultă

$$s\bar{f}'(s)\,T(w)\,\partial A/\partial w = \bar{g}'(s)\,T(w)\,\{\bar{g}(s) - h'(w)\} = \partial K/\partial s,$$

$$(2ws-1)\,\partial\tilde{A}/\partial s = (2ws-1)\{g(w) - \bar{h}'(s)\} = -2ws\bar{h}'(s) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\{(ws-1)\,sg(w) + \bar{h}(s)\} = -2ws\bar{h}'(s) + \frac{\partial}{\partial s}\{(ws-1)\,(\bar{h}(s) +$$

$$+ f(w) + \tilde{A}) + \bar{h}(s)\} = \frac{\partial}{\partial s}\{(ws-1)\,(f(w)+\tilde{A}) + w\bar{h}_2(s)\}.$$

În felul acesta membrul drept din ecuația (45′) are expresia

$$\tilde{E} = \frac{\partial}{\partial s}\{A^* + (\gamma+1)\,w^2\,\bar{g}_2(s) + w\,\bar{h}_2(s) + K\}. \tag{81}$$

Prin urmare corecția pătratică A_2 a potențialului F, soluție a ecuației (45′), admite reprezentarea

$$A_2 = A^* + (\gamma+1)(w^2\,\bar{g}_2(s) - H_1(w)) + w\,\bar{h}_2(s) - H_2(w) + K - H(w), \tag{82}$$

în care funcțiile H_1, H_2, $H : D \to \mathbb{C}$ se determină astfel încît să fie verificate condițiile la limită (46). Părțile imaginare ale potențialului f, funcției ws și corecțiilor liniare A și $\tilde{A}$ se anulează pe frontiera specificată în (46).

Partea imaginară a funcției A^* din (77) este deci de valoare zero pe această frontieră. În acest caz, pentru determinarea funcțiilor H_1, H_2 și H rezultă condițiile la limită următoare:

$$w \in (1, a) \cup C \Rightarrow \operatorname{Im} H_1(w) = \operatorname{Im} \{w^2 \bar{g}_2(\bar{w})\},$$
$$\operatorname{Im} H_2(w) = \operatorname{Im} \{w \bar{h}_2(\bar{w})\}, \quad \operatorname{Im} H(w) = \operatorname{Im} K(w, \bar{w}). \tag{83}$$

În cazul profilului specificat în (5), substituind potențialul f din (27) în (78) și integrînd prin părți, se obține

$$g_2(w) = w^2(f(w) - a_2 - 3) - 2 \ln (1 - w) +$$
$$+ 2a_2^{-3}\left(\ln (1 + w_a) - w_a + \frac{1}{2} w_a^2\right), \tag{84}$$

unde expresia afină w_a este precizată în formulele (56).

Ținînd seama de derivata expresiei (30) și de formulele (58), (59), (61) și (79), rezultă

$$- w(wf_2) + \int 2w(wf_2)' \, dw =$$
$$= \int w^2 f_2' \, dw = \int f \, dw = f_3 = a_1 f_1 + f_2 + a_3 w = wf(w) - g(w). \tag{85}$$

Integrînd prin părți în (79) numai termenul care conține factorul a_1, se obține

$$h_2(w) = 2a_1 f_4(w) - a_1 a w^2 f_1(w)/(2w - a) - f_3(w), \tag{86}$$

unde

$$f_4(w) = \int_{a/2}^{w} \frac{aw}{2w - a} f_1(w) \, dw = \frac{a^2}{4} a_2^{-3} \int_0^{w_a} (1 - a_2/t)(\ln (1 + t) - t) \, dt =$$
$$= \frac{a^2}{4} a_2^{-3} \left\{(1 + w_a) \ln (1 + w_a) + (a_2 - 1) w_a - \frac{1}{2} w_a^2 + a_1 \sum_{n \geq 1} n^{-2} (-w_a)^n\right\}. \tag{87}$$

În felul acesta calculul funcției A_2 din (82) s-a redus la rezolvarea problemelor la limită liniare (83) în care funcțiile g_2, h_2 și K au expresii explicite specificate în formulele (84), (86), respectiv (80).

Soluțiile H_1, H_2 și H ale acestor probleme la limită, în cazul $a = 2$, sînt precizate în formulele următoare:

$$\bar{g}_2(s) = 1/(s - 1) - 2 \ln (1 - s) + (s^3 - 3s + 5)/3,$$
$$H_1(w) = w^2(w - 1 + 2 \ln (1 - w) + (1 - w)/3),$$
$$\bar{h}_2(s) = -\ln (1 - s) - s^3/6 - s^2/2 - s, \tag{88}$$

$$H_2(w) = w\,(\ln(1-w) + (w^2+w)/6 + w/2),$$

$$K(w,s) = \frac{(w-1)^2}{2(w-2)}\{\bar{f}(s) - f(w) - \ln(1-s)(1-w) + (s-1)^2/2 - 1/2\},$$

$$H(w) = (w^2-1)/8.$$

Primit la redacție la 8 octombrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Gauthier-Villars, Paris, 1959.
2. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
3. P. BRĂDEANU, *Mecanica fluidelor*, Edit. Tehnică, București, 1973.
4. S. POPP, *Modele matematice în teoria cavitației*, Edit. Tehnică, București, 1985.

ASUPRA PROBLEMEI HELMHOLTZ PENTRU DOMENII VECINE

de D. BENA

Institutul de Construcții București

În lucrare se studiază variația unor parametri hidrodinamici în cadrul schemei Helmholtz, cînd se înlocuiește conturul C cu un contur infinit vecin $\tilde{C}$.

1. PROBLEMA HELMOLTZ

Se consideră mișcarea plană, permanentă, irotațională a unui fluid incompresibil, în jurul unui obstacol fix, limitat de o curbă simplă, închisă C.

Fluidul este presupus nelimitat, animat la infinit de viteza V_0, paralelă cu axa Ox. Vom nota cu O punctul de bifurcare al curentului, cu P_1 și P_2 punctele de detașare, cu λ_1 și λ_2 liniile libere. Vom nota cu ω_1 și ω_2 porțiunea din curba C situată între O și P_1, respectiv între O și P_2 (fig. 1). Cu $f(z) = \varphi + i\psi$ vom nota potențialul complex al mișcării. Imaginea mișcării în planul potențialului complex este dată în figura 2, unde am notat cu aceleași litere elementele care se corespund prin $f = f(z)$. Viteza complexă este dată de

$$w = u - iv = \frac{df}{dz}. \tag{1}$$

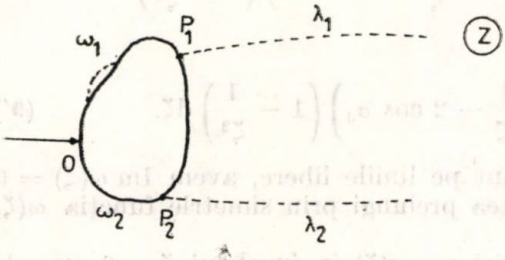


Fig. 1

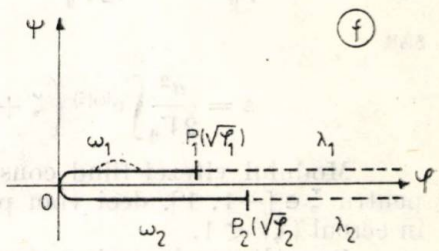


Fig. 2

Conform metodei lui Levi-Civita, vom reprezenta domeniul din planul $f = \varphi + i\psi$ pe interiorul semicercului unitate situat în planul $\zeta = \xi + i\eta$ (fig. 3), astfel încît liniile libere să corespundă diametrului $[-1, 1]$.

Interiorul semicercului se transformă conform pe domeniul din planul f prin formula [1]:

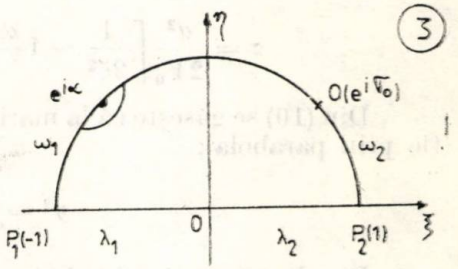


Fig. 3

$$f = a^2\left[\cos\sigma_0 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2, \tag{2}$$

unde

$$a = \frac{\sqrt{\varphi_1} + \sqrt{\varphi_2}}{2}, \tag{3}$$

$$\cos \sigma_0 = \frac{\sqrt{\varphi_1} - \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1} + \sqrt{\varphi_2}}, \quad \sigma_0 \in [0, \pi]. \tag{4}$$

Dacă se introduce [1] funcția ω prin relația

$$w = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - V_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, \tag{5}$$

$$\omega = \theta + \mathrm{i}\tau, \tag{6}$$

vom avea

$$V = V_0 \, \mathrm{e}^{\tau}, \tag{7}$$

unde V_0 este modulul vitezei și

$$\theta = \arg (u + \mathrm{i}v). \tag{8}$$

Cu ajutorul funcției lui Levi-Civita $\omega(\zeta)$, vom avea corespondența între planele z și ζ dată prin formula

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{V_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} \, \mathrm{d}f = \frac{a^2}{2V_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\zeta)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0\right)\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \mathrm{d}\zeta \tag{9}$$

sau

$$z = \frac{a^2}{2V_0} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\zeta)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0\right)\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \mathrm{d}\zeta. \tag{9'}$$

Modulul vitezei fiind constant pe liniile libere, avem $\mathrm{Im}\ \omega(\zeta) = 0$ pentru $\xi \in [-1, 1]$, deci vom putea prelungi prin simetrie funcția $\omega(\zeta)$ în cercul $|\zeta| < 1$.

Dezvoltarea în serie a funcției $z = z(\zeta)$ în jurul lui $\zeta = 0$ este de forma

$$z = \frac{a^2}{2V_0}\left[\frac{1}{2\zeta^2} - \mathrm{i}\,\frac{\omega'(0)}{\zeta} - \frac{2\cos\sigma_0}{\zeta} + 0(\ln \zeta)\right]. \tag{10}$$

Din (10) se găsește că la mari distanțe, jetul se aproximează asimptotic prin parabola :

$$y^2 = \frac{a^2\,\omega'^2(0)}{V_0}\, x. \tag{10'}$$

Rezultanta acțiunilor hidrodinamice se calculează cu ajutorul formulei

$$R_x - \mathrm{i}\, R_y = \frac{-\mathrm{i}\,\rho}{2} V_0 \oint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\zeta)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \mathrm{d}\zeta \tag{11}$$

și se găsește că

$$R_x = \frac{\pi a^2 \rho V_0}{4} \omega'^2(0), \tag{12}$$

$$R_y = \frac{\pi a^2 \rho V_0}{4} [4 \cos \sigma_0 \omega'(0) - \omega''(0)].$$

2. O FORMULĂ DE REPREZENTARE CONFORMĂ PENTRU DOMENII VECINE SEMICERCULUI

Vom considera reprezentările conforme ale semicercului unitate, din care se extrage o mică porțiune (asimilată în calcule cu o lunulă circulară), pe semicercul unitate, astfel încît să transformăm diametrul situat pe axa reală în el însuși. Avînd în vedere că diametrul $[-1, 1]$ corespunde liniilor libere, importanța acestor transformări este evidentă.

Fie mica porțiune deformată de arie S și $\zeta_0 = e^{i\alpha}$ un punct situat în porțiunea deformată (fig. 4) și $\tilde{\zeta} = g(\zeta)$ funcția care realizează transformarea conformă a domeniului din planul ζ pe semicercul $|\tilde{\zeta}| < 1$, $\mathrm{Im}\tilde{\zeta} > 0$.

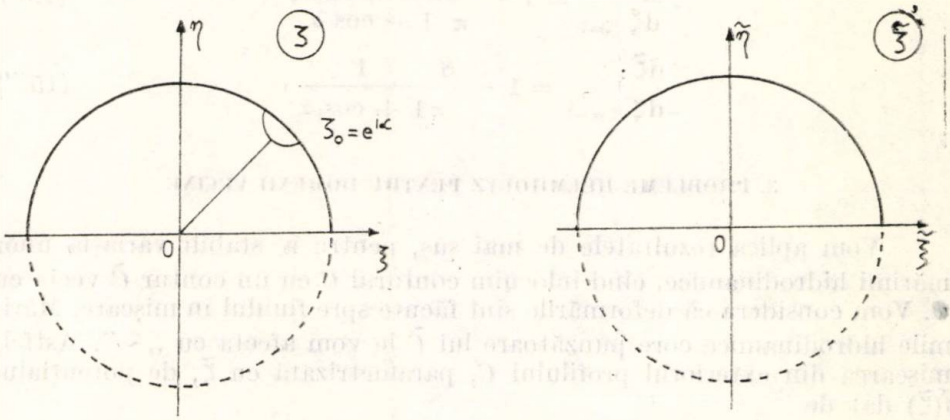


Fig.4

Funcția $g(\zeta)$, reală pe diametrul $[-1, 1]$ se prelungește în semicercul inferior prin simetrie (Schwartz), deci vom considera transformări ale cercului unitate din care am scos două lunule simetrice față de axa reală în el însuși. Astfel de transformări, considerate în [2] sînt de forma

$$\tilde{\zeta} = g(\zeta) = \zeta \left\{ 1 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{1 + \zeta e^{i\alpha}}{1 - \zeta e^{-i\alpha}} + \frac{1 + \zeta e^{i\alpha}}{1 - \zeta e^{i\alpha}} \right) \right\} \tag{13}$$

sau, după calcule elementare,

$$\tilde{\zeta} = \zeta \left(1 + \frac{S}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2} \right). \tag{13'}$$

Vom neglija în calcule termenii în S^2. Astfel, dacă notăm $\zeta = \rho e^{i\sigma}$ și $\tilde{\zeta} = \tilde{\rho}\, e^{i\tilde{\sigma}}$, din relația (13′) vom obține corespondența între punctele situate pe semicerc. Astfel vom avea

$$\ln \frac{\tilde{\zeta}}{\zeta} \approx \ln \frac{\tilde{\rho}}{\rho} + i(\tilde{\sigma} - \sigma) \approx -i \frac{S}{\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \alpha}, \tag{14}$$

deci

$$\tilde{\sigma} \approx \sigma - \frac{S}{\pi} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \alpha} \tag{14'}$$

și $\tilde{\rho} \approx \rho$.

Cu formula (13′) se pot calcula derivatele frontieră ale mărimilor amintite. Astfel, din (13′)

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta} \approx 1 + \frac{S}{\pi} \frac{1 - 4\zeta^2 + 4\zeta^3 \cos \alpha - \zeta^4}{(1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2)^2}. \tag{15}$$

În particular avem

$$\left.\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = 1 + \frac{S}{\pi}, \tag{15'}$$

$$\left.\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 1 - \frac{S}{\pi} \frac{1}{1 - \cos \alpha}, \tag{15''}$$

$$\left.\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}\right|_{\zeta=-1} = 1 - \frac{S}{\pi} \frac{1}{1 + \cos \alpha}. \tag{15'''}$$

3. PROBLEME HELMHOLTZ PENTRU DOMENII VECINE

Vom aplica rezultatele de mai sus, pentru a stabili variația unor mărimi hidrodinamice, cînd înlocuim conturul C cu un contur $\tilde{C}$ vecin cu el. Vom considera că deformările sînt făcute spre fluidul în mișcare. Mărimile hidrodinamice corespunzătoare lui $\tilde{C}$ le vom afecta cu „$\sim$”. Astfel, mișcarea din exteriorul profilului C, parametrizată cu $\tilde{\zeta}$, de potențialul $\tilde{f}(\tilde{\zeta})$ dat de

$$\tilde{f} = \tilde{a}^2 \left[\cos \tilde{\sigma}_0 - \frac{1}{2}\left(\tilde{\zeta} + \frac{1}{\tilde{\zeta}}\right)\right]^2, \quad \tilde{\sigma}_0 \in [0, \pi]. \tag{2'}$$

Pentru punctele comune celor două domenii avem

$$dz = \frac{1}{V_0} e^{i\omega}\, df = \frac{1}{V_0} e^{i\tilde{\omega}}\, d\tilde{f} \tag{16}$$

în ipoteza că vitezele asimptotice se păstrează în cele două mișcări.

Din relațiile (16), (9), (13′) se obține

$$e^{i(\omega - \tilde{\omega})} = \frac{\tilde{a}^2}{a^2} \frac{\zeta^3}{\tilde{\zeta}^3} \frac{\tilde{\zeta}^2 - 2\tilde{\zeta} \cos \tilde{\sigma}_0 + 1}{\zeta^2 - 2\zeta \cos \sigma_0 + 1} \frac{\tilde{\zeta}^2 - 1}{\zeta^2 - 1} \frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta}. \tag{17}$$

Din (14′) avem

$$\cos \tilde{\sigma}_0 = \cos \sigma_0 + \frac{S}{\pi} \frac{\sin^2 \sigma_0}{\cos \sigma_0 - \cos \alpha}, \tag{18}$$

analog se obține

$$\frac{\zeta^3}{\tilde{\zeta}^3} \approx 1 - 3 \frac{S}{\pi} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2}, \tag{19}$$

$$\frac{\tilde{\zeta}^2 - 1}{\zeta^2 - 1} \approx 1 - \frac{2S}{\pi} \frac{\zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\tilde{\zeta}^2 - 2\tilde{\zeta} \cos \tilde{\sigma}_0 + 1}{\zeta^2 - 2\zeta \cos \sigma_0 + 1} \approx 1 + \frac{S}{\pi} \frac{1}{1 - 2\zeta \cos \sigma_0 + \zeta^2} \times$$

$$\times \frac{(1 - \zeta^2)(2\zeta^2 - 2\zeta \cos \sigma_0)}{1 - 2\zeta \cos \alpha + \zeta^2} - 2 \frac{\sin^2 \sigma_0}{\cos \sigma_0 - \cos \alpha}. \tag{21}$$

Din $\tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}(0)$, condiție care corespunde faptului că în cele două mișcări avem viteze asimptotice egale, obținem

$$\frac{\tilde{a}}{a} \approx 1 + \frac{S}{\pi}, \text{ adică :} \tag{22}$$

dacă considerăm mișcarea unui fluid, animat la mari distanțe de aceiași viteză asimptotică V_0, în jurul a două obstacole C și $\tilde{C}$, $\tilde{C}$ exterior lui C, atunci avem $\tilde{a} > a$ (la o deformare a conturului C spre exterior corespunde o creștere a parametrului a).

Se verifică imediat că $\omega(\triangleq 1) = \tilde{\omega}(\triangleq 1)$, deci pe liniile libere avem aceleași viteze. Punînd în (17) $\zeta = e^{i\sigma}$, ținînd seama de (18), (19), (20), (21) se obține pentru variația vitezelor pe conturul (C), în punctele nedeformate, formula

$$\frac{\tilde{V} - V}{V} \simeq -\frac{S}{\pi} \left[2 + \frac{\sin^2 \alpha}{(\cos \sigma - \cos \alpha)^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{(\cos \sigma - \cos \alpha)(\cos \sigma_0 - \cos \alpha)} \right]. \tag{23}$$

Plecînd de la formula

$$\omega(\zeta) = \tilde{\omega}(\tilde{\zeta}(\zeta)), \tag{24}$$

valabilă pentru puncte suficient de depărtate de porțiunea deformată, avem în vecinătatea lui $\zeta = 0$

$$\omega'(\zeta) \approx \tilde{\omega}'(\tilde{\zeta}(\zeta))\, \zeta'(\zeta), \tag{25}$$

care conduce la

$$\tilde{\omega}'(0) \approx \omega(0) \left(1 - \frac{S}{\pi}\right). \tag{25′}$$

Ținînd seama de (9′), pentru z suficient de mare avem

$$\frac{\tilde{y}_\infty}{y_\infty} \approx 1 + \frac{S}{\pi} \tag{26}$$

adică la o deformare a conturului C spre fluidul în mișcare, lunule de jet se deplasează la mari distanțe spre fluidul în mișcare.

Primit la redacție la 10 noiembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introductions mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, Bucarest-Gauthier-Villars, Paris, 1959.
2. M. LAVRENTIEV, B. CHABAT, *Methodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Editions Mir, Moscou, 1972.
3. SIMONA POPP, *Modele matematice în teoria cavitației*, Edit. Tehnică, București, 1985.
4. М. ГУРЕВИЧ, *Теория струй идеальной жидкости*, Москва, Наука, 1979.

HIDRODINAMICA ETANȘĂRII CU FILM DE LICHID ȘI POMPARE DINAMICĂ

de M. PECULEA și C. STOICA

Uzina „G" Rîmnicu Vîlcea

Se descrie funcționarea unei etanșări cu film de lichid și pompare dinamică, caracterizată printr-o închidere completă și o fiabilitate ridicată. Studiul hidro-dinamic al spațiului de pompare, format dintr-un perete rotitor și un perete fix, are ca scop dimensionarea pompei compensatoare. Studiul hidrodinamic general, care ține cont și de circuitul exterior al fluidului de etanșare, permite evaluarea comportării în ansamblu a etanșării. Studiul a fost aplicat la proiectarea etanșării unui compresor centrifugal pentru hidrogen sulfurat și a fost verificat pe standul Uzinei „G".

INTRODUCERE

Etanșările cu film de lichid sînt recomandate pentru compresoare centrifugale sau axiale, unde se cere, pe lîngă o etanșare perfectă a axului, și o mare fiabilitate a ansamblului [1]. Etanșarea este obținută printr-o gardă hidraulică menținută la o presiune ușor superioară presiunii de etanșat și fiabilitatea prin evitarea contactelor directe ale pieselor etanșării. Dezavantajul sistemului constă în pierderi ridicate de ulei, contaminat cu gazul de etanșat, care, după caz, poate fi recuperat, dar care oricum ating valori superioare a 150 l/zi.

Îmbunătățirea performanțelor acestor etanșări cu film de ulei s-a făcut prin introducerea pompării dinamice, practic o mică pompă de echilibrare a presiunii din filmul de ulei, între presiunea de etanșare și a gazului de etanșat. Astfel, pierderile de ulei contaminat au fost reduse chiar sub 20 l/zi [1].

Etanșarea luată în considerare este recomandată de către Institutul American al Petrolului [2] și va fi descrisă în continuare.

Descriere. Schema funcțională a etanșării cu film de lichid și pompare dinamică este prezentată în figura 1.

Axul *1* se rotește cu viteza unghiulară ω, într-o casetă fixă, profilată după ax, formînd astfel trei filme de lichid, *2*, *3* și *4* și un spațiu de pompare *5*. De la un rezervor lichidul este pompat în etanșare la presiunea P cu debitul Q, pentru realizarea gărzii hidraulice, astfel că $P > P_S$, P_S fiind presiunea gazului de etanșat. Debitul Q de lichid se împarte în trei : debitul Q_E de etanșare, care realizează închiderea hidraulică a etanșării și curge prin filmul *2* de la presiunea P la presiunea atmosferică P_E; debitul Q_S, care reprezintă pierderea de ulei contaminat și care curge prin filmele *3* și *4* și spațiul de pompare *5*, între presiunile P și P_S; debitul Q_C, care este debitul de control al sistemului și care menține presiunea P, mai mare decît P_S, la o valoare controlată de vasul de nivel constant *6*, prin poziția lui față de axul de etanșat și dată de coordonata H. Debitele Q_E și Q_C se recirculă prin rezervorul de lichid.

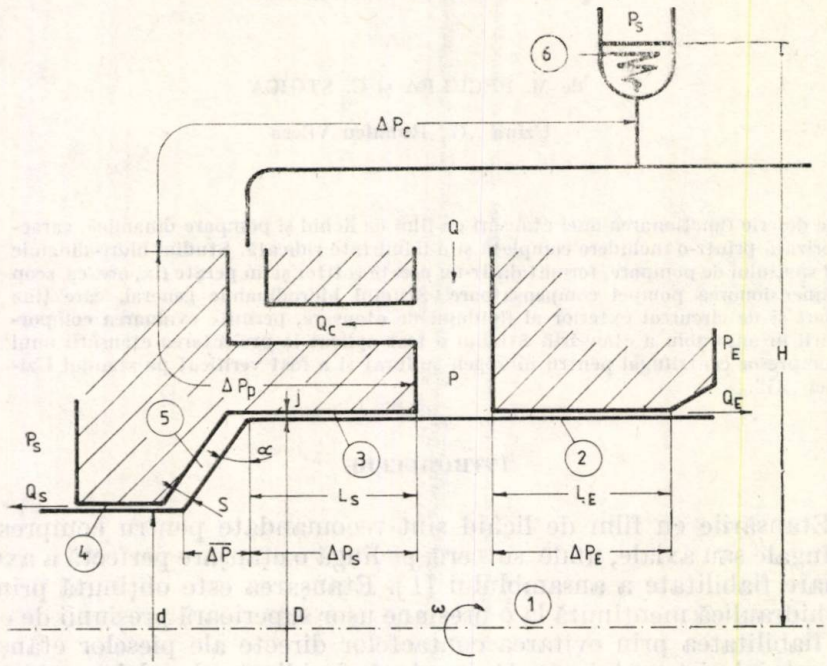


Fig. 1. — Schema funcțională a presetupei cu film de lichid și pompare dinamică : *1* — ax ; *2*, *3*, *4* — filme de lichid ; *5* — spațiu de pompare ; *6* — vas de nivel constant.

Pomparea dinamică realizată în spațiul *5* se datorează acțiunii peretelui înclinat al axului *1*, cuprins între diametru D și d. Diferența de presiune creată $\overline{\Delta P}$ se tratează în continuare.

HIDRODINAMICA SPAȚIULUI DE POMPARE

Descrierea fenomenului din spațiul de pompare se face considerînd cazul unui spațiu de forma unei coroane cilindrice, urmărind mișcarea unui element de fluid de densitate ρ și viscozitate cinematică ν, constante. Se scriu sistemul de ecuații Navier-Stokes și ecuația de continuitate în coordonate cilindrice, pentru fluidul incompresibil, cu notații raportate la figura 2.

$$u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right], \quad (1a)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right], \quad (1b)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right], \quad (1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

u, v, w reprezintă componentele radială, tangențială și axială ale vitezei, iar p presiunea.

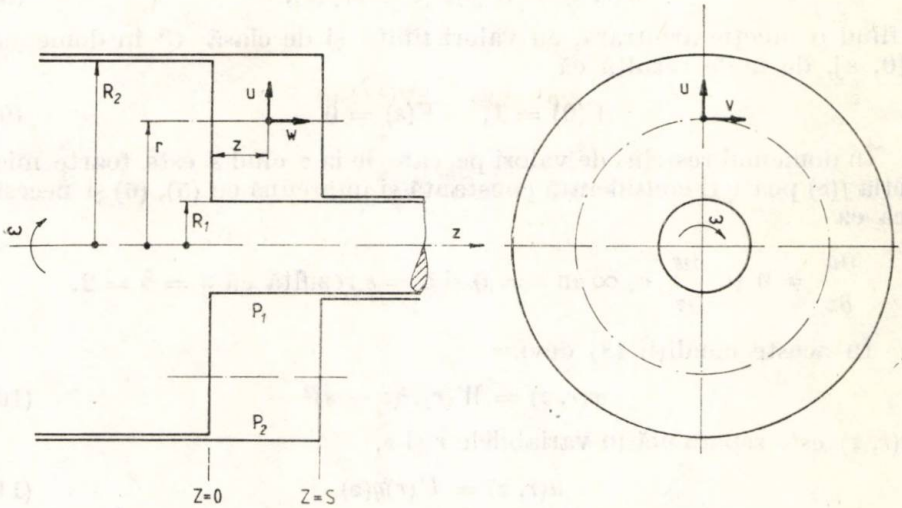


Fig. 2. — Cîmpul de viteze al unui element de lichid din spațiul de pompare.

Peretele $z = 0$ al spațiului de pompare are o mișcare de rotație dată de viteza unghiulară ω, iar peretele $z = s$ este staționar.

În cazul în care dimensiunea axială, s, a spațiului de pompare este de ordinul de mărime al cantității $\sqrt{\nu/\omega}$, primii doi termeni din paranteze din ecuațiile (1a) și (1b) pot fi neglijați în raport cu ceilalți termeni. De asemenea, toți termenii din ecuația (1c) sînt mult mai mici decît termenii rămași din ecuațiile (1a) și (1b), astfel că vom neglija în cele ce urmează cea de a treia ecuație a sistemului (1) în raport cu primele două. În cadrul acestor aproximații, sistemul (1) și ecuația (2) se scriu :

$$u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Condițiile pe frontieră se scriu :

$$z = 0\,; \quad u = 0, \quad v = r\cdot\omega, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$z = s\,; \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Pentru vitezele $v(r, z)$ și $w(r, z)$ se aleg forme în concordanță cu reprezentarea din figura 2 și compatibile cu condițiile pe frontieră (6) :

$$v(r, z) = r\omega V(z), \tag{7}$$

$$w(r, z) = W(r)z^{\alpha}(z - s)^{\beta}f(z), \tag{8}$$

$f(z)$ fiind o funcție arbitrară, cu valori finite și de clasă C^1 în domeniul $z \in [0, s]$, de unde rezultă că

$$V(0) = 1, \qquad V(s) = 0. \tag{9}$$

În domeniul restrîns de valori pe care le ia z cînd s este foarte mic, funcția $f(z)$ poate fi considerată constantă și împreună cu (5), (6) și necesitatea ca

$$\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0 \text{ și } \frac{\partial u}{\partial z} < \infty \text{ în } z = 0 \text{ și } z = s \text{ rezultă că } \alpha = \beta = 2.$$

În aceste condiții (8) devine

$$w(r, z) = W(r)z^2(z - s)^2 \tag{10}$$

și $u(r, z)$ este separabilă în variabilele r și z,

$$u(r, z) = U(r)g(z). \tag{11}$$

Introducînd (10) și (11) în (5), rezultă

$$u(r, z) = U(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2(z - s)^2] \tag{12}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} + \frac{U}{r} + W = 0. \tag{13}$$

Cu (7), (4) se scrie

$$2\omega U(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2(z - s)^2]V(z) + r\omega\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}W(r)z^2(z - s)^2 =$$

$$= \nu r\omega\frac{\mathrm{d}^2V(z)}{\mathrm{d}z^2}. \tag{14}$$

Pentru ca (14) să fie omogenă în r trebuie ca

$$U(r) = Cr \tag{15}$$

și

$$W = \text{const.}, \tag{16}$$

de unde rezultă din (13)

$$W = -2C. \tag{17}$$

Se face schimbarea de variabilă

$$z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, z = \frac{z}{\delta^*}, \tag{18}$$

unde

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \tag{19}$$

și

$$n = \frac{s}{\delta^*}, \tag{20}$$

cu care (14) se scrie, ținînd cont și de următoarea notație:

$$\varepsilon = \frac{C}{\omega}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{3/2}, \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z_1^2} + 2\varepsilon z_1^2 (z_1 - n)^2 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z_1} - 4\varepsilon z_1 (z_1 - n)(2z_1 - n)V = 0. \tag{22}$$

Expresiile vitezelor vor căpăta următoarele forme:

$$u(r, z_1) = 2\varepsilon r\omega z_1 (z_1 - n)(2z_1 - n), \tag{23}$$

$$v(r, z_1) = r\omega V(z_1), \tag{24}$$

$$w(r, z_1) = -2\varepsilon\sqrt{\omega\nu}\, z_1^2 (z_1 - n)^2. \tag{25}$$

Cu acestea, (3), care descrie variația presiunii în spațiul de pompare, devine

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho r\omega^2 \left\{ \varepsilon \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z_1^3}[z_1^2(z_1 - n)^2] + 2\varepsilon^2 z_1^2 (z_1 - n)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[z_1^2(z_1 - n)^2] - \right.$$

$$\left. - \varepsilon^2 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_1}(z_1^2(z_1 - n)^2) \right]^2 + V^2(z_1) \right\} \tag{26}$$

și integrată

$$p(r, z_1) = p_0 + \frac{\rho}{2} r^2\omega^2 [12\varepsilon(2z_1 - n) + V^2(z) +$$

$$+ 4\varepsilon^2 z_1^2 (z_1 - n)^2 (6z_1^2 - 6nz_1 + n^2) - 4\varepsilon^2 z_1^2 (z_1 - n)^2 (2z_1 - n)^2]. \tag{27}$$

Analizînd expresiile (23), (24) și (25) care descriu mișcarea din spațiul de pompare, se observă că mărimea (21), pentru vitezele u și w joacă rolul unei amplitudini, vitezele radială și axială descriind o circulație internă în spațiul de pompare; viteza tangențială este independentă de ε, în schimb este funcție de $V(z_1)$.

Reprezentarea variației vitezelor u, v și w în funcție de z_1, respectiv valorile lor adimensionale

$$u = \frac{u(r, z_1)}{r\omega}; \quad v = \frac{v(r, z_1)}{r\omega}; \quad w = \frac{w(r, z_1)}{r\omega},$$

pentru două valori ale mărimii (21) $\varepsilon = 0{,}01$ și $\varepsilon = 0{,}001$, pot fi urmărite în figurile 3, 4 și 5.

În figura 6 sînt reprezentate curbele de variație ale presiunii în funcție de z_1, respectiv valoarea ei redusă

$$\Delta p = \frac{p - P_1}{\frac{\rho}{2} r^2 \omega^2}$$

pentru aceleași două valori $\varepsilon = 0{,}01$ și $0{,}001$.

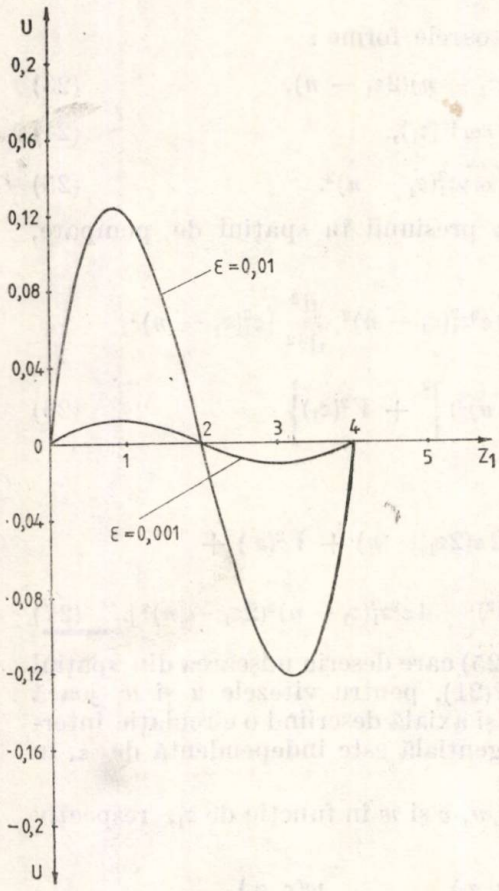


Fig. 3. — Variația componentei radiale a vitezei în spațiul de pompare.

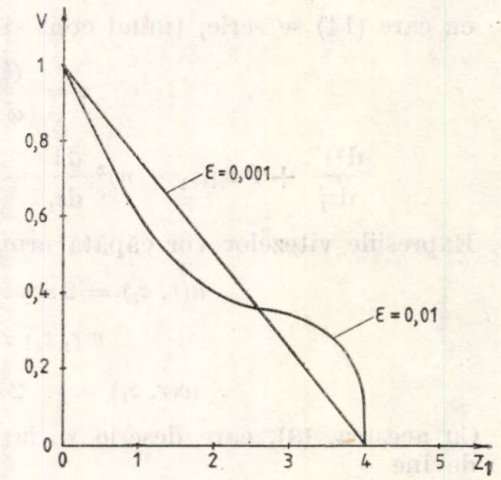


Fig. 4. — Variația componentei tangențiale a vitezei în spațiul de pompare.

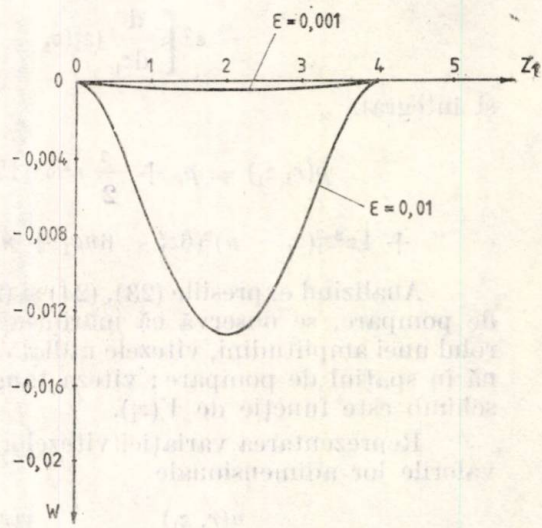


Fig. 5. — Variația componentei axiale a vitezei în spațiul de pompare

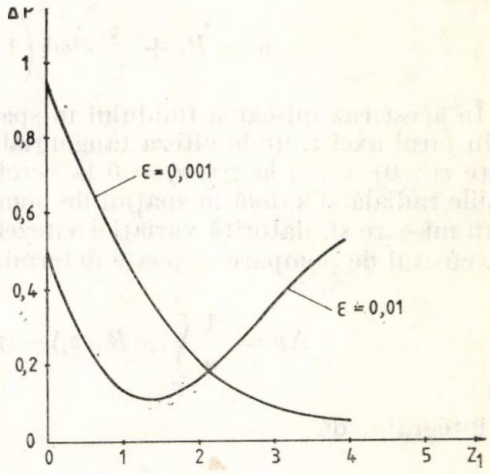


Fig. 6. — Variația creșterii de presiune în spațiul de pompare.

Pentru reprezentările din figurile 3, 4, 5 și 6 în cadrul programului de calcul, valoarea funcției $V(z_1)$ a rezultat ca soluție a rezolvării numerice a ecuației (22), unde $n = 4$. Calculele au fost raportate la raza $r = 87{,}5$ mm, corespunzătoare etanșării testată pe standul Uzinei „G" din Rîmnicu Vîlcea.

La valori $\varepsilon \ll 1$, cînd circulația internă este mult redusă, termenii ε^2 din relația (27) pot fi neglijați și pentru presiune se obține o relație mai simplă,

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} r^2\omega^2[12\,\varepsilon(2z_1 - n) + V^2(z_1)], \tag{28}$$

unde, după notațiile din figura 2,

$$p_0 = \frac{(P_1R_2^2 + P_2R_1^2) - \dfrac{\rho}{2}\omega^2R_1^2R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}, \tag{29}$$

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\rho}{2} R_2^2\omega^2 - (P_2 - P_1)}{6n\rho\omega^2(R_1^2 + R_2^2)}. \tag{30}$$

În cazul particular, cînd $\varepsilon = 0$, ecuația (22) dă o soluție liniară pentru $V(z_1)$ și sistemul (23), (24) și (25) devine

$$u = 0,$$

$$v = r\omega\left(1 - \frac{z_1}{n}\right), \tag{31}$$

$$w = 0$$

și presiunea

$$p = P_1 + \frac{\rho}{2} r^2\omega^2 \left(1 - \frac{z_1}{n}\right)^2. \tag{32}$$

În acest caz mișcarea fluidului în spațiul de pompare este o rotație pură în jurul axei z, unde viteza tangențială scade liniar de la peretele în mișcare $v(r, 0) = r\,\omega$ la $v(r, s) = 0$ la peretele fix. Neexistînd mișcare în direcțiile radială și axială în spațiul de pompare, există practic un inel de fluid în mișcare și, datorită variației vitezei tangențiale în straturile adiacente, efectul de pompare se poate determina ca valoare medie după

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{n}\int_0^n [p(R_2, z_1) - p(R_1 z_1)]\,dz_1, \tag{33}$$

care, integrată, dă

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{3}\,\frac{\rho}{2}\,\omega^2(R_2^2 - R_1^2) \tag{34}$$

și reprezintă ca valoare o treime din efectul de pompare al spațiului unei pompe centrifugale.

Analog, se poate defini, după (31), o viteză unghiulară medie, raportată la inelul de fluid în rotație

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2} \tag{35}$$

cu care (34) devine

$$\overline{\Delta P} = \frac{4}{3}\,\frac{\rho}{2}\,\bar{\omega}^2(R_2^2 - R_1^2). \tag{36}$$

Pentru proiectare se recomandă caracterizarea hidrodinamică a inelului rotitor din spațiul de pompare cu relațiile (35) și (36), a căror valabilitate este limitată la dimensiuni mai mici decît o valoare δ, $s \leqslant \delta$, care, în funcție de natura regimului de curgere, se calculează cu formulele:

— pentru regim turbulent [3], cînd

$$R_e = \frac{\bar{\omega}^2 R^2}{\nu} > 3 \cdot 10^5, \tag{37}$$

$$\delta = \frac{0{,}526 \cdot R}{R_e^{0{,}2}}; \tag{38}$$

— pentru regim laminar [4], cînd

$$R_e < 3 \cdot 10^5,$$

$$\delta = \left(24 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{\bar{\omega}}\right)^{0{,}5}. \tag{39}$$

Pentru dirijarea acțiunii pompării dinamice către filmul de lichid 3, loc unde gazul de etanșat este complet blocat, i se impune o componentă axială de circa 25%, ceea ce determină valoarea unghiului α.

HIDRODINAMICA ANSAMBLULUI DE ETANȘARE

Din echilibrul hidrodinamic al sistemului din figura 1 rezultă sarcina de pompare dinamică

$$\overline{\Delta P} = \Delta P_p + \Delta P_c + \gamma \left(H - \frac{D}{2} \right) - \Delta P_s, \tag{40}$$

unde ΔP_p este căderea de presiune din caseta etanșării, corespunzător debitului de control Q_c; ΔP_c — căderea de presiune pe conducta de control, corespunzător aceluiaș debit Q_c; ΔP_s — căderea de presiune în filmul de lichid 3, corespunzător debitului Q_s; $\gamma \left(H - \frac{D}{2} \right)$ — suprapresiunea de control a gărzii hidraulice.

Analizînd relația (40), pentru a avea o sarcină cît mai redusă pentru pomparea dinamică, este necesar ca cele două căderi de presiune ΔP_p și ΔP_c să fie cît mai mici și ca atare ele limitează vitezele de curgere a lichidului prin casetă și conducta de control pînă la vasul de nivel constant. Căderea de presiune ΔP_s în filmul de lichid 3 vine în sprijinul acțiunii de pompare și pentru ca valoarea ei să fie cît mai mare este necesar ca lungimea L_S a filmului să fie cît mai mare, chiar $L_S > L_E$.

Procesul în filmul de lichid este descris de relația

$$Q_i = \frac{\pi D \Delta P_i j^3}{12 \eta L_i}, \tag{41}$$

unde j este jocul dintre bucșa casetei și ax, η — viscozitatea dinamică a lichidului și $i = S, E$.

Excentricitatea dintre bucșe și ax mărește debitul filmului de lichid cu

$$\left(1 + \frac{3e^2}{2} \right), \tag{42}$$

unde e este excentricitatea axului raportată la bucșe. Pentru reducerea la maxim a excentricității și odată cu ea și a jocului j se recomandă utilizarea de bucșe flotante.

Rezultate. Aplicarea acestui model matematic s-a făcut pentru o etanșare cu film de lichid și pompare dinamică la un compresor centrifugal de hidrogen sulfurat. Condițiile de gabarit au fost impuse de dimensiunile casetei existente, care a determinat și tipul de bucșe, respectiv centrată în carcasă și ca urmare a fixat jocul minim dintre ax și bucșe, $j = 0{,}2 - 0{,}25$ mm. Presiunea de etanșat $P_s = 21{,}5$ bari; lichidul de etanșare ulei TbA — 46E; înălțimea de control $H = 2\,000$ mm, au fost celelalte date inițiale. Pentru un raport $\frac{D}{R-r} = 10 - 13$ și turația nominală a compresorului de $n = 3000$ t/min, au rezultat diametrele $D = 200$ mm și $d =$

160 mm, din calculul pompei de compensare și $S = \delta = 3$ mm lățimea spațiului de pompare. Lungimile filmelor de lichid limitate de condiții de gabarit au rezultat $L_E = 95$ mm și $L_S = 75$ mm.

La o etanșare totală, performanțele raportate la debitele de fluid au fost:

$$Q_s \leqslant 4 \text{ l/zi},$$

$$Q_E = 1{,}3 - 1{,}4 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$Q_C = 1 \text{ m}^3/\text{h},$$

pentru temperatura uleiului de etanșare 50°C. Funcționarea sigură și stabilă a etanșării a fost asigurată prin reducerea la minim a posibilității de pătrundere a gazului, prin filmul de ulei *4*, către spațiul de pompare *5*.

ANEXĂ

Rezolvarea numerică a ecuației (22) se bazează pe principiul divizării domeniului în care variabila z_1 ia valori într-un număr cît mai mare de intervale, în care soluția este căutată sub forma unor funcții precizate [5]. Fie ecuația diferențială ordinară de gradul 2 cu condiții la limită

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} + a(z)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} + b(z)V = 0, \tag{43}$$

cu

$$V(z_1) = V_1, \quad V(z_2) = V_2, \tag{44}$$

unde $a(z)$ și $b(z)$ sînt funcții de clasa C^1 pe intervalul $Z \in [z_1, z_2]$.

Se împarte domeniul $[z_1, z_2]$ într-un număr N de intervale egale de forma $I_k = [z_{k-1}, z_k]$, unde

$$z_k = z_1 + kh; \quad h = \frac{z_2 - z_1}{N}; \quad k = 0, 1, 2 \ldots, N. \tag{45}$$

Se calculează

$$a_k = \frac{a(z_k) + a(z_{k-1})}{2} \quad \text{și} \quad b_k = \frac{b(z_k) + b(z_{k-1})}{2}. \tag{46}$$

Soluția în fiecare interval I_k este de forma

$$V_k(z) = A_k \mathrm{e}^{-\theta_k^{(1)} z} + B_k \mathrm{e}^{-\theta_k^{(2)} z}, \tag{47}$$

unde $\theta_k^{(1)}$ și $\theta_k^{(2)}$ sînt soluțiile ecuației

$$\theta_k^2 - a_k \theta_k + b_k = 0, \tag{48}$$

iar A_k și B_k sînt constante. Constantele A_k și B_k se găsesc adăugînd celor două condiții la limită, condițiile de continuitate a funcției $V(z)$ și a deri-

vatei sale în punctele $Z_k (k = 1, 2, \ldots, N - 1)$ dintre cele N intervale. Se vor lua precauții speciale cînd ecuația (48) are și rădăcini complexe.

Primit la redacție la 13 iulie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. W. E. NELSON, *Compressor seal fundamentals.* Hydrocarbon Processing, 12 (1977).
2. * * * Centrifugal Compressors for General Refinery Services, API Stansard 617, Ed. 4, 1979.
3. H. SCHLICHTING, *Boundary — Layer Theory*, ediția 7-a, Mc. Graw-Hill, New-York, 1979.
4. E. BECKER, *Technische Strömungslehre*, ediția 3-a, Teubner, Stuttgart, 1974.
5. W. AMES, *Nonlinear Ordinary Differential Equations.* ,,Mathematics in Science and Engineering'' Series, **42**, Academic Press, New York, 1968.

MIȘCAREA PERMANENTĂ ȘI NEPERMANENTĂ A APEI ÎN REȚELELE DE CONDUCTE SUB PRESIUNE ALE SISTEMULUI DE IRIGAȚIE KIRKUK-ADHAIM (IRAK)

de I. JELEV și GH. CONSTANTINESCU

Institutul de Cercetări Hidrotehnice, București

Cu ajutorul programului de calcul automat „RETEA" elaborat în I.C.H. pentru modelarea fenomenelor tranzitorii în rețelele de conducte ramificate, inelare și mixte, s-a studiat regimul permanent și nepermanent de curgere al apei, pentru 50 de ploturi de irigație din sistemul Kirkuk-Adhaim din Irak. S-au calculat curbele caracteristice $H = f(Q)$ ale rețelelor de conducte și s-au analizat un număr mare de variante de protecție la șoc hidraulic a conductelor și stațiilor de pompare. Se prezintă rezultatele obținute pentru principalele variante de protecție studiate. Pentru fiecare variantă în parte s-a determinat volumul total al hidrofoarelor, volumul inițial al pernelor de aer, presiunile de etanșare ale supapelor de supra-presiune și a vanelor cu închidere automată la lipsă de presiune, tipodimensiunile dispozitivelor de aerisire-dezaerisire etc. Sistemul de protecție recomandat în final asigură înscrierea armonioasă a regimurilor hidraulice tranzitorii în funcționarea generală automată a celor 50 de stații de pompare.
În ultima parte a lucrării se prezintă cîteva aspecte legate de funcționarea în exploatare a stațiilor de pompare și a rețelelor de conducte (cele 50 de stații de pompare cu rețelele aferente au fost puse în funcțiune eșalonat, în perioada 1983—1986).

1. INTRODUCERE

Între întreprinderea de comerț exterior ARCIF și Administrația Proiectului de Irigație Kirkuk, s-a încheiat un contract pentru proiectarea și executarea de către ARCIF *) a 50 de stații de pompare precum și a rețelelor de irigație aferente. Consultantul autorităților irakiene pentru avizarea și aprobarea studiilor, proiectelor și a lucrărilor de execuție, a fost firma SOGREAH din Franța. În vederea definitivării și aprobării proiectelor, SOGREAH a solicitat efectuarea unor studii hidraulice detaliate privind mișcarea permanentă și nepermanentă a apei în rețelele de conducte sub presiune, în scopul dimensionării agregatelor de pompare, a stabilirii parametrilor de automatizare, a verificării comportării rețelelor de conducte, precum și a dispozitivelor și a instalațiilor de protecție la șocuri hidraulice.

Studiul regimului de curgere permanentă a apei a avut drept scop determinarea curbelor $H = f(Q)$ pentru fiecare dintre rețelele analizate, în vederea punerii în evidență a presiunilor maxime necesare la stația de pompare pentru diferite debite consumate în rețea. Curbele caracteristice s-au determinat în două ipoteze : conducte de azbociment noi și conducte cu rugozitatea mărită (presupunînd un număr de ani de exploatare).

*) Proiectul stațiilor de pompare și a rețelelor de conducte aparține I.S.P.I.F. București. Coordonatorii proiectului au fost inginerii Stroe Slătineanu și Mihai Moisă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 2, 1988, P. 149—168

2. SISTEMUL DE IRIGAȚIE KIRKUK-ADHAIM

Sistemul cu o suprafață totală de peste 300 000 ha se află situat în apropierea orașului Kirkuk, capitala provinciei irakiene Tameen, la 280 km nord de orașul Baghdad și la 180 km sud-est de orașul Mosul, oraș unde pot fi văzute și azi ruinele cetății antice Ninive. Sistemul poate fi împărțit în două zone mari. O primă zonă, mărginită la nord de rîul Lesser Zab, afluent al Tigrului, extinsă pe o lungime de peste 200 km, între înălțimile Zagros la est și Jabal Hamrin la vest și o a doua zonă situată pe ambele maluri ale rîului Adhaim, între Jabal Hamrin și fluviul Tigru. Clima regiunii este foarte uscată. Alimentarea cu apă a sistemului este asigurată de acumulările Dibbis și Dokan de pe rîul Lesser Zab. Canalul de alimentare cu nivel liber are o lungime de 37 km și transportă un debit de 280 m^3/s. El se continuă cu un canal principal cu o lungime de 95 km. Sistemul este străbătut de o rețea complexă de canale secundare. Întregul sistem este automatizat urmînd ca în viitor să fie condus centralizat cu ajutorul unui calculator electronic. Din cele 300 000 ha ale sistemului, suprafața irigată prin conducte sub presiune reprezintă circa 30 000 ha, suprafață ce urmează a fi amenajată etapizat. Fiecare sector analizat (fig. 1) avînd o suprafață de aproximativ 200 ha este străbătut de o rețea ramificată de conducte, alimentată de o stație de pompare cu debitul maxim de 200 l/s și o înălțime de pompare cuprinsă între 9,5 și 12,5 bari. Conductele de distribuție sînt din azbociment, cu diametre cuprinse între 125 și 400 mm. Ele lucrează la o presiune nominală de 12,5 bari și admit o presiune maximă datorită loviturii de berbec de 15,5 bari. Pe conducta de refulare a fiecărei pompe se află o clapetă pentru prevenirea curgerii inverse. În imediata apropiere a stațiilor de pompare se află amplasat un hidrofor, avînd dublul rol de compensare a debitelor și de protecție la șoc hidraulic. În rețea sînt montate supape de suprapresiune, a căror poziționare și reglare a fost stabilită prin calcule. Bornele de irigație (tip Bayard) sînt prevăzute cu două, trei, sau patru ieșiri, fiecare ieșire asigurînd un debit de 7 l/s la o presiune de 6 bari. Pe fiecare ieșire este montat un limitator de presiune, care limitează presiunea la 6 bari cu o toleranță de ≙ 20%, un limitator de debit, care asigură un debit constant de 7 l/s cu o toleranță de ≙ 10% și un contor de debit. Borna mai este echipată cu o vană cu închidere automată la scăderea presiunii sub o valoare reglabilă (fig. 2). Pe conducta de refulare a fiecărei stații de pompare, imediat după branșamentul hidroforului, se află o vană pneumatică automată. Timpul de închidere al vanei pneumatice a fost determinat în urma analizei regimurilor tranzitorii de curgere a apei în rețelele de conducte. Rețelele de conducte au diferite configurații geometrice, impuse de topografia locală și de zonele stabilite pentru distribuția apei. În figura 3 se prezintă cîteva dintre sectoarele de irigație reprezentative pentru sistemul Kirkuk.

3. CALCULUL CURBELOR CARACTERISTICE $H = f(Q)$ ALE REȚELELOR DE CONDUCTE

O conductă de alimentare cu apă sub presiune poate fi caracterizată printr-o curbă unică a pierderilor de sarcină. Pentru calculul curbei caracteristice a conductei respective, se iau în considerație pierderile de sarcină

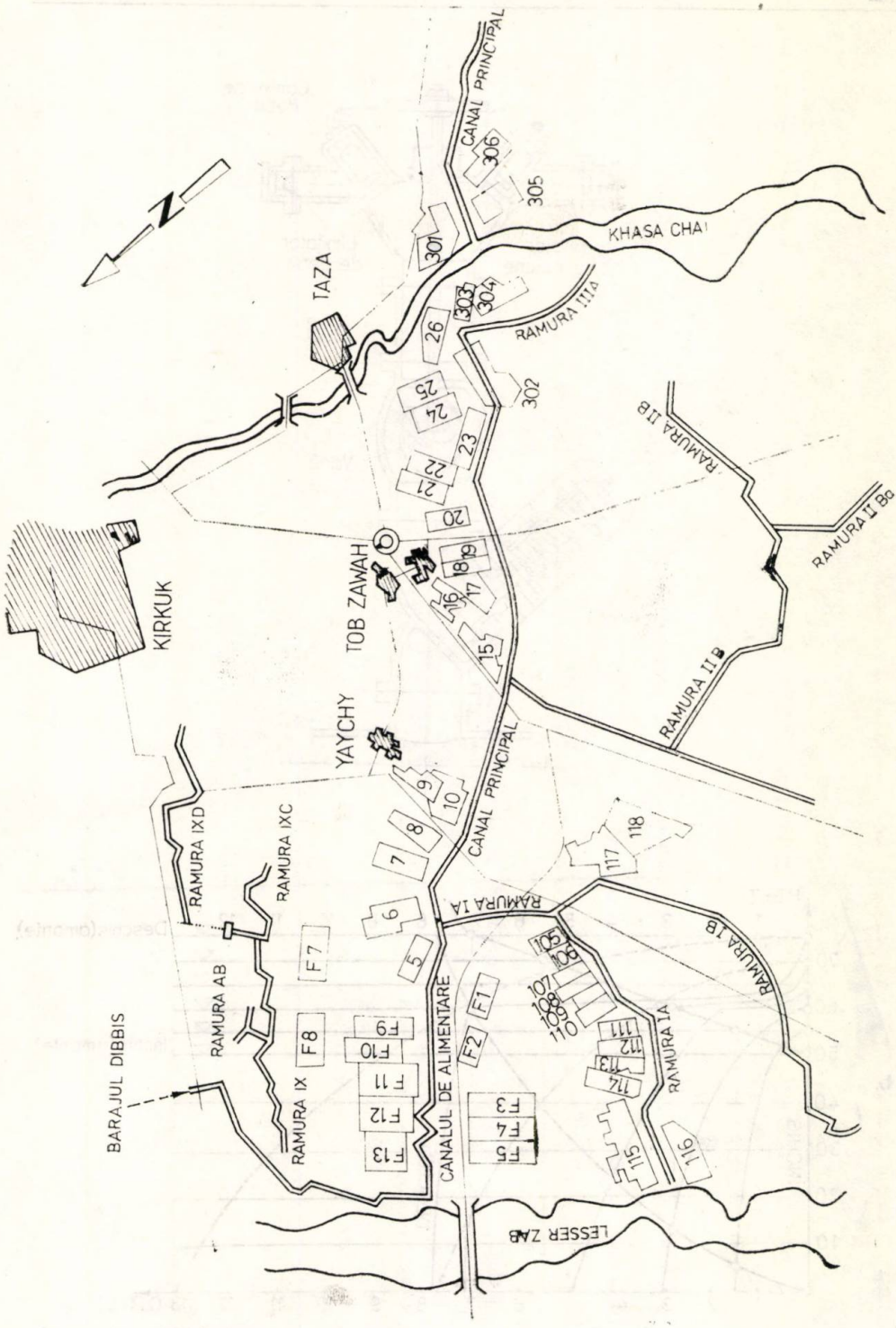
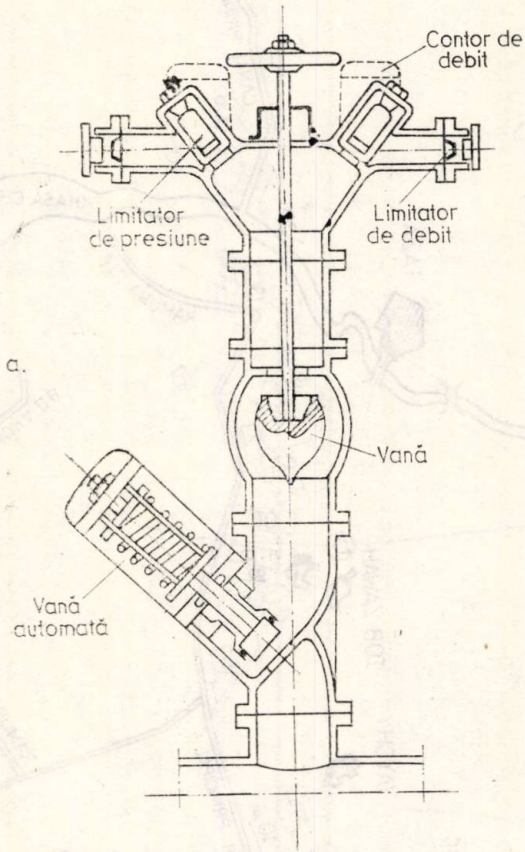


Fig. 1. — Plan de situație.



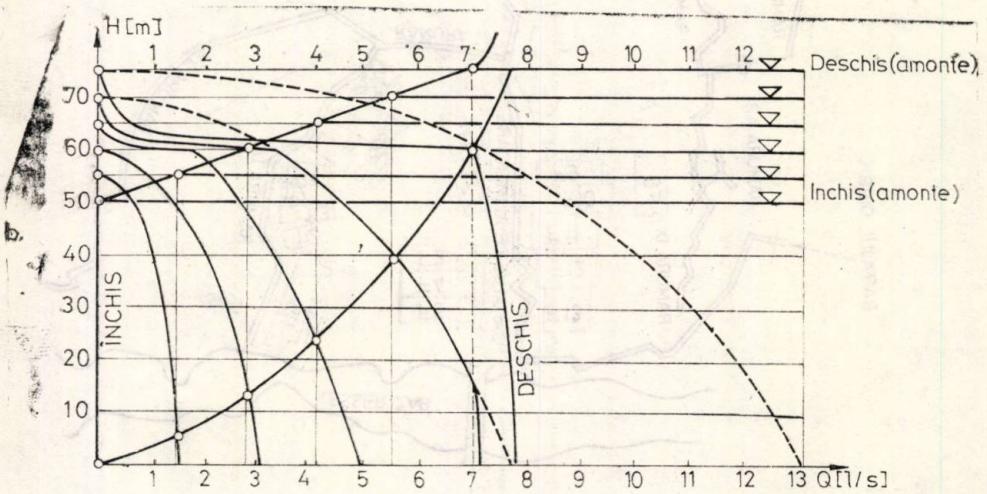


Fig. 2 *a*, *b*. — Borna de irigație : *a* — secțiune transversală ; *b* — caracteristici hidraulice statice.

locale și longitudinale, înălțimea geodezică și presiunea maximă ce trebuie asigurată în orice punct de pe traseul conductei (inclusiv în punctele cele mai dezavantajate datorită amplasării la o distanță mare și la o cotă geodezică ridicată). În cazul unei rețele de conducte există un număr mare de curbe caracteristice, corespunzătoare traseelor de conducte ce pot fi parcurse începînd dinspre stația de pompare, pînă la fiecare bornă de capăt a rețelei. Urmărindu-se asigurarea presiunii de serviciu minime admise la hidrantul cel mai dezavantajat, se obține o familie de curbe caracteristice $H = f(Q)$ (înălțimi de pompare în funcție de debite). Pentru fiecare din cele 50 de rețele ale sistemului de hidroameliorații Kirkuk s-au stabilit curbele caracteristice $H = f(Q)$ pentru debite cuprinse între zero și 200 l/s, identificîndu-se traseele ce necesită înălțimi de pompare maxime. Analiza s-a efectuat cu ajutorul programului „PLOT" pus la punct în I.C.H. București. Programul permite luarea în considerare a pierderilor de sarcină longitudinale și locale (coturi, variații de secțiune, branșamente, borne de irigație, vane, ramificații de conducte etc.). Pierderile de sarcină longitudinale pot fi calculate tabelar sau cu una dintre formulele Colebrook-White, Altschul sau Schiler-Hermann. Calculele s-au efectuat în două ipoteze :

a. conducte de azbociment noi avînd coeficientul de rugozitate absolut $k = 0{,}2$ mm ;

b. conducte de azbociment vechi avînd coeficientul de rugozitate absolut $k = 0{,}6$ mm.

În figura 4 se reprezintă curbele caracteristice $H = f(Q)$ pentru patru dintre cele 50 de ploturi analizate. Pe baza acestor curbe s-au dimensionat rotoarele pompelor și s-au stabilit valorile presiunilor de pornire și oprire ale agregatelor la funcționarea în regim automat.

4. STUDIUL REGIMURILOR TRANZITORII ALE APEI ÎN REȚELELE DE CONDUCTE SUB PRESIUNE

În rețelele de conducte sub presiune, se produc ca urmare a unor manevre dorite sau accidentale (deschiderea sau închiderea unor vane, pornirea sau oprirea pompelor etc.) regimuri tranzitorii caracterizate prin oscilații de presiune și debit, ce se amortizează în timp, datorită frecărilor vîscoase și structurale din masa lichidului [6], [9].

În cazul în care sistemul hidraulic respectiv este prevăzut cu instalații de protecție la șocul hidraulic (rezervor de aer, castel de echilibru etc.), care transformă mișcarea rapid variabilă într-o mișcare lent variabilă, oscilațiile de presiune și debit ale apei sînt caracterizate prin amplitudini și frecvențe mici. În cazul mișcării rapid variabile, amplitudinea și frecvența oscilațiilor de presiune sînt mari, efectele elastice fiind preponderente.

Studiul mișcării nepermanente a apei în conducte și rețele de conducte sub presiune, a făcut obiectul unui număr mare de lucrări din literatura de specialitate [2]—[12].

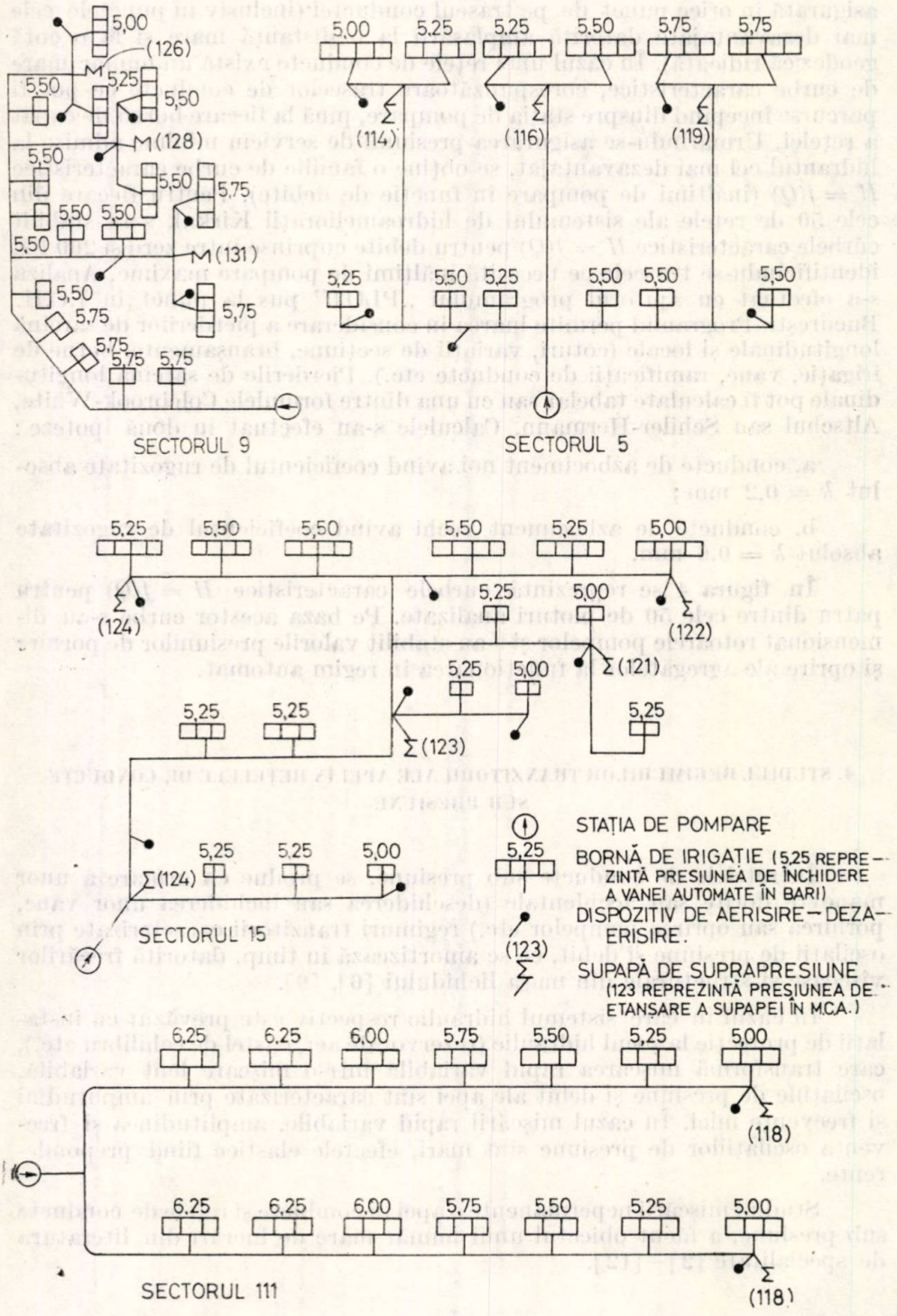


Fig. 3 — Configurații caracteristice ale platourilor de irigație.

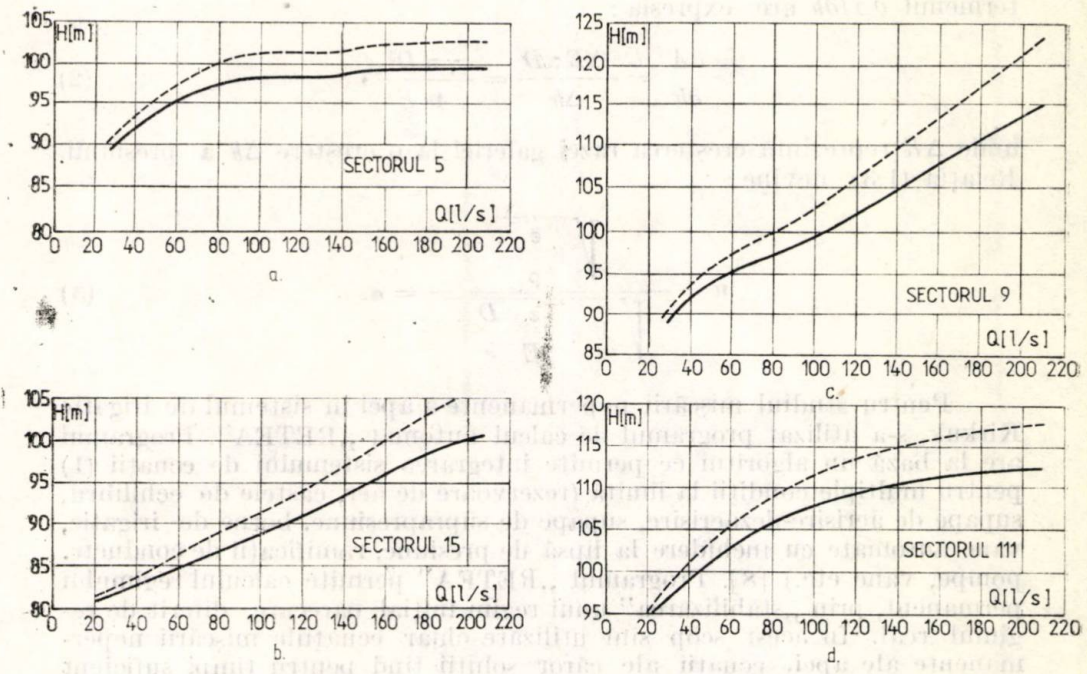


Fig. 4 *a—d.* — Curba înălțimilor de pompare în funcție de debite pentru cîteva dintre sectoarele analizate.

Din punct de vedere matematic, fenomenele hidraulice nepermanente sub presiune și cu nivel liber sînt descrise de următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(I - i_0) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0, \tag{1.2}$$

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\gamma A}\frac{\partial A}{\partial h}}}. \tag{1.3}$$

În sistemul de ecuații (1) h reprezintă sarcina, respectiv adîncimea apei, măsurată la fundul canalului sau galeriei, v — viteza medie a apei în secțiune, x — coordonata longitudinală, t — timpul, g — accelerația gravitației, I — panta hidraulică, i_0 — panta fundului canalului sau galeriei, A — aria secțiunii transversale, u — viteza de propagare în apă a unei unde gravitaționale sau de presiune, ε — coeficientul de elasticitate cubică al apei, ρ — densitatea apei, γ — greutatea specifică a apei.

În cazul mișcării sub presiune într-o conductă sau galerie circulară, termenul $\partial A/\partial h$ are expresia :

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{\Delta R \pi D}{\Delta h} = \frac{\gamma \pi D^3}{4e E}, \tag{2}$$

unde ΔR reprezintă creșterea razei galeriei la o creștere Δh a presiunii. Relația (1.3) devine :

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{D}{e}}} = a. \tag{3}$$

Pentru studiul mișcării nepermanente a apei în sistemul de irigație Kirkuk, s-a utilizat programul de calcul automat „RETEA". Programul are la bază un algoritm ce permite integrarea sistemului de ecuații (1) pentru multiple condiții la limită (rezervoare de aer, castele de echilibru, supape de aerisire-dezaerisire, supape de suprapresiune, borne de irigație, vane automate cu închidere la lipsă de presiune, ramificații de conducte, pompe, vane etc.) [8]. Programul „RETEA" permite calculul regimului permanent, prin „stabilizarea" unui regim inițial oarecare, diferit de regimul real. În acest scop sînt utilizate chiar ecuațiile mișcării nepermanente ale apei, ecuații ale căror soluții tind pentru timpi suficient de mari spre valorile debitelor și presiunilor în regim permanent.

4.1. VARIANTE STUDIATE PENTRU PROTECȚIA LA ȘOCUL HIDRAULIC

Studiul regimului nepermanent al apei în conducte are ca scop alegerea și dimensionarea mijloacelor de protecție la șoc hidraulic astfel încît să se obțină un regim tranzitoriu cît mai favorabil din punct de vedere al evoluției în timp a presiunilor și debitelor. În acest scop, au fost verificate un număr mare de variante de protecție, pentru diverse ipoteze privind natura și durata manevrelor perturbatoare. Volumul de calcule a fost deosebit de mare. Pentru limitarea materialului expus prezentăm numai principalele variante analizate :

a. Variantă fără instalații și dispozitive de protecție a rețelelor de conducte la șoc hidraulic.

b. Variantă de protecție cu rezervor de aer echipat cu vană de fund (fig. 5*a*).

c. Variantă de protecție cu rezervor de aer, vană pneumatică pe refularea fiecărei pompe și vane automate (tip BAYARD) în rețea (fig. 5*b*).

d. Variantă de protecție cu rezervor de aer, by-pass, vană pneumatică amplasată după racordul hidroforului și vane automate în rețea (fig. 5*d*, sau în varianta fără conductă by-pass fig. 5*c*).

În continuare, exemplificările și referirile se vor face pentru plotul 111, considerat reprezentativ.

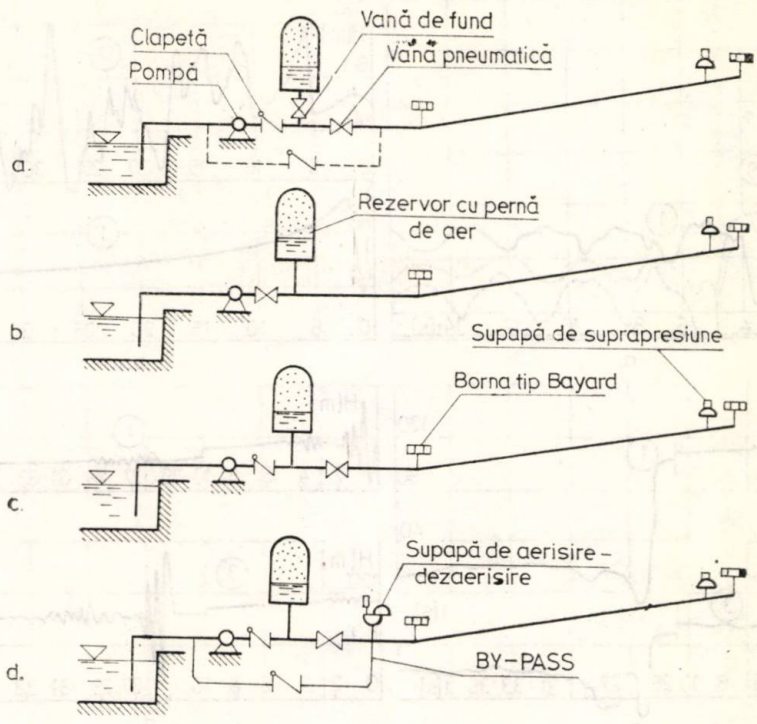


Fig. 5 *a—d.* — Variante analizate pentru protecția la șoc hidraulic.

a. *Varianta fără protecție* este prezentată ca variantă de comparație. În absența hidroforului, în ipoteza opririi bruște a tuturor pompelor, se obține o scădere rapidă a presiunii în conducte (fig. 6*a*), urmată de oscilații cu frecvență ridicată ale acesteia. În unele puncte din rețea se obțin presiuni mai mici decît presiunea de vaporizare a apei [1].

Un astfel de regim de presiuni și debite este nefavorabil.

b. *Varianta de protecție cu rezervor de aer echipat cu vană de fund* conduce la un volum minim al hidroforului ($V_h = 25$ m^3), însă regimul debitelor și presiunilor în conductă este nefavorabil datorită depresiunilor ce apar imediat după închiderea vanei de fund (fig. 6*c*). Ca urmare a închiderii rapide a clapetelor pentru curgere inversă, în conductele de refulare ale pompelor, imediat după oprirea acestora, apar suprapresiuni, ce se amortizează rapid. Volumul total al hidroforului este impus de necesitățile de compensare a debitului în rețea la funcționarea în regim automat (volumele pernei de aer inițiale variază între 15 și 22 m^3). Prin închiderea vanei de fund, rolul de instalație de protecție a hidroforului la șoc hidraulic încetează. În ipoteza absenței vanei de fund a hidroforului și a unei închideri a vanei pneumatice conform legii din figura 8*a* apar oscilații rapide de presiune pe fața amonte a vanei, oscilații ce se amortizează în decurs de 4—5 secunde. Aceste oscilații se resimt și la clapetele pentru curgerea inversă, atenuate datorită prezenței hidroforului

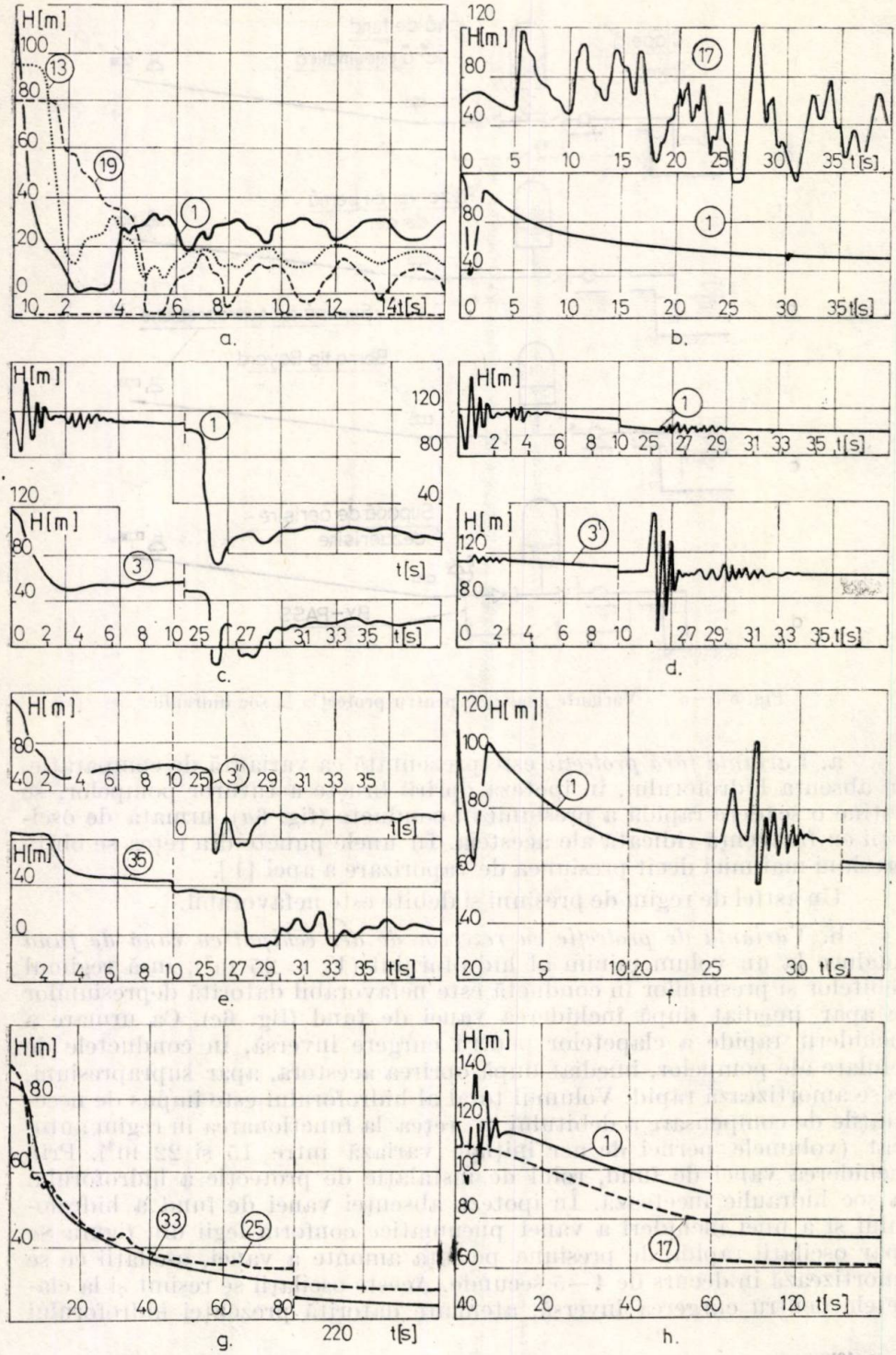


Fig. 6 *a*—*h*. — Variația presiunilor în conducte, pentru diferite manevre de oprire a pompelor și diverse variante de protecție.

(fig. 6*d*, nodul *1*). Totodată, din figura 6*d* se observă șocul produs de închiderea clapetei în nodul *1*, șoc resimțit atenuat datorită hidroforului și în nodul *3'*. În aval de vana pneumatică, imediat după închiderea acesteia, apar depresiuni accentuate, ce se propagă în rețea, începînd dinspre fața aval a vanei (nodul *3''*, fig. 6*e*).

c. *Varianta de protecție cu rezervor de aer, vană pneumatică pe refularea fiecărei pompe și vane automate în rețea*, se caracterizează prin posibilitatea alegerii momentului declanșării închiderii vanelor pneumatice în funcție de scăderea sub o valoare dată a presiunii aerului din hidrofor. S-au analizat diverși timpi și legi de închidere, pentru mai multe valori ale presiunii de declanșare a închiderii vanelor pneumatice. În final s-a adoptat o lege de închidere de tipul celei prezentate în figura 8*a*. În ipoteza opririi bruște a stației de pompare, în primele momente apare o scădere a presiunii, urmată de o revenire la valori mari, datorită alimentării conductelor cu apă din hidrofor și de la pompe. Închiderea vanelor pneumatice este marcată de apariția unor oscilații de presiune ce se amortizează rapid. În momentele următoare, hidroforul continuă să debiteze apă în rețea, presiunile scăzînd lent în timp. Datorită caracteristicilor hidraulice ale vanelor cu închidere automată din rețea (fig. 2), scăderea presiunilor și debitelor (fig. 6*f*) se face lent, fără șocuri, pînă la închiderea totală a vanelor automate. Variația timpului de închidere a vanelor pneumatice în limita 10—25 s nu influențează semnificativ regimul tranzitoriu. În funcție de momentul începerii închiderii vanelor pneumatice, prin pompe se amorsează o curgere inversă avînd drept consecință, pierderea unor cantități de apă și inversarea sensului de rotație al pompelor. Pentru limitarea acestor fenomene negative este necesară începerea închiderii vanelor pneumatice, imediat după oprirea pompelor.

4.2. SOLUȚIA DE PROTECȚIE PROPUSĂ (VARIANTA d)

Varianta de protecție cu rezervor de aer de 35 m³, by-pass, vană pneumatică amplasată după racordul hidroforului și vane automate în rețea, s-a impus ca soluție de protecție optimă, pentru cele 50 de rețele de conducte. În ipoteza închiderii vanei pneumatice în timp de 3 minute, după închiderea lentă a vanelor automate, s-a obținut un regim favorabil de variație a presiunilor (fig. 6*g* și *h*). Cu excepția unor oscilații rapid amortizate provocate de închiderea clapetei, presiunile scad lent și continuu spre o valoare finală, staționară, impusă de presiunea de etanșare a vanelor automate și de cota geodezică a fiecărui nod. În funcție de debitul inițial, durata fenomenelor tranzitorii poate fi mai mică sau mai mare de 3 minute (fig. 8*b*). Valoarea debitului prin vana pneumatică imediat înainte de închiderea acesteia (pentru diferite debite inițiale) s-a reprezentat în figura 8*c*. Se observă că în cazul închiderii vanei pneumatice în timp de 180 s, situația cea mai nefavorabilă se obține atunci cînd oprirea bruscă a pompelor survine în timpul funcționării stațiilor de pompare cu un debit de regim $Q_0 = 50$ l/s. În acest caz debitul tranzitat prin vana pneumatică imediat înainte de închiderea totală a acesteia are valoarea maximă de 30 l/s. Pentru prevenirea apariției depresiunilor în spatele vanei, s-a prevăzut o conductă by-pass cu diametrul Ø 65 mm ce leagă bazinul de

aspirație cu zona situată în aval de vana pneumatică (fig. 7*a*). Variația pernei de aer din hidrofor și presiunea de reglaj pentru vanele automate a fost determinată pentru fiecare rețea în parte. În figurile 9*a*, *b* și *c* se prezintă exemple de diagrame ce permit calculul presiunii de etanșare a

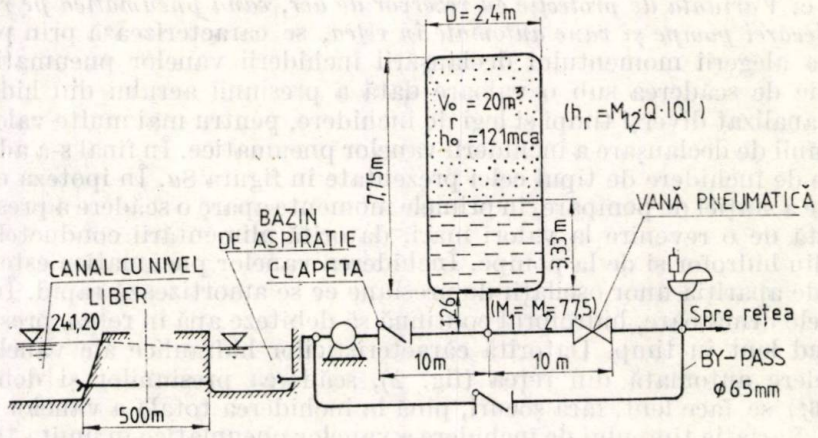
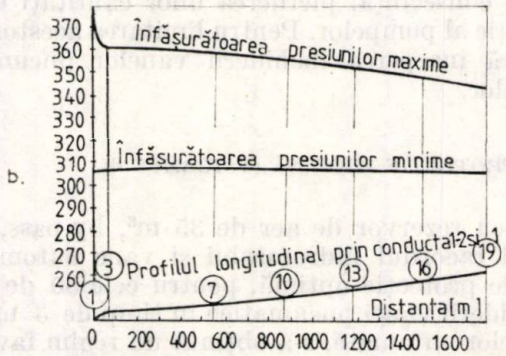


Fig. 7 *a*. — Varianta adoptată pentru protecția la șoc hidraulic a rețelelor de conducte din sistemul de hidroameliorație Kirkuk-Adhaim.



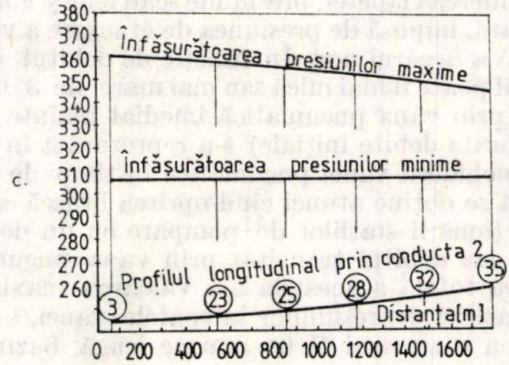


Fig. 7 *b*, *c*. — Înfășurătoarea presiunilor maxime și minime în lungul conductelor unui plot de irigație.

vanelor automate în funcție de cota geodezică ΔZ și de constanta hidroforului $(h_0^a + 10)V_0$ pentru mai multe valori ale volumului total al hidroforului (30 m³, 35 m³, respectiv 40 m³). Diagrama din figura 10 permite determinarea volumului hidroforului cu o rezervă de 15% în funcție de

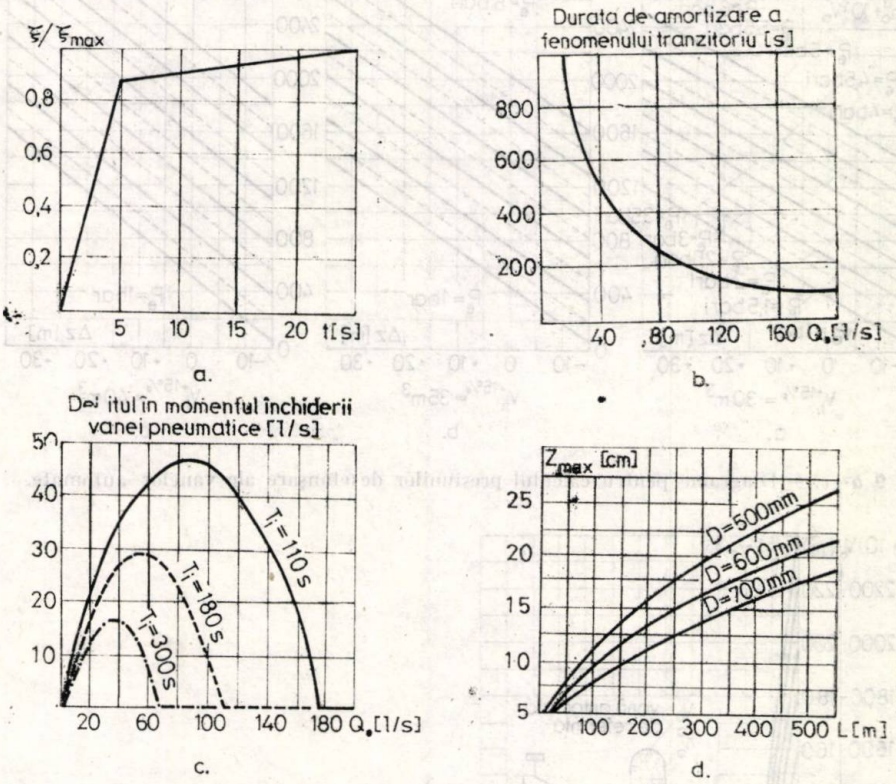


Fig. 8 *a—d* — Reprezentări grafice : *a* — legea de închidere a vanei pneumatice ; *b* — durata fenomenelor tranzitorii ; *c* — debitele tranzitate prin vana pneumatică ; *d* — suprainălțările maxime ale nivelului apei în bazinul de aspirație.

presiunea de etanșare a vanei automate, de constanta hidroforului și de diferența de cotă geodezică ΔZ, dintre hidrofor și vana automată. Diagrama a fost construită pe baza calculelor efectuate și a corelațiilor existente între parametrii respectivi.

În figurile 7*b* și *c* se prezintă înfășurătorile presiunilor minime și maxime în lungul conductelor plotului 111.

S-au calculat variațiile nivelului apei în bazinul de aspirație la oprirea bruscă a pompelor, pentru diverse lungimi și diametre ale conductei de aducțiune a apei de la canalul de alimentare la bazinul de aspirație (fig. 8*d*). De asemenea s-au determinat volumele și presiunile inițiale ale pernei de aer pentru cele 50 de hidrofoare, în ipoteza unor rețele noi și după o perioadă mai lungă de funcționare. Aceste valori precum și valorile volumelor totale ale hidrofoarelor (inclusiv o rezervă de 15%) s-au reprezentat grafic în figurile 11 *a—d*.

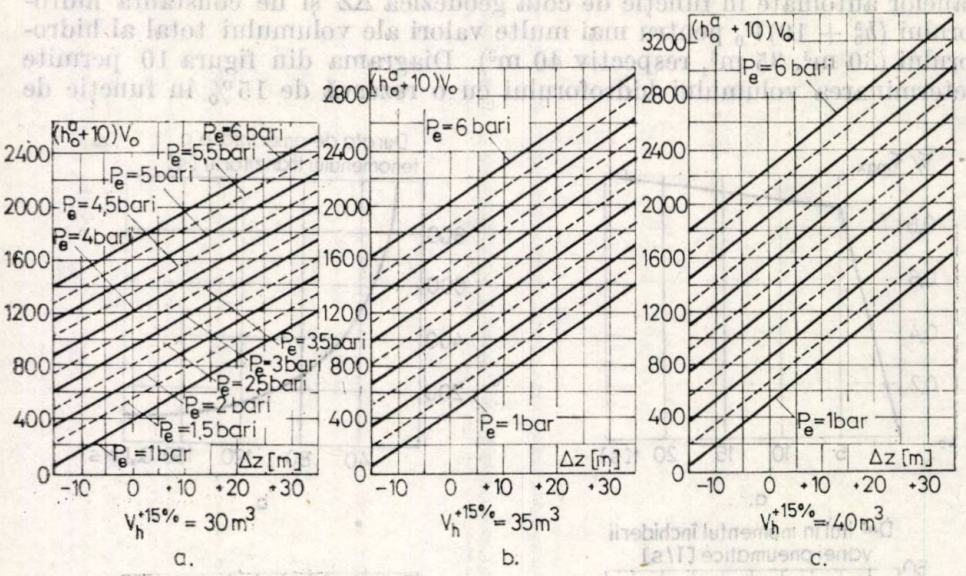


Fig. 9 *a*—*c*. — Diagrame pentru calculul presiunilor de etanșare ale vanelor automate.

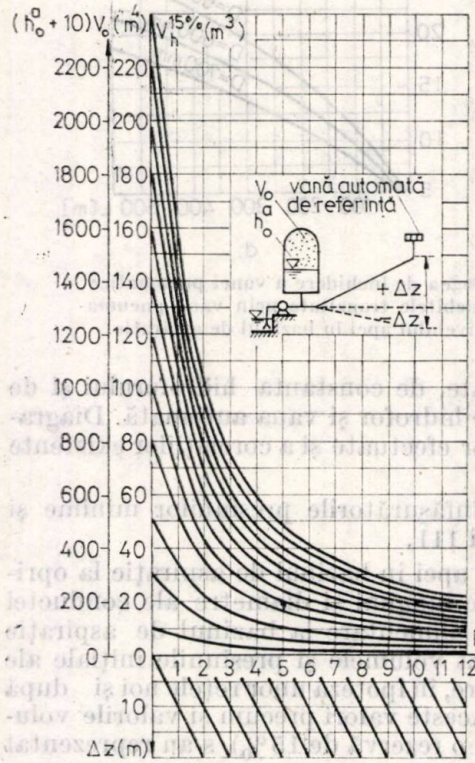


Fig. 10. — Diagramă pentru calculul volumului hidroforului în funcție de presiunea de etanșare a vanelor automate.

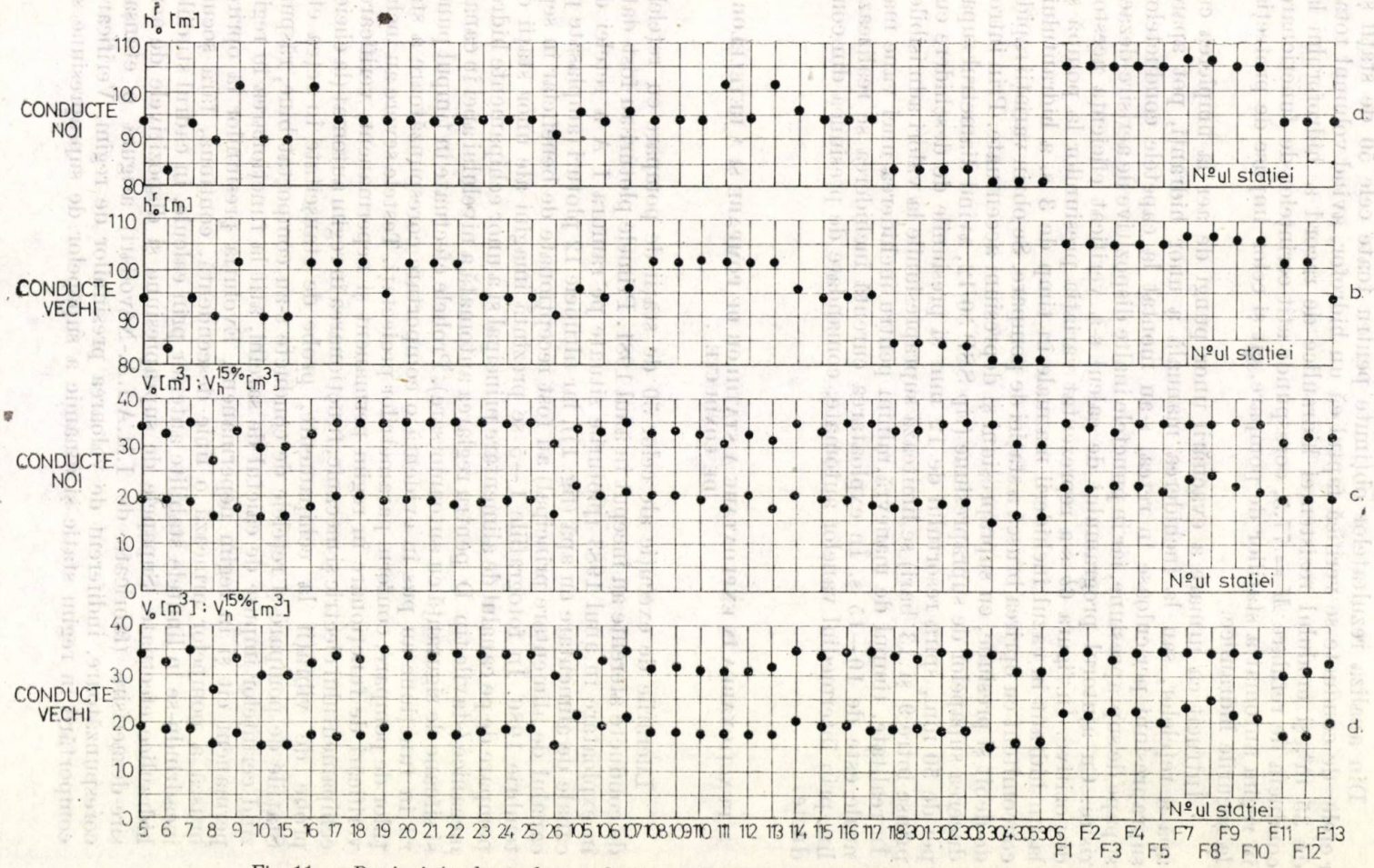


Fig. 11. — Presiuni și volume ale pernelor de aer din hidrofor în ipoteza conductelor noi și vechi.

Din analiza rezultatelor obținute pentru toate cele 50 de stații și rețele de conducte se verifică faptul că un hidrofor, avînd volumul total de 35 m³, și modulul rezistenței hidraulice de racord a hidroforului la conducta de refulare $M = 77{,}5$, corespunde atît cerințelor de funcționare în regim automat a stațiilor de pompare, cît și celor impuse de protecția la șocurile hidraulice.

Întrucît ca urmare a evacuării unor pungi de aer la umplerea cu apă a rețelelor, sau la închiderea manuală a unor hidranți, pot apare suprapresiuni periculoase în rețea, s-au montat la capetele conductelor supape de suprapresiune, iar în punctele înalte dispozitive de aerisire-dezaerisire. Cu ajutorul programului de calcul s-a verificat eficiența acestor dispozitive. În figura 6*b* s-a reprezentat variația presiunilor la pompă și la un hidrant în cazul închiderii manuale în timp de 3 s. a hidrantului, concomitent cu oprirea bruscă a stației de pompare. Se obțin variații rapide de debit și presiune, cu suprapresiuni și depresiuni accentuate. Prin introducerea supapelor de suprapresiune (tip SSP 50/12, avînd diametrul supapei de 50 mm, spira resortului de 12 mm și presiunile de deschidere cuprinse între 9 și 13 bari) se limitează suprapresiunile la valori admisibile. În realitate, timpul de manevră minim pentru închiderea unei vane manuale este de 10—15 s. În exploatarea curentă închiderea se realizează lin, prin intermediul vanelor automate, comandate de presiunea din conducte.

5. FUNCȚIONAREA ÎN EXPLOATARE A STAȚIILOR DE POMPARE ȘI A REȚELELOR DE CONDUCTE

Lucrările de execuție ale celor 50 de stații de pompare cu rețelele de conducte aferente au început în anul 1981. Primele ploturi au fost date în exploatare în anul 1983 (ploturile situate pe ramura I A a rețelei de canale de alimentare cu apă (fig. 1)), iar ultimele 12 ploturi (amplasate pe canalul de alimentare principal) au fost recepționate de beneficiar în septembrie 1986. În fotografiile 1—5 se prezintă imagini ale unor stații de pompare de pe canalul de alimentare principal și a unor echipamente hidromecanice (stavile tip D pentru reglarea automată a nivelului apei în canale și sifoane de siguranță cu autoamorsare). Probele efectuate în timpul punerii în funcțiune au pus în evidență o comportare corespunzătoare a stațiilor de pompare, conform parametrilor proiectați. Testele severe au inclus verificări de funcționare în regim permanent și nepermanent, verificarea echipamentului electric și mecanic, funcționarea în regim automat (la cheie), probe de vibrații la echipamente, probe de etanșeitate în rețea etc. Stațiile de pompare și rețelele de conducte s-au comportat bine, răspunzînd cerințelor impuse de caietul de sarcini, atît la funcționarea în regim permanent cît și în regim nepermanent. Evoluția presiunilor la oprirea bruscă a pompelor urmează o linie descendentă, continuă, fără șocuri, încadrîndu-se în limitele stabilite anterior prin calcule, în cadrul studiilor hidraulice efectuate. Supapele de suprapresiune și dispozitivele de aerisire-dezaerisire (fabricate de I.M.A.I.A.-Năvodari) asigură o etanșare corespunzătoare, indiferent de valoarea presiunilor de regim. Verificarea comportării în regim static și dinamic a supapelor de suprapresiune s-a

efectuat pe mai multe standuri de probă special amenajate în I.C.H. București, în prezența reprezentanților firmei SOGREAH. Reglarea și verificarea finală a presiunilor de etanșare pentru toate supapele de suprapresiune și dispozitivele de aerisire-dezaerisire montate în sistemul Kirkuk s-a efectuat de asemenea pe unul din standurile amintite.

6. CONCLUZII

Se prezintă rezultatele studiilor hidraulice efectuate în I.C.H. București, privind calculul mișcării permanente și nepermanente a apei în rețelele de conducte sub presiune ale sistemului de irigație Kirkuk-Adhaim din

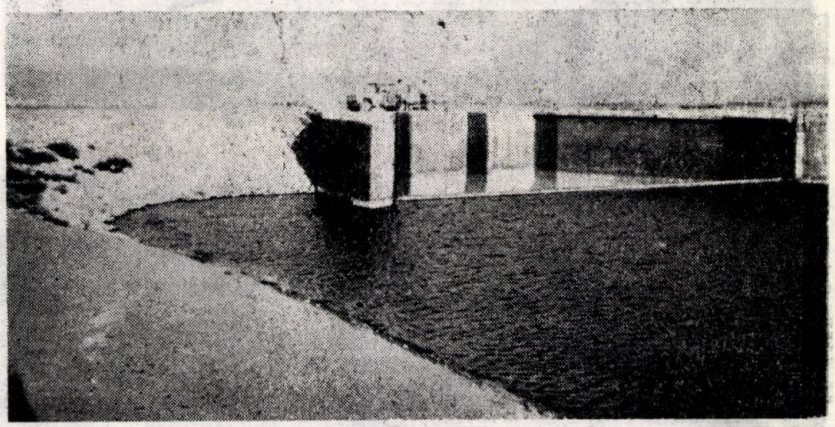


Foto 1

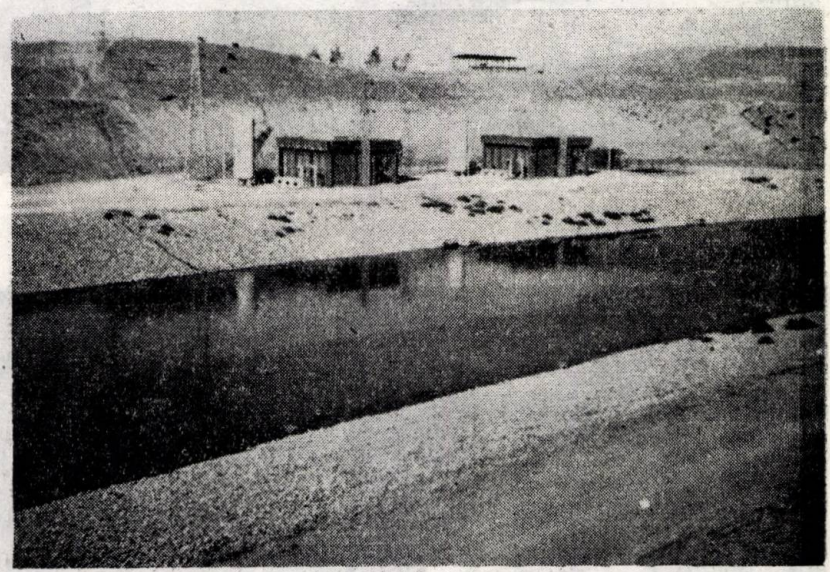


Foto 2

FOTO 1—5 — Cîteva aspecte din sistemul de irigație Kirkuk-Adhaim după punerea în funcțiune a acestuia, în anul 1986.

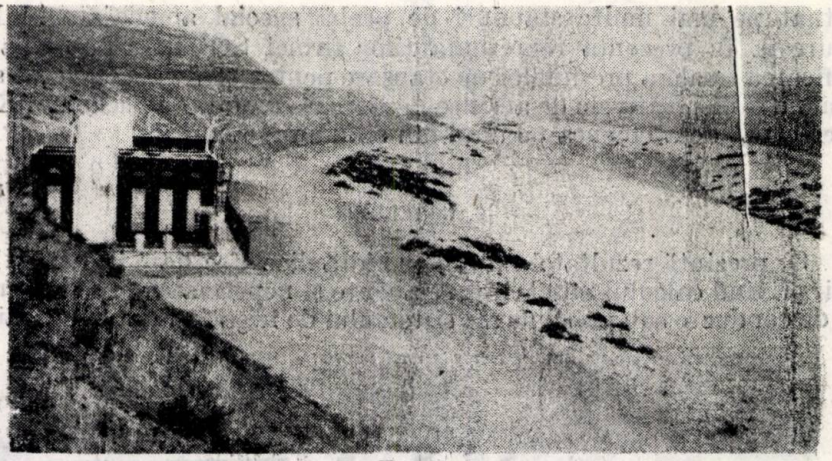


Foto 3

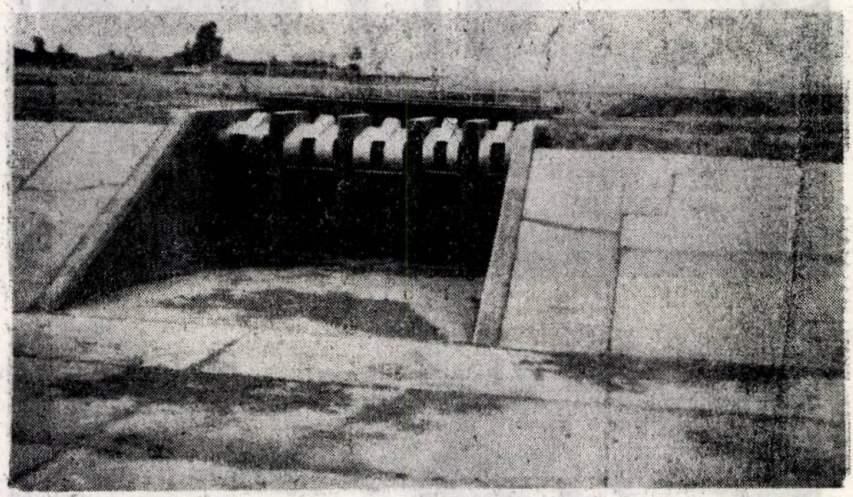


Foto 4

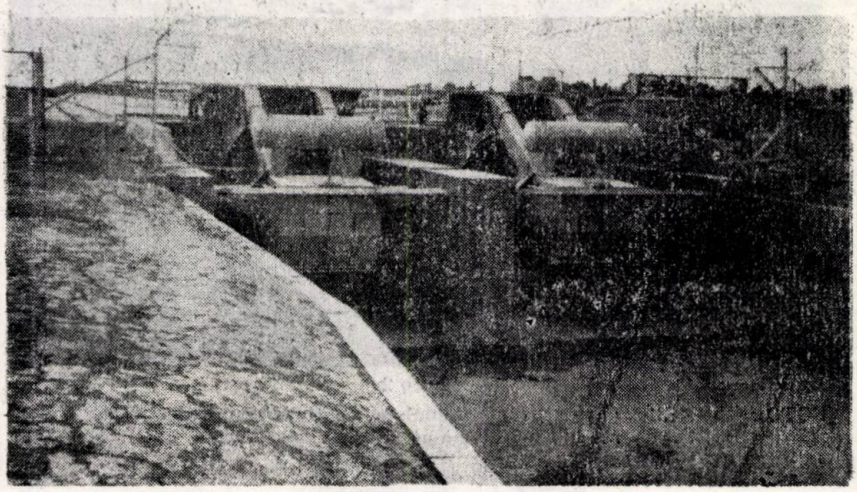


Foto 5

Irak. S-au calculat curbele caracteristice $H = f(Q)$ pentru fiecare rețea în parte, evidențiindu-se înălțimile de pompare maxime, în scopul dimensionării agregatelor de pompare și a stabilirii valorilor presiunilor de comandă a pompelor, la funcționarea în regim automat. Curbele caracteristice s-au calculat în ipoteza utilizării unor conducte de azbociment noi în rețea ($k = 0{,}2$ mm) și în ipoteza unor conducte cu rugozitate mărită după un număr de ani de funcționare ($k = 0{,}6$ mm). S-au calculat volumele și presiunile inițiale ale pernelor de aer pentru toate hidrofoarele ținîndu-se seama de condițiile impuse de funcționarea în regim automat a stațiilor de pompare.

Soluția de protecție stabilită în urma analizei regimului tranzitoriu pentru fiecare dintre cele 50 de stații de pompare și rețele de conducte, constă dintr-un hidrofor avînd un volum total de 35 m^3 și o conductă by-pass Ø 65 mm, care permite introducerea unei cantități de apă în spatele vanei pneumatice, în cazul apariției unor depresiuni în această zonă. Timpul de închidere al vanei pneumatice s-a ales astfel încît să fie mai mare decît timpul de închidere al oricăreia din vanele automate montate în rețea. În acest fel se asigură un regim lent de variație a presiunilor și debitelor la oprirea accidentală a stațiilor de pompare. Un astfel de sistem de protecție conlucrează cu vanele automate din rețea, ale căror caracteristici hidraulice sînt favorabile pentru atenuarea unor șocuri de presiune. Conducta by-pass cu diametrul de 65 mm joacă un rol secundar în sistemul de protecție preconizat, activarea curgerii apei prin conductă producîndu-se numai în cazul închiderii rapide, necontrolate a vanei pneumatice, sau în unele situații particulare de funcționare a stațiilor de pompare.

Pentru toate cele 50 de rețele de hidroameliorație s-au calculat variațiile presiunilor și debitelor în nodurile rețelelor, evoluția în timp a volumelor și presiunilor pernelor de aer din hidrofor, precum și valorile debitelor schimbate de fiecare rezervor de aer cu rețeaua de conducte. S-au dimensionat dispozitivele de aerisire-dezaerisire, supapele de suprapresiune și presiunile de reglaj pentru fiecare dintre cele peste 660 de vane cu închidere automată din rețelele de conducte.

Punerea în funcțiune a celor 50 de stații de pompare a avut loc eșalonat, în perioada 1983—1986. S-a obținut o bună concordanță între calculele teoretice și valorile măsurate pe teren în timpul testelor de punere în funcțiune. În prezent toate cele 50 de stații de pompare, cu rețelele de conducte aferente au fost recepționate și se află în exploatare curentă.

Primit la redacție la 20 noiembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. I. ANTON, *Cavitația*, Vol. **II**, Edit. Academiei, București, 1985.
2. J. E. BALL, *An algorithm for routing unsteady flows in urban drainage networks*, Journal of hydraulic research, **23**, 4 (1985).
3. B. E. BOSSERMAN, *Computer Analysis of Hydraulic Transients in a Complex Piping System*, American Water Works Association Journal, July, 1978.
4. D. CIOC, *Modele de calcul în mișcarea nepermanentă*, St. cerc. mec. apl., 5—6 (1984).
5. D. CIOC, G. TATU, *Asupra unui program general de calcul numeric al loviturii de berbec în rețele de conducte*, Buletinul științific al I C B, nr. 4, 1971.

6. GH. CONSTANTINESCU, *Contribuții privind protecția instalațiilor sub presiune utilizînd efectele aerului liber*, Teză de doctorat, I. P. Timișoara, 1983.

7. S. HANCU, M. POPESCU, I. JELEV, G. CONSTANTINESCU, *Unele aspecte privind calculul loviturii de berbec în instalațiile de pompare*, Hidrotehnica, 2 (1978).

8. I. JELEV, *Calculul regimului tranzitoriu al apei în conducte și rețele de conducte sub presiune*, I și II, St. cerc. mec. apl., **46**, 1 și 2 (1987).

9. I. JELEV, *Calculul amortizării oscilațiilor de debit și presiune în fenomenul de șoc hidraulic*, St. cerc. mec. apl., **46**, 4 (1987).

10. M. POPESCU, *Rezultate experimentale în studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune*, I și II, St. cerc. mec. apl., **41**, 4 și 5 (1982).

11. V. L. STREETER, E. B. WYLIE, *Hydraulic transients*, Mc. Graw-Hill Book Company, 1964.

12. G. TATU, *Contribuții la studiul fenomenelor de rezonanță în sistemele hidraulice sub presiune*, Teză de doctorat, București, 1980.

STUDIUL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE CU O LINIE DE ARTICULAȚIE INTERMEDIARĂ

de M. V. SOARE și V. PETCU

Institutul de construcții București

Sînt studiate plăcile dreptunghiulare, simplu rezemate pe contur, încărcate cu o încărcare uniform distribuită, care prezintă o linie de articulație paralelă cu latura scurtă. Calculul în domeniul elastic este bazat pe o metodă aproximativă; calculul în domeniul plastic examinează trei scheme de cedare.

1. INTRODUCERE

Sînt unele situații cînd plăcile de beton armat prefabricate, utilizate pentru planșee în construcțiile de locuințe, prezintă fisuri pătrunse, paralele cu latura scurtă, provenind fie din decofrare necorespunzătoare, fie din rezemare și transport necorespunzător.

Ca și în alte situații de defecțiuni ale prefabricatelor, se pune problema de a ști dacă elementul trebuie să fie rebutat sau poate fi utilizat, în anumite condiții, cu reparații.

Ocupîndu-ne de rezolvarea acestei probleme, am aplicat atît metoda de calcul în domeniul elastic (într-o variantă simplificată), cît și metoda la rupere (a liniilor de articulație plastice) pentru plăcile plane. Ele sînt detaliate în paragrafele 2 și 3.

2. STUDIUL ÎN DOMENIUL ELASTIC

Ținînd seama de rezultatele cunoscute în literatura de specialitate [3], [4] se poate da o soluție simplificată rapidă. În acest scop se pleacă de la placa dreptunghiulară simplu rezemată pe cele patru laturi și încărcată cu încărcarea uniform distribuită p. Fie a lungimea laturii scurte și b lungimea laturii lungi. Placa are o linie de articulație paralelă cu latura scurtă, situată în lungul liniei $x = b'$ (fig. 1).

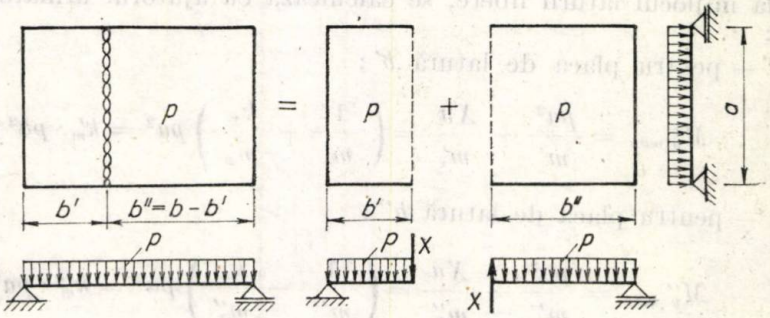


Fig. 1

Desfăcînd linia de articulație rezultă două plăci de dimensiuni a, b', respectiv a, b'' (cu $b'' = b - b'$) rezemate pe trei laturi și avînd o a patra latură liberă (ultima de lungime a).

În locul legăturii suprimate se introduce o încărcare liniară de natura forțelor tăietoare T_x. Această forță tăietoare are o ușoară variație în lungul laturii libere însă — în mod simplificator — se poate admite că ea este uniformă și de intensitate X. Mărimea ei urmează să fie determinată exprimînd că săgeata w_{max}, la mijlocul laturii libere, este aceeași la cele două plăci, acționate de încărcarea uniformă de suprafață p și de încărcările liniare X (fig. 1).

După K. Stiglat și H. Wippel [4], săgeata maximă poate fi scrisă sub următoarea formă:

— pentru placa de latură b'

$$w'_{max} = \frac{pa^3b'}{k'_w K} + \frac{Xa^3}{k'_{wx} K}; \tag{1.a}$$

— pentru placa de latură b''

$$w''_{max} = \frac{pa^3b''}{k''_w K} - \frac{Xa^3}{k''_{wx} K}, \tag{1.b}$$

în care k'_w, k''_w sînt coeficienți numerici tabelați în funcție de raportul laturilor b'/a, respectiv b''/a și corespunzător unei încărcări uniforme de suprafață; k'_{wx}, k''_{wx} — coeficienți numerici tabelați în funcție de raportul laturilor b'/a, respectiv b''/a și corespunzători unei încărcări liniare uniforme aplicată în lungul laturii libere.

Din egalitatea $w'_{max} = w''_{max}$ rezultă, după unele transformări,

$$X = \frac{-b'/k'_w + b''/k''_w}{1/k'_{wx} + 1/k''_{wx}}\, p = k_x \cdot pa. \tag{2}$$

Odată determinat X, momentele încovoietoare maxime, care se produc la mijlocul laturii libere, se calculează cu ajutorul următoarelor relații:

— pentru placa de latură b':

$$M'_{y,max} = \frac{pa^2}{m'} + \frac{Xa}{m'_x} = \left(\frac{1}{m'} + \frac{k_x}{m'_x}\right) pa^2 = k'_m \cdot pa^2; \tag{3.a}$$

— pentru placa de latură b'':

$$M''_{y,max} = \frac{pa^2}{m''} - \frac{Xa}{m''_x} = \left(\frac{1}{m''} - \frac{k_x}{m''_x}\right) pa^2 = k''_m \cdot pa^2, \tag{3.b}$$

în care m', m'', m'_x, m''_x sînt coeficienți tabelați în funcție de raportul b'/a, respectiv b''/a.

Ca valoare de referință se poate considera momentul încovoietor maxim (la centrul plăcii) din cazul plăcii dreptunghiulare fără fisură pătrunsă

$$M_{y,max} = k_m \cdot pa^2,$$

în care k_m este un coeficient numeric funcție de raportul laturilor b/a. Deoarece poziția b' a fisurii poate varia de la caz la caz, problema a fost studiată pentru diferite rapoarte $b'/b = 0{,}20 \ldots 0{,}50$. Tabelarea este posibilă doar cunoscînd raportul laturilor plăcii întregi b/a; pentru cazul concret semnalat de beneficiar au corespuns următoarele valori: $a = 3{,}52$ m, $b = 5{,}32$ m, deci un raport $b/a = 1{,}5114$ (pentru care $k_m = 0{,}0736$).

Odată fixat raportul b/a se poate face reprezentarea grafică a variației momentelor $M'_{y,max}$ și $M''_{y,max}$, respectiv a coeficienților k'_m și k''_m, în funcție de raportul b'/b (fig. 2). Din figura 2 rezultă că, pentru valori ale raportului $b'/b \in (0{,}315 ; 0{,}685)$ placa fisurată *nu* lucrează mai defavorabil decît placa întreagă.

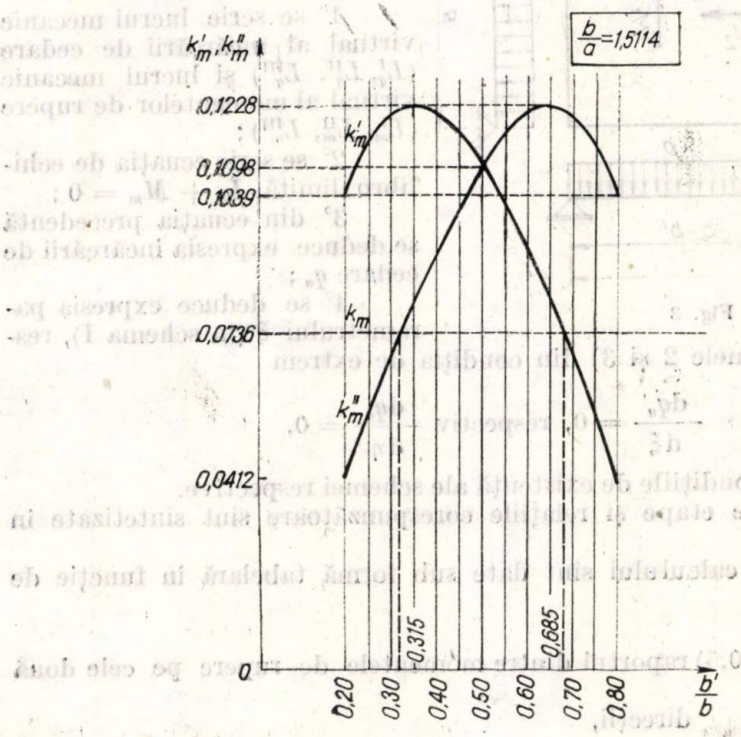


Fig. 2

Ținînd seama de valorile numerice precedente, se poate admite regula forfetară că o fisură pătrunsă apărută în treimea centrală a laturii b, nu afectează capacitatea portantă a plăcii.

Curbele k'_m și k''_m din figura 2 sînt simetrice față de mijlocul laturii. Apariția unei fisuri pătrunse în treimile marginale poate reduce considera-

bil capacitatea portantă a plăcii, așa cum rezultă din figura 2. În această situație, utilizarea plăcii va putea fi condiționată de încărcări mai reduse sau, în cazuri extreme, aceasta va putea fi rebutată.

3. STUDIUL IN DOMENIUL PLASTIC

Metoda de calcul la rupere are avantajul că permite luarea în considerare a armării diferite în cele două direcții; fie M_1 și M_2 momentele de rupere pe unitatea de lățime de placă, pe direcția laturii a, respectiv b, placa fiind presupusă armată uniform în fiecare direcție (fig. 3).

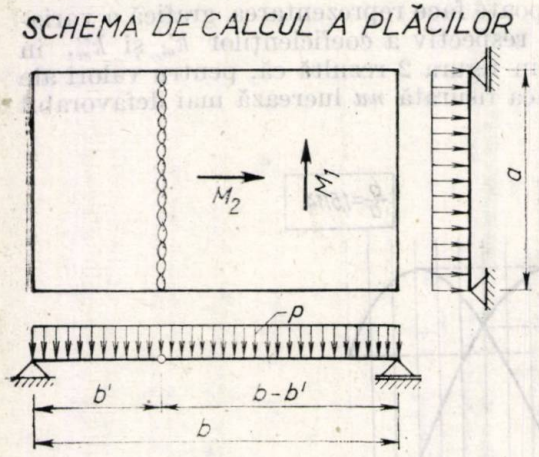


Fig. 3

Din examinarea mecanismelor posibile de cedare au rezultat cele trei scheme notate I, II, III, sintetizate în tabelul 1.

Succesiunea calculului este următoarea:

1° se scrie lucrul mecanic virtual al încărcării de cedare ($L_q^{\mathrm{I}}, L_q^{\mathrm{II}}, L_q^{\mathrm{III}}$) și lucrul mecanic virtual al momentelor de rupere ($L_m^{\mathrm{I}}, L_m^{\mathrm{II}}, L_m^{\mathrm{III}}$);

2° se scrie ecuația de echilibru limită $L_q + M_m = 0$;

3° din ecuația precedentă se deduce expresia încărcării de cedare q_u;

4° se deduce expresia parametrului ξ (în schema I), respectiv η (în schemele 2 și 3) din condiția de extrem

$$\frac{\mathrm{d}q_u}{\mathrm{d}\xi} = 0, \text{ respectiv } \frac{\mathrm{d}q_u}{\mathrm{d}\eta} = 0,$$

ținînd seama de condițiile de existență ale schemei respective.

Toate aceste etape și relațiile corespunzătoare sînt sintetizate în tabelul 1.

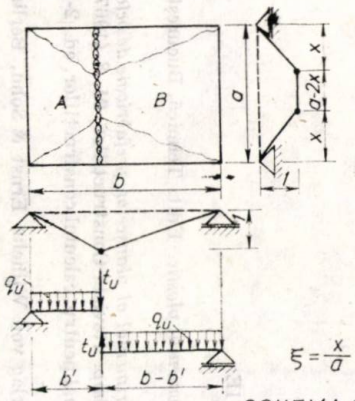
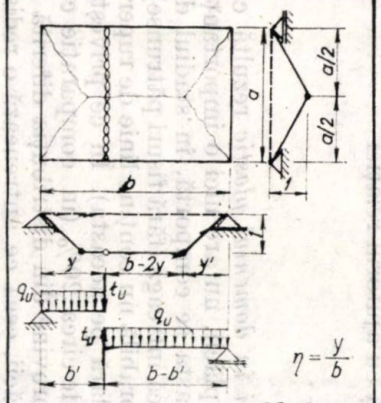
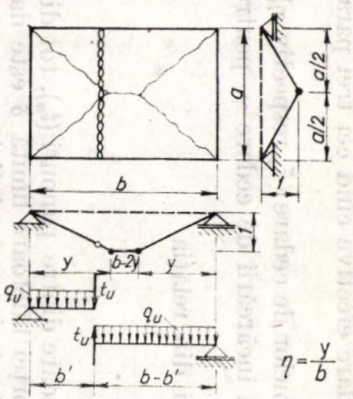
Rezultatele calculului sînt date sub formă tabelară în funcție de parametrii:

$\mu = \dfrac{M_2}{M_1} \in (1\,;\ 0{,}5)$ raportul dintre momentele de rupere pe cele două direcții,

$\lambda = \dfrac{b}{a} \in (1\,;\ 2)$ raportul dintre latura lungă și latura scurtă,

$\beta = \dfrac{b'}{b} \in (0{,}25\,;\ 0{,}50)$ raportul dintre lățimea panoului mic și latura lungă a plăcii.

Tabelul 1

SCHEMA MECANISMULUI POSIBIL DE CEDARE	 SCHEMA I	 SCHEMA II	 SCHEMA III
LUCRUL MECANIC VIRTUAL AL INCARCARII DE CEDARE	$Lq = \frac{\lambda(3-2\xi)}{6} q_u a^2$	$Lq = \frac{\lambda(3-2\eta)}{6} q_u a^2$	
LUCRUL MECANIC VIRTUAL AL MOMENTELOR DE RUPERE	$Lm = -\left[\frac{2\lambda}{\xi} + \frac{2\xi\mu}{\lambda\beta(1-\beta)}\right] M_1$	$Lm = -\frac{2(2\lambda^2\eta+\mu)}{\lambda\eta} M_1$	
EXPRESIA INCARCARII DE CEDARE	$q_u = \frac{12}{\lambda^2\beta(1-\beta)} \frac{\lambda^2\beta(1-\beta)+\mu\xi^2}{\xi(3-2\xi)} \frac{M_1}{a^2}$	$q_u = \frac{12}{\lambda^2} \frac{2\lambda^2\eta+\mu}{\eta(3-2\eta)} \frac{M_1}{a^2}$	
EXPRESIA PARAMETRULUI ξ SAU η DIN CONDITIA $\frac{dq_u}{d\xi}$ SAU $\frac{dq_u}{d\eta} = 0$	$\xi = \frac{-2\lambda^2\beta(1-\beta)+\sqrt{4\lambda^4\beta^2(1-\beta)^2+9\lambda^2\beta(1-\beta)\mu}}{3\mu}$	$\eta = \frac{-2\mu+\sqrt{4\mu^2+12\mu\lambda^2}}{4\lambda^2}$	
CONDITII DE EXISTENTA A SCHEMEI	$\xi \leq 0{,}5$ $\mu \geq \frac{4}{3}\lambda^2\beta(1-\beta)$	$\eta \leq \beta$ $\mu \leq \frac{4\lambda^2\beta^2}{3-4\beta}$	$\beta < \eta < 0.5$ $4\lambda^2\beta^2 < \mu < \frac{2\lambda^2}{3}(\sqrt{7}-1)$

În tabelul 2 se dau schemele de cedare efective cînd cei trei parametri μ, λ, β variază.

În tabelul 3 se dau parametrii schemelor de cedare (ξ, respectiv η).

În tabelele 4 și 5 se dă parametrul încărcării de cedare γ, pentru schema I și, respectiv, schemele II și III.

Încărcarea de cedare rezultă atunci din relația

$$q_u = \gamma \frac{M_1}{a^2}.$$

Separat a fost evaluată și forța tăietoare dintre panouri (t_u), tot din ecuația de echilibru limită. Parametrul forței tăietoare limită δ este dat în tabelul 6. Forța tăietoare limită rezultă cu ajutorul relației

$$t_u = \delta \frac{M_1}{a}.$$

Din punctul de vedere al *calculului în domeniul plastic* rezultă că fisura, chiar pătrunsă pe toată grosimea plăcii, nu are nici o importanță asupra capacității portante a plăcii; aceasta se comportă, în stadiul de cedare (transformare în mecanism) ca o placă întreagă (fără fisuri pătrunse), deoarece schema de cedare cea mai defavorabilă nu conține linie de rupere în lungul fisurii pătrunse (ci perpendiculară pe aceasta). În ce privește momentul de rupere rezultă o reducere de circa 20% (în comparație cu calculul în domeniul elastic); reducerea provine din distribuția diferită a momentelor încovoietoare pe suprafața plăcii, ceea ce antrenează o redistribuție plastică a momentelor.

Primit la redacție la 23 octombrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Calculul structurilor de beton armat în domeniul plastic*. Edit. Tehnică, București, 1972.
2. M. V. SOARE, V. PETCU, *Studiul teoretic și experimental al planșeelor prefabricate de beton armat de mari dimensiuni, îmbinate în cîmp*. Revista Construcțiilor, **21**, 8 (1967).
3. M. V. SOARE, *Plăci plane*. Secțiunea VI din Manual pentru calculul construcțiilor, ed. 2-a, Edit. Tehnică, București, 1977.
4. K. STIGLAT, H. WIPPEL, *Platten*. 2, Aufl., Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1973.

Tabelul 2

SCHEMELE EFECTIVE DE CEDARE

μ \ β	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50

λ = 1,0

1,0	III	I

λ=1,1

1,0	III	I
0,9		
0,8		

λ=1,2

1,0	III	I
0,9		
0,8		
0,7		II
0,6		

λ=1,3

1,0	III	I
0,9		
0,8		
0,7		II
0,6		
0,5		

λ=1,4

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=1,5

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=1,6

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=1,7

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=1,8

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=1,9

1,0	III	II
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

λ=2,0

1,0		
0,9		
0,8		
0,7		
0,6		
0,5		

Tabelul 3

PARAMETRII SCHEMELOR DE CEDARE

PARAMETRUL ξ

μ \ β	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ = 1,0						
1,0	——	0,3392	0,3488	0,3554	0,3591	0,3604
λ = 1,1						
1,0	——		0,3723	0,3790	0,3828	0,3841
0,9			0,3856	0,3923	0,3962	0,3975
0,8				0,4073	0,4112	0,4125
λ = 1,2						
1,0	——			0,4010	0,4049	0,4062
0,9				0,4145	0,4184	0,4197
0,8					0,4336	0,4348
λ = 1,3						
1,0	——				0,4254	0,4254

PARAMETRUL η

λ \ μ	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
1,0	0,5000	0,4868	0,4718	0,4547	0,4348	0,4114
1,1	0,4759	0,4625	0,4473	0,4302	0,4104	0,3872
1,2	0,4537	0,4401	0,4250	0,4078	0,3882	0,3654
1,3	0,4331	0,4195	0,4044	0,3875	0,3682	0,3458
1,4	0,4140	0,4006	0,3856	0,3689	0,3499	0,3281
1,5	0,3964	0,3831	0,3684	0,3519	0,3333	0,3120
1,6	0,3801	0,3670	0,3525	0,3363	0,3181	0,2973
1,7	0,3650	0,3520	0,3378	0,3220	0,3042	0,2840
1,8	0,3509	0,3382	0,3242	0,3088	0,2914	0,2717
1,9	0,3379	0,3254	0,3117	0,2965	0,2796	0,2604
2,0	0,3257	0,3134	0,3000	0,2852	0,2687	0,2500

Tabelul 4

PARAMETRUL ÎNCĂRCĂRII DE CEDARE $\gamma = \frac{q_u a^2}{M_1}$

SCHEMA I

μ \ β	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ = 1,0						
1,0	——	23,587	22,933	22,512	22,323	22,212
λ = 1,1						
1,0	——		21,487	21,108	20,895	20,826
0,9			20,751	20,393	20,192	20,127
0,8				19,643	19,455	19,394
λ = 1,2						
1,0	——			19,949	19,756	19,694
0,9				19,302	19,120	19,061
0,8					18,459	18,397
λ = 1,3						
1,0	——				18,804	18,747

Tabelul 5

SCHEMELE II ŞI III

μ \ λ	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
1,0	24,000	22,792	21,566	20,317	19,038	17,722
1,1	21,891	20,866	19,823	18,758	17,666	16,537
1,2	20,246	19,360	18,458	17,535	16,585	15,601
1,3	18,932	18,156	17,364	16,552	15,715	14,845
1,4	17,858	17,171	16,467	15,745	14,998	14,220
1,5	16,968	16,352	15,721	15,071	14,399	13,697
1,6	16,221	15,664	15,093	14,504	13,894	13,255
1,7	15,584	15,077	14,557	14,018	13,459	12,874
1,8	15,036	14,571	14,092	13,598	13,084	12,544
1,9	14,559	14,130	13,688	13,231	12,755	12,255
2,0	14,141	13,743	13,333	12,909	12,466	12,000

Tabelul 6

PARAMETRUL FORȚEI TĂIETOARE LIMITĂ

$\delta = \frac{a t_u}{M_1}$

μ \ β	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ = 1,0						
1,0	2,8333	1,9555	1,4126	0,9189	0,4528	0,0000
λ = 1,1						
1,0	2,8059	2,3965	1,4221	0,9247	0,4556	0,0000
0,9	2,6495	2,2619	1,3543	0,8803	0,4338	0,0000
0,8	2,4877	2,1221	1,6998	0,8330	0,4104	0,0000
λ = 1,2						
1,0	2,7846	2,3754	1,9254	0,9298	0,4582	0,0000
0,9	2,6321	2,2444	1,7972	0,8849	0,4360	0,0000
0,8	2,4721	2,1067	1,6871	1,2068	0,4124	0,0000
0,7	2,3034	1,9624	1,5730	1,1294	0,5721	0,0000
0,6	2,1240	1,8097	1,4538	1,0303	0,5151	0,0000
λ = 1,3						
1,0	2,7701	2,3617	1,8915	1,3522	0,4602	0,0000
0,9	2,6195	2,2324	1,7886	1,2813	0,6601	0,0000
0,8	2,4609	2,0964	1,6807	1,2077	0,6086	0,0000
0,7	2,2951	1,9560	1,5722	1,1116	0,5558	0,0000
0,6	2,1175	1,8063	1,4017	1,0028	0,5014	0,0000
0,5	1,9299	1,6519	1,3347	0,8898	0,4449	0,0000
λ = 1,4						
1,0	2,7569	2,3489	1,8821	1,3493	0,6901	0,0000
0,9	2,6086	2,2225	1,7830	1,2836	0,6419	0,0000
0,8	2,4524	2,0900	1,6801	1,1854	0,5927	0,0000
0,7	2,2885	1,9524	1,5760	1,0842	0,5421	0,0000
0,6	2,1120	1,8054	1,4697	0,9798	0,4899	0,0000
0,5	1,9256	1,6549	1,3062	0,8708	0,4354	0,0000
λ = 1,5						
1,0	2,7468	2,3399	1,8775	1,3454	0,6727	0,0000
0,9	2,6000	2,2160	1,7824	1,2530	0,6265	0,0000
0,8	2,4447	2,0851	1,6826	1,1582	0,5791	0,0000
0,7	2,2815	1,9496	1,5832	1,0680	0,5304	0,0000
0,6	2,1107	1,8116	1,4397	0,9598	0,4799	0,0000
0,5	1,9279	1,6687	1,2822	0,8548	0,4274	0,0000
λ = 1,6						
1,0	2,7461	2,3441	1,8910	1,3154	0,6577	0,0000
0,9	2,5934	2,2126	1,7868	1,2262	0,6131	0,0000
0,8	2,4420	2,0877	1,6965	1,1348	0,5674	0,0000
0,7	2,2822	1,9577	1,5609	1,0406	0,5203	0,0000
0,6	2,1335	1,8521	1,4145	0,9430	0,4715	0,0000
0,5	1,9343	1,6816	1,2612	0,8408	0,4204	0,0000
λ = 1,7						
1,0	2,7315	2,3301	1,8823	1,2894	0,6447	0,0000
0,9	2,5894	2,2134	1,7985	1,2030	0,6015	0,0000
0,8	2,4384	2,0904	1,6716	1,1144	0,5572	0,0000
0,7	2,2817	1,9667	1,5345	1,0230	0,5115	0,0000
0,6	2,1126	1,8367	1,3923	0,9282	0,4641	0,0000
0,5	1,9451	1,6572	1,2429	0,8286	0,4143	0,0000
λ = 1,8						
1,0	2,7170	2,3307	1,8938	1,2664	0,6332	0,0000
0,9	2,5860	2,2168	1,7739	1,1826	0,5913	0,0000
0,8	2,4367	2,0977	1,6449	1,0966	0,5483	0,0000
0,7	2,2808	1,9837	1,5114	1,0076	0,5038	0,0000
0,6	2,1230	1,8300	1,3725	0,9150	0,4575	0,0000
0,5	1,9548	1,6360	1,2270	0,8180	0,4090	0,0000
λ = 1,9						
1,0	2,7274	2,3386	1,8693	1,2462	0,6231	0,0000
0,9	2,5857	2,2253	1,7469	1,1647	0,5823	0,0000
0,8	2,4392	2,1122	1,6212	1,0808	0,5404	0,0000
0,7	2,2877	1,9880	1,4910	0,9940	0,4970	0,0000
0,6	2,1348	1,8324	1,3743	0,9162	0,4581	0,0000
0,5	1,9755	1,6168	1,2126	0,8084	0,4042	0,0000
λ = 2,0						
1,0	2,7269	2,3471	1,8423	1,2282	0,6141	0,0000
0,9	2,5891	2,2406	1,7229	1,1486	0,5743	0,0000
0,8	2,4450	2,1332	1,5999	1,0666	0,5333	0,0000
0,7	2,2982	1,9636	1,4727	0,9818	0,4909	0,0000
0,6	2,1468	1,7864	1,3398	0,8932	0,4466	0,0000
0,5	2,0000	1,6000	1,2000	0,8000	0,4000	0,0000

REDUCTOR DE TURAȚIE FRONTAL CU BILE

de V. HANDRA-LUCA
Institutul Politehnic Cluj-Napoca
M. V. BARA
I.C.S.I.T. Titan București, filiala Cluj-Napoca

Reductorul de turație frontal cu bile constituie un nou tip de reductor la care reducerea turației de la arborele conducător la cel condus se face prin intermediul a trei discuri din care două (unul conducător și unul fix) sînt profilate frontal, iar unul (cel condus) este prevăzut cu canale radiale. Legătura dintre discuri este asigurată de niște bile. Prin profilarea corespunzătoare a celor două discuri se pot obține diferite rapoarte de transmitere constante. În lucrare se face un studiu geometrico-cinematic al acestui nou tip de reductor prezentîndu-se ecuațiile după care se profilează cele două discuri. De asemenea, se deduce relația care permite determinarea razei cercului de bază.

1. INTRODUCERE

Părțile principale [1] ale unui reductor de turație frontal cu bile (fig. 1) sînt : elementul conducător *1* sub forma unui disc profilat frontal, elementul condus *3* sub forma unui disc cu canale radiale și elementul fix

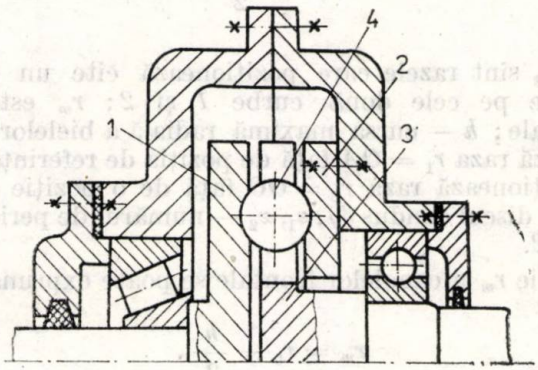


Fig. 1

2 sub forma unui disc profilat frontal. Între cele două discuri (*1* și *2*) profilate frontal și discul cu canale radiale se interpun bilele *4* (se pot pune în locul bilelor role dacă discurile *1* și *2* sînt profilate cu canale de secțiune corespunzătoare) din diametrul cărora o treime intră în canalele discului conducător *1*, o treime intră în canalele discului fix *2*, iar treimea din mijloc intră în canalele discului condus *3*. În figura 2 sînt prezentate aspectele canalelor celor trei discuri.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 2, 1988, P. 175—181

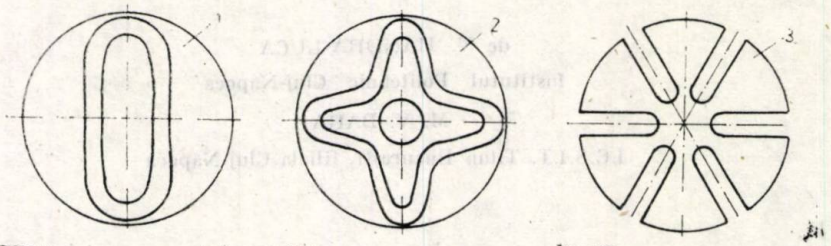


Fig. 2

2. GEOMETRIA ȘI CINEMATICA REDUCTORULUI

În vederea obținerii unui raport de transmitere $i_{13} = \omega_1/\omega_3 = \text{const.}$ (unde ω_1, ω_3 sînt vitezele unghiulare ale discurilor conducător *1* și condus *3)* este necesar ca cele două discuri să fie profilate după legi bine definite.

Considerăm că fibra medie (fig. 3) a canalului discului *1* are ecuația :

$$r_1 = r_m + \frac{h}{2} \sin z_1 \beta, \tag{1}$$

iar a canalului discului fix *2* are ecuația :

$$r_2 = r_3 = r_m + \frac{h}{2} \sin z_2 \varphi_3, \tag{2}$$

unde

r_1, $r_2 = r_3$ sînt razele care poziționează cîte un punct curent A, respectiv C de pe cele două curbe *1* și *2*; r_m este raza medie a canalelor frontale; h — cursa maximă radială a bielelor *4*; β — unghiul care poziționează raza $r_1 = OA$ față de poziția de referință OA_0; φ_3 — unghiul care poziționează raza $r_2 = OC$ față de o poziție de referință OC_0 (poziționează și discul condus *3)*; z_1, z_2 — numărul de perioade ale curbelor discurilor *1* și *2*.

Raza medie r_m a canalelor frontale se poate exprima cu relația

$$r_m = r_0 + \frac{h}{2}, \tag{3}$$

unde r_0 este raza cercului de bază a celor două discuri (raza cercului de la care începe profilarea discurilor).

Punînd condiția $r_1 = r_2$, rezultă

$$\sin z_2 \varphi_3 - \sin z_1 \beta = 0. \tag{4}$$

Dacă φ_1, β, φ_3 sînt pozitive cînd se măsoară în sens orar și negative cînd se măsoară în sens trigonometric, atunci

$$\varphi_3 - \beta = \varphi_1 \tag{5}$$

și, deci, (4) devine

$$\sin z_2\varphi_3 - \sin z_1(\varphi_3 - \varphi_1) = 0, \tag{6}$$

cu soluțiile:

$$\varphi_3 = \frac{z_1}{z_2 + z_1}\,\varphi_1 + \frac{(2k+1)\,\pi}{z_2 + z_1},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ z_2 + z_1 - 1, \tag{7}$$

$$\varphi_3' = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}\,\varphi_1 + \frac{2k'\pi}{z_2 - z_1},\ k' = 0,1,\ 2,\ \ldots,\ z_2 - z_1 - 1. \tag{8}$$

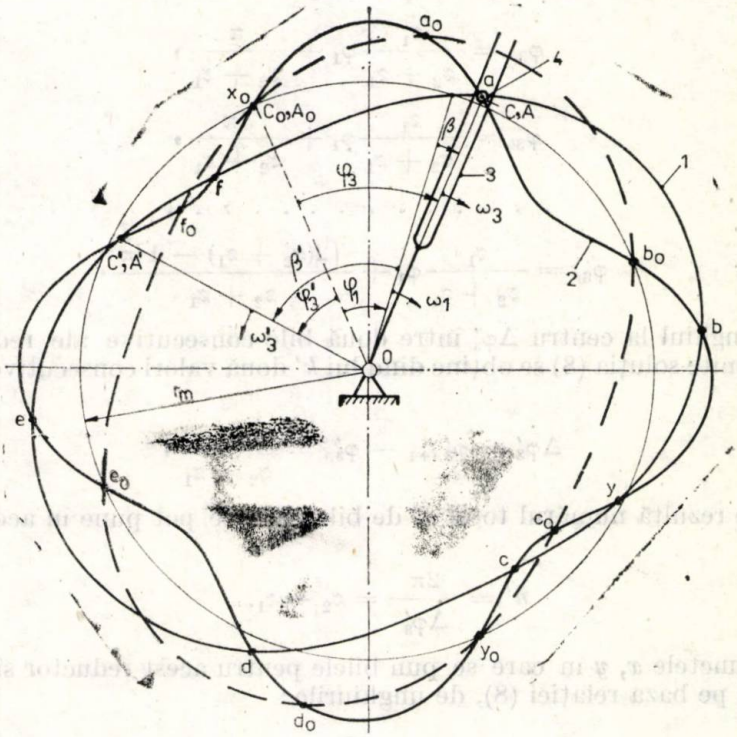


Fig. 3

Din (7) și (8) prin derivare în raport cu timpul se obțin rapoartele de transmitere i_{13}, i'_{13}, adică

$$i_{13} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_3} = \frac{z_2 + z_1}{z_1}, \tag{9}$$

respectiv

$$i'_{13} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}'_3} = -\frac{z_2 - z_1}{z_1}. \tag{10}$$

Unghiul la centru $\Delta\varphi_3$ între două bile consecutive ale reductorului care admite soluția (7) se obțin dînd lui k două valori consecutive i, $i+1$, deci

$$\Delta\varphi_3 = \varphi_{3,i+1} - \varphi_{3,i} = \frac{2\pi}{z_2 + z_1}, \tag{11}$$

de unde rezultă numărul total n de bile ce se pot pune în acest caz, și anume:

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_3} = z_2 + z_1. \tag{12}$$

Punctele $a, b, \ldots, f$ în care se pun bilele pentru acest reductor sînt determinate, pe baza relației (7), de unghiurile:

$$\begin{aligned}
\varphi_{3a} &= \frac{z_1}{z_2 + z_1}\varphi_1 + \frac{\pi}{z_2 + z_1}, \\
\varphi_{3b} &= \frac{z_1}{z_2 + z_1}\varphi_1 + \frac{3\pi}{z_2 + z_1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{3f} &= \frac{z_1}{z_2 + z_1}\varphi_1 + \frac{[2(z_2 + z_1) - 1]\pi}{z_2 + z_1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Unghiul la centru $\Delta\varphi_3'$ între două bile consecutive ale reductorului care admite soluția (8) se obține dînd lui k' două valori consecutive i, $i+1$, deci

$$\Delta\varphi_3' = \varphi_{3,i+1}' - \varphi_{3,i}' = \frac{2\pi}{z_2 - z_1}, \tag{14}$$

de unde rezultă numărul total n' de bile care se pot pune în acest caz, și anume

$$n' = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_3'} = z_2 - z_1. \tag{15}$$

Punctele x, y în care se pun bilele pentru acest reductor sînt determinate, pe baza relației (8), de unghiurile:

$$\varphi_{3x}' = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}\varphi_1 + 0, \tag{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{3y}' = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}\varphi_1 + \frac{2(z_2 - z_1 - 1)\pi}{z_2 - z_1}. \tag{16}$$

Aceste unghiuri se măsoară din $C_0 \equiv A_0$ care se află la intersecția celor două fibre medii pentru $r_1 = r_2 = r_m$.

Punctele $C_0 \equiv A_0$ se iau pe cercul de rază r_m la intersecția celor două fibre medii.

Din mulțimea punctelor de intersecție a celor două fibre medii pe cercul de rază $r_m(x_0, b_0, y_0, e_0)$ se aleg $C_0 \equiv A_0$ acele puncte în care cele două raze r_1, r_2 au aceeași monotonie (cresc sau descresc ambele la dreapta sau la stînga punctului). Deci pe figura 3 se poate lua x_0 sau y_0; s-a adoptat $C_0 \equiv A_0$ în x_0.

Se consideră că fibra medie a canalului discului conducător *1* are ecuația:

$$r_1 = r_m + \frac{h}{2} \cos z_1\beta, \tag{17}$$

iar a canalului discului fix *3* are ecuația:

$$r_2 = r_3 = r_m + \frac{h}{2} \cos z_2\varphi_3, \tag{18}$$

unde notațiile au semnificația din relațiile (1), (2), (3), (4).

Din condiția $r_1 = r_2$, ținînd seama de (17), (18), rezultă

$$\cos z_2\varphi_3 - \cos z_1(\varphi_3 - \varphi_1) = 0, \tag{19}$$

cu soluțiile

$$\varphi_3 = \frac{z_1}{z_2 + z_1}\varphi_1 + \frac{2k\pi}{z_2 + z_1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, z_2 + z_1 - 1, \tag{20}$$

$$\varphi_3' = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}\varphi_1 + \frac{2k'\pi}{z_2 - z_1}, \quad k' = 0, 1, 2, \ldots, z_2 - z_1 - 1. \tag{21}$$

Se vede că mărimile i_{13}, i_{13}', $\Delta\varphi_3$, $\Delta\varphi_3'$, n, n' și în acest caz sînt definite de relațiile (9), ..., (15).

Deoarece din (6) s-au obținut două familii de soluții și anume (7) și (8), rezultă că la aceeași geometrie a discurilor *1* și *2* (fig. 3) se pot obține două rapoarte de transmitere a reductorului prin plasarea unui număr de bile n sau n'.

Se vede că cele două rapoarte de transmitere i_{13}, i_{13}', dacă presupunem $z_2 > z_1$, au semne diferite, primul fiind pozitiv, iar cel de al doilea negativ. Dacă presupunem $z_2 < z_1$, ambele rapoarte de transmitere au valori pozitive.

În tabelul 1 se dau valorile rapoartelor de transmitere i_{13}, i_{13}' pentru diferite valori ale lui z_1 și z_2.

Se vede că pentru cazul din figura 3 s-a luat $z_1 = 2$, $z_2 = 4$ ceea ce conduce, pe baza relațiilor deduse, la valorile $n = 6$, $n' = 2$, $\Delta\varphi_3 = \pi/3$, $\Delta\varphi_3' = \pi$, $i_{13} = 3$, $i_{13}' = -1$. Pozițiile celor $n = 6$ bile sînt evidențiate prin punctele a, b, c, d, e, f, iar pozițiile celor $n' = 2$ bile sînt evidențiate prin punctele x, y.

3. DETERMINAREA RAZEI CERCULUI DE BAZĂ

Determinarea razei r_0 a cercului de bază se face din condiția de evitare a fenomenului de interferență, adică

$$\rho_{min} \geqslant r_r \tag{22}$$

Tabelul 1

z_2 \ z_1	1	2	3	4	5	6	...	
1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	...	i_{13}
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	...	i'_{13}
2	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	...	i_{13}
	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	...	i'_{13}
3	4	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{6}$	...	i_{13}
	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	...	i'_{13}
4	5	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{6}$	...	i_{13}
	-3	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	...	i'_{13}
5	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{11}{6}$	...	i_{13}
	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{6}$	...	i'_{13}
6	7	4	3	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{5}$	2	...	i_{13}
	5	-2	-1	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{5}$	0	...	i'_{13}
7	8	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{6}$	...	i_{13}
	-6	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{6}$	...	i'_{13}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		

unde r reprezintă raza bilelor; ρ_{min} — raza de curbură minimă a fibrei medii a discului *2*.

Deci, conform [5], se poate scrie:

$$\left(\frac{\sqrt{[r_2^2 + (r_2')^2]^3}}{|r_2^2 + 2(r_2')^2 - r_2 r_2''|} \right)_{min} \geqslant r, \tag{23}$$

unde

$$r_2 = r_0 + \frac{h}{2}(1 + \sin z_2 \varphi_3), \tag{24}$$

$$r_2' = \frac{h}{2} z_2 \cos z_2 \varphi_3, \tag{25}$$

$$r_2'' = -\frac{h}{2} z_2^2 \sin z_2 \varphi_3 \tag{26}$$

sau

$$r_3 = r_0 + \frac{h}{2}(1 + \cos z_2 \varphi_3), \tag{27}$$

$$r_3' = -\frac{h}{2} z_2 \sin z_2 \varphi_3, \tag{28}$$

$$r_3'' = -\frac{h}{2} z_2^2 \cos z_2 \varphi_3. \tag{29}$$

Valoarea razei minime ρ_{min} se calculează pentru $\varphi_3 = \pi/2z_2$, respectiv $\varphi_3 = 0$, adică

$$\frac{(r_0 + h)^2}{r_0 + h + \frac{h}{2} z_2^2} \geqslant r, \tag{30}$$

de unde

$$(r_0 + h)^2 - r(r_0 + h) - \frac{h}{2} r z_2^2 \geqslant 0. \tag{31}$$

Deoarece $r_0 + h > 0$, rezultă din (31) că

$$r_0 + h \geqslant \frac{r + \sqrt{r^2 + 2hrz_2^2}}{2}, \tag{32}$$

adică

$$r_0 \geqslant \frac{r + \sqrt{r^2 + 2hrz_2^2} - 2h}{2}. \tag{33}$$

Condiția (33) stă la baza determinării razei r_0 a cercului de bază a celor două discuri *1* și *2*.

Primit la redacție la 28 octombrie 1987.

BIBLIOGRAFIE

1. V. HANDRA-LUCA, M. V. BARA, *Reductor de turație frontal cu bile*, Brevet nr. 93186, R. S. România.
2. R. M. IGNATIȘCEV și alții, *Planetarnii reductor dlia zaboinih dvigatelei*, Brevet nr. A.s. 605926 (URSS). Publicat în B.I. 1978, nr. 17.
3. R. M. IGNATIȘCEV, *Sinusosaricovîi reductor*, In : Mehanika mașin, vîpusc 58, Iz-vo Nauka, Moscva, 1981.
4. D. M. MAKAREVICI, *Opredelenie osnovnih geometriceskih parametrov sinusoșaricovogo reduktora*, In : Mehanika mașin, vîpusc 58, Iz-vo Nauka, Moscva, 1981.
5. * * * *Kleine Enzyklopädie. Mathematik*, VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1967.

V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor vîscoase în regim laminar*, Editura Academiei, București, 1987, 864 p.

Tratatul de față constituie o continuare a lucrărilor „Dinamica fluidelor incompresibile" (1981) și „Dinamica fluidelor compresibile" (1984), publicate tot în cadrul Editurii Academiei R. S. România de către regretatul academician Elie Carafoli și de către profesorul dr. docent V. N. Constantinescu. Aceste două prime lucrări, ale seriei pe care o dorim să cuprindă și celelalte părți fundamentale ale mecanicii fluidelor, au devenit de pe acum — prin bogăția informației și nivelul științific ridicat — principalele lucrări de referință românești în domeniile respective; iar lucrarea pe care o recenzăm sîntem îndreptățiți a crede că va deveni referința de bază a cercetătorilor care studiază mișcarea laminară a fluidelor vîscoase.

La alcătuirea acestui tratat autorul a adoptat un punct de vedere modern și în mare parte inedit: spre deosebire de alte lucrări, chiar dintre cele mai noi, aici se pornește de la întreaga varietate de fenomene în care intervin mișcările laminare ale fluidelor vîscoase, atît newtoniene, cît și ne-newtoniene. Acest material deosebit de bogat, și la care ultimele decenii au adus contribuții substanțiale, a impus limitarea strictă la mișcările laminare, urmînd ca problema stabilității hidrodinamice și cea a turbulenței să fie tratate ulterior. Dar, chiar și așa, materialul a rămas deosebit de bogat, iar autorul a trebuit să desfășoare o susținută muncă de documentare, de selectare și de sistematizare. Cu toate acestea, autorul a reușit pe deplin să asigure o claritate și o simplitate riguroasă depline, ceea ce permite accesibilitatea și familiarizarea, cu materialul prezentat, a unei largi categorii de cititori. Regăsim astfel din nou spiritul modern, turnat într-o formă clasică, a lucrărilor elaborate de academicianul Elie Carafoli împreună cu profesorul V. N. Constantinescu.

Capitolele 1 și 2 au un caracter introductiv, cuprinzînd proprietățile fluidelor și, respectiv, elemente de algebră și analiză vectorială și tensorială, utile în restul lucrării, precum și elementele cinematicii fluidelor; remarcăm în capitolul 1 o prezentare detaliată a tensiunilor tangențiale dintr-un fluid ne-newtonian.

Capitolele 3 și 4 sînt dedicate ecuațiilor fluidelor vîscoase. După analiza stării de tensiune dintr-un fluid și a legăturii cu starea de deformare se deduc ecuațiile Navier-Stokes, insistîndu-se asupra unor aspecte speciale, cum sînt: al doilea coeficient de vîscozitate, ecuația energiei, utilizarea coordonatelor curbilinii, parametrii adimensionali care intervin în ecuațiile fluidelor vîscoase și în ecuația energiei, tipurile de mișcări vîscoase definite în funcție de numărul Reynolds, metoda perturbațiilor singulare etc.

Capitolele 5—7 prezintă soluțiile analitice ale ecuațiilor Navier-Stokes; se consideră mișcările paralele (cap. 5), mișcări staționare mai generale (cap. 6) și mișcările nestaționare ale fluidelor vîscoase (cap. 7). Astfel, în capitolul al 5-lea, se dau mai întîi unele soluții clasice (mișcările Couette și Hagen-Poiseiulle, mișcările în conducte cilindrice de diferite secțiuni etc.) apoi unele mișcări paralele ale mediilor ne-newtoniene. În capitolul al 6-lea se enumeră soluții, ale ecuațiilor Navier-Stokes pentru care termenii inerțiali nu se anulează (mișcarea în ajutaje plane sau conice, mișcarea în vecinătatea unui punct de impact, discul în rotație, mișcarea Ekman etc.). Capitolul al 7-lea cuprinde soluții ale ecuațiilor Navier-Stokes nestaționare ce corespund mișcărilor paralele plane sau axial-simetrice, precum și altor mișcări simple, plane sau spațiale.

Capitolul al 8-lea abordează o tematică mai puțin extinsă în lucrările uzuale, anume aceea a efectelor termice în mișcarea incompresibilă a fluidelor vîscoase; se tratează mișcarea Couette cu temperatură, cu vîscozitate constantă sau variabilă, mișcarea Poiseuille și alte mișcări liniare sub influența temperaturii, precum și alte mișcări particulare sub influența temperaturii: cazul canalului convergent, conductelor etc.

Capitolul al 9-lea are de asemenea un caracter special deoarece consideră fluidele vîscoase compresibile. Se regăsesc unele tipuri de mișcări tratate anterior în ipoteze mai simple, în special mișcarea între doi pereți paraleli și mișcarea datorită deplasării brusce a unui perete. Considerații interesante se prezintă aici privind cel de al doilea coeficient de vîscozitate și structura undelor de șoc.

Capitolele 10—15 se referă la unele clase de mișcări ale căror caracteristici permit neglijarea unor termeni ai ecuațiilor Navier-Stokes, devenind astfel posibile unele soluții de aproximare. Capitolul al 10-lea se referă la mișcările în straturi subțiri, în special la lubrificația hidrodinamică — cea mai importantă aplicație din această clasă de mișcări, inclusiv mișcarea mediilor visco-plastice și efectele termice. Capitolul al 11-lea tratează lubrificația cu gaze, lubrificația elasto-hidrodinamică și lubrificația în procesele de prelucrare a metalelor. Capitolul al 12-lea abordează mișcarea în medii poroase, prezentîndu-se bazele acestui fenomen și tratînd mai în detaliu mișcarea fluidelor vîscoase în prezența corpurilor permeabile. Capitolul al 13-lea prezintă mișcarea lentă a fluidelor vîscoase (de tip Stokes), iar capitolul al 14-lea mișcările visco-inerțiale în straturi subțiri, respectiv mișcările la care trebuie luați în considerare și termenii inerțiali, iar aproximările sînt justificate de faptul că fluidul se reduce la un strat subțire; se consideră fluide vîscoase atît incompresibile, cît și compresibile, iar aplicațiile cele mai interesante se referă la lubrificație. Capitolul al 15-lea tratează tot mișcările visco-inerțiale, dar de astă dată în cazul prezenței unor corpuri solide (ipoteza Oseen, soluția Lamb, metoda perturbațiilor singulare etc.).

Capitolele 16—23 sînt dedicate studiului stratului limită laminar. Capitolul al 16-lea cuprinde bazele fizico-teoretice ale teoriei stratului limită. Capitolul al 17-lea enumeră metodele exacte utilizate în studiul stratului limită al unui fluid incompresibil, precum și soluțiile cele mai importante astfel obținute (mișcări de tip Falkner-Skan, mișcări într-un ajutaj plan convergent, în jeturi, lîngă un perete plan permeabil, mișcarea în jurul cercului după Blasius, mișcarea într-un canal). În capitolul al 18-lea sînt tratate metodele de aproximare utilizate pentru stratul limită bidimensional (dezvoltări polinomiale tip Karman-Pohlhausen sau dezvoltări mai generale — metoda Loițianski, metode privind profilul de viteze cu parametri etc.) și condițiile de desprindere a stratului limită. În capitolul al 19-lea se discută stratul limită laminar tridimensional (în particular axial-simetric), prezentîndu-se diferite metode de studiu (soluții autosimilare, dezvoltări în serie etc.), considerîndu-se diferite cazuri concrete. Este tratat apoi stratul limită tridimensional — cu aplicație la cîteva cazuri particulare. Capitolul al 20-lea studiază stratul limită incompresibil termic: ecuații fundamentale, cazul plăcii plane, prezentarea diferitelor metode analitice de studiu pentru stratul termic, prezentarea unor metode aproximative. Capitolul al 21-lea se ocupă de stratul limită incompresibil nestaționar, dîndu-se ecuațiile fundamentale și studiindu-se mișcările impulsive bidimensionale și tridimensionale, mișcările de rotație-mișcările periodice etc. În capitolul al 22-lea se prezintă stratul laminar compresibil, stabilindu-se ecuațiile fundamentale și dîndu-se diferite metode de studiu, exemplificate pe o serie de cazuri (placa plană), inclusiv metode numerice. Unele probleme speciale sînt cuprinse în capitolul al 23-lea: interacțiunea undă de șoc — strat limită, stratul limită cu transfer de căldură și de masă, stratul limită compresibil nestaționar.

Bibliografia cuprinde, la sfîrșitul lucrării, o listă de 635 cărți de specialitate — dintre cele mai importante. Referirile la articole sînt făcute în text.

Tratatul „Dinamica fluidelor vîscoase în regim laminar" constituie o lucrare deosebită care este și va rămîne multă vreme manualul clasic al cercetătorilor din mecanica fluidelor vîscoase. Credem că nu putem da autorului un calificativ mai bun, decît dorindu-i să ne ofere cît mai repede volumul corespunzător de mișcarea turbulentă a fluidelor vîscoase.

D. G. Ionescu

N. POSEA, AL. ANGHEL, C. MANEA, GH. HOTEA, *Rezistența materialelor. Probleme*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1986, 976 p.

Apărută în 1986, în Editura Științifică și Enciclopedică, culegerea de probleme din rezistența materialelor de N. Posea, Al. Anghel, C. Manea și Gh. Hotea este una din cele mai complete apărute în ultimii ani la noi. Acoperind în 976 pagini practic totalitatea domeniilor tratate în cursurile de rezistența materialelor, cartea cuprinde probleme din 18 capitole și anume: 1. Diagrame de eforturi și structuri static determinate alcătuite din bare; 2. Întinderea și compresiunea simplă; 3. Analiza stărilor de tensiuni și deformații, teorii de rezistență; 4. Încovoierea barelor drepte; 5. Deformarea barelor solicitate la încovoiere; 6. Torsiunea; 7. Solicitări compuse; 8. Sisteme static nedeterminate; 9. Calculul barelor în domeniul plastic; 10. Stabilitatea structurilor; 11. Bare curbe; 12. Solicitări variabile; 13. Solicitări dinamice; 14. Plăci plane, încărcate normal pe planul lor; 15. Învelișuri subțiri în teoria de membrană; 16. Teoria de momente pentru rezervoare cilindrice încărcate simetric; 17. Tuburi cu pereți groși și discuri în rotație uniformă; 18. Torsiunea barelor cu pereți subțiri.

Fiecare din cele 18 capitole cuprinde după un breviar teoretic, un număr însemnat de probleme rezolvate precum și probleme propuse pentru rezolvare pentru care se dau la sfîrșit indicații și răspunsuri.

Cartea mai cuprinde 13 anexe, necesare și utile rezolvării problemelor și anume : 1. Caracteristicile fizico-mecanice și rezistențe admisibile ; 2. Diametrele niturilor în funcție de grosimea tablelor ; 3. Caracteristicile geometrice ale profilelor laminate ; 4. Elementele geometrice la încovoiere și torsiune pentru diferite secțiuni. 5. Termenii de încărcare și momente de încastrare perfectă ; 6. Valorile coeficientului φ, de reducere la flambaj ; 7. Lungimi de flambaj sau ecuații de stabilitate pentru bara dreaptă ; 8. Funcții de corecție în teoria de ordinul II, a integralelor din formula Maxwell-Mohr ; 9. Valorile funcțiilor de corecție pentru calculul în teoria de ordinul II ; 10. Valorile coeficientului K_0 pentru bare cu mare curbură ; 11. Valorile funcțiilor pentru calculul rezervoarelor, în teoria de momente ; 12. Caracteristici geometrice sectoriale ; 13. Rezolvarea ecuației de gradul 3.

Cartea se încheie cu o bibliografie cu trimiteri la 42 lucrări de specialitate din țară și străinătate. Culegerea se remarcă prin rigurozitatea științifică a noțiunilor și relațiilor de calcul prezentate în breviar, printr-o sistematizare a problemelor prezentate, prin gradarea judicioasă a problemelor din punctul de vedere al dificultăților de rezolvare, prin claritatea expunerii și varietatea enormă a cazuisticii prezentate.

Din punctul de vedere al actualității, cartea este „la zi" cu metodele moderne de calcul, ceea ce-i conferă prestanță științifică. Unitățile de măsură folosite sînt exclusiv cele din sistemul internațional.

Culegerea de probleme din „Rezistența materialelor" de N. Posea, Al. Anghel, C. Manea și Gh. Hotea este mai mult decît un îndreptar util, necesar și indispensabil pentru toți cei care au sarcini pe linia dimensionării și verificării structurilor, de la cele mai mici piese și pînă la cele mai complexe instalații. În acest sens ea este o carte de referință nu numai pentru studenții institutelor de învățămînt superior tehnic, dar și pentru inginerii din cercetare, proiectare și producție.

G. Kümbellian

T. LUPTON (sub red.), *Human Factors in Manufacturing* (Factorii umani în fabricație), *Proceedings of the 3rd International Conference on Human Factors in Manufacturing, November 4—6, 1986, Stratford-upon-Avon, UK*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 409 p., 35 fig.

Volumul conține lucrările celei de a treia ediții a conferinței internaționale referitoare la factorii umani în procesul de fabricație, care a avut loc în noiembrie 1986. Tema principală a conferinței se referă la analiza impactului social al inovărilor în domeniul tehnologic și al organizării procesului de fabricație, respectiv la analiza modului în care trebuie proiectată inovația tehnologică sau organizatorică astfel încît să corespundă unor cerințe și aspirații umane. Caracterul conferinței a fost de natură puternic interdisciplinară, articole prezentînd ingineri, specialiști în științe sociale, activiști sindicali, etc.

Cele 39 articole din volum sînt prezentate grupate în șapte capitole.

Primul capitol conține patru comunicări prezentate la ședința de deschidere. H. Rebhan, de la Federația Internațională a muncitorilor prelucrători de metale integrează tematica conferinței într-un articol intitulat „Progres pentru cine". Alte articole din acest capitol se referă la cercetările din R.F.G. referitoare la „umanizarea muncii", la factorii umani în contextul fabricației integrate cu calculatorul și la conducerea acțiunii de implementare a tehnologiilor avansate.

Cel de-al doilea capitol al volumului se ocupă de instruirea personalului pentru acceptarea tehnologiei avansate. Cele cinci articole conținute în capitol prezintă punctele de vedere ale Oficiului pentru instruirea personalului din industria constructoare de mașini din Regatul Unit, ale unui sindicat din aceeași țară, cît și aspecte specifice muncii de instruire — spre exemplu instruirea personalului tehnic pentru exploatarea unui sistem de fabricație flexibilă.

Capitolul „Experiențe naționale" prezintă diferite aspecte ale impactului social al inovării tehnologice în R.F.G., Regatul Unit, Statele Unite, Japonia, Finlanda.

Capitolul „Proiectarea celulelor de fabricație" se ocupă — pe parcursul a șase articole — de modul în care trebuie să se țină seama de interfața om-mașină la proiectarea celulelor de fabricație. Se remarcă dintre problemele tratate referitor la urmărirea și controlul muncii mun-

citorilor, la schimbările organizatorice necesare la introducerea proiectării și fabricației asistate de calculator, conducerea modificărilor legate de introducerea unor tehnologii de fabricație avansate.

Un capitol al volumului este consacrat „Erorii umane, reliabilității și securității muncii". Trei dintre cele șase articole se referă la probleme de protecția muncii, inclusiv legat de programarea roboților industriali. Celelalte lucrări analizează sistematic erorile de fabricație (autor I. M. Evans, de la HEB Partnership, Regatul Unit), de metode de analizare a reliabilității umane și de tehnici ergonomice utilizate în conducerea schimbărilor tehnologice.

Capitolul „Țări în curs de dezvoltare" prezintă problemele implementării noilor tehnologii în Indonezia, crearea și modificarea locurilor de muncă ca urmare a introducerii robotizării în Singapore, factori umani în prelucrări prin așchiere de mare precizie în China. Interesant este studiul efectelor ideologiei asupra performanțelor muncii muncitorilor.

Capitolul „Considerații strategice" conține șapte articole legate în special de conducerea acțiunilor de implementare în producție a noutăților tehnologice și de organizare. Se remarcă lucrarea lui J. L. Harper privind un program pentru îmbunătățirea competitivității produselor întreprinderii Babcock de la Renfrew, Scoția cît și studiul lui P. I. Sackett și P. R. Rowlinson de la Institutul Tehnologic de la Cranfield, Regatul Unit asupra rolului inginerului din producție în fabricația integrată cu calculatorul.

Articolele sînt semnate de 58 autori, dintre care doi din țări socialiste (amîndoi din China).

Volumul se adresează unui număr larg de specialiști, tehnologi, din domeniul organizării întreprinderilor, de calculatoare și din domeniul roboticii.

F. Kovács

J. A. WHITE (sub red.), *Automation in Warehousing* (Automatizarea înmagazinării), *Proceedings of the 7th International Conference on Automation in Warehousing, October 13—15, 1986, San Francisco, California*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986, 336 p., 100 fig.

Volumul cuprinde un număr de 43 comunicări prezentate la cea de-a 7-a Conferință internațională asupra automatizării înmagazinării (ICAW) care a avut loc în octombrie 1986.

Automatizarea proceselor de fabricație impune luarea unor măsuri de automatizare în domenii colaterale acestora. În acest context, se impune și automatizarea în magazinării (depozitării) materialelor, semifabricatelor, pieselor și a logisticii (deci a aprovizionării) locurilor de muncă.

Articolele cuprinse în volum sînt organizate în cinci capitole pe probleme și un capitol de articole întîrziate (cu două articole).

Primul capitol se intitulează „Proiectare și implementare" și conține zece articole. Trei dintre acestea se referă la tendințe de dezvoltare de perspectivă ale înmagazinării, inclusiv „înmagazinarea inteligentă". Un articol este consacrat metodei de organizare „la minut" a procesului de fabricație — toate materialele, semifabricatele și informațiile sosesc la locul de muncă în momentul utilizării lor — și influența acesteia asupra înmagazinării. Două articole sînt consacrate problemelor recepționării și distribuirii obiectelor înmagazinate, iar alte două se referă la calcule privind eficiența economică a înmagazinării automate.

Capitolul „Tendințe noi în echipare" conține două articole referitoare la utilizarea codificării obiectelor înmagazinate cu ajutorul unor sisteme de bare și un articol cu privire la utilizarea în Europa a vehiculelor automate ghidate în fabricație și în înmagazinare. Ca și tematică se poate integra aici și articolul privind tendințe de dezvoltare a utilizării vehiculelor automate ghidate în depozite, articol publicat în capitolul de articole întîrziate.

Alte zece articole au fost cuprinse în capitolul „Comunicări despre cercetări". Ele se referă la modelarea performanțelor sistemelor de asamblare automată, la analiza eficienței diverselor sisteme de înmagazinare și transport (conveioare-carusel, suporți rotitori, palete), la diferite modalități de extragere din depozit a obiectelor etc.

Capitolul „Sisteme de control" conține șapte articole, la care se mai poate adăuga unul din capitolul „Articole întîrziate". Ele se referă la strategii de sisteme de control în depozite automate, la sisteme flexibile de gospodărire a materialelor, la proiectarea sistemelor de control „on-line" pentru încăperi de depozit, la controlul fabricației prin utilizarea unor tehnologii de

depozitare, la un nou concept de control a sistemelor de vehicule automate ghidate, la proiectarea software necesar conducerii unei magazii în contextul fabricației integrate cu calculatorul. J. D. Collins și R. S. Kellets din S.U.A. expun într-un articol considerente referitoare la proiectarea ,,componentei umane" (humanware a sistemelor automate de înmagazinare).

Ultimul capitol al volumului se intitulează ,,Studii de caz". Cele 11 articole incluse în acest capitol se referă la diferite sisteme mecanizate și automatizate de extragere a obiectelor din depozit pe baza comenzilor, spre exemplu, prin utilizarea unor ,,containere inteligente" (în S.U.A.), la mecanizarea primirii mărfurilor în depozite (în Suedia), la descrierea unei magazii controlat prin calculator (în Regatul Unit), la automatizarea unei întreprinderi de ordonare a efectelor poștale (în Belgia), la limitele economice a automatizării distribuirii obiectelor într-o fabrică de automobile (în Elveția), la descrierea unui centru de distribuire a băuturilor (în Canada).

Merită atenție deosebită descrierea construcției și a aplicațiilor unui simulator al manipulării materialelor într-o întreprindere, simulator pus în funcție de Laboratorul T. and T. Bell din S.U.A.

Volumul se adresează specialiștilor din domeniul organizării întreprinderilor industriale și din domeniul roboticii.

Articolele sînt semnate de un număr de 59 autori, dintre care trei din țările socialiste (toți din R. P. Chineză).

F. Kovács

K. RATHMILL (sub red.), *Flexible Manufacturing Systems* (Sisteme de fabricație flexibilă), *Proceedings of the 5th International Conference on Flexible Manufacturing Systems, November 3—5, 1986, Stratford-upon-Avon, UK*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987, 534 p., 105 fig.

Volumul cuprinde 48 lucrări prezentate la prestigioasa manifestare științifică ,,A 5-a conferință internațională asupra sistemelor de fabricație flexibilă", care a avut loc în noiembrie 1986 la Stratford-upon-Avon în Anglia. Lucrările sînt grupate după tematică în opt capitole, alte două capitole fiind consacrate lucrărilor suplimentare respectiv întîrziate.

Primul capitol, intitulat ,,Sisteme de fabricație flexibilă (SFF) în evoluție" conține două articole cu caracter mai general. N. R. Greenwood de la concernul General Electric (S.U.A.) discută problemele și posibilitățile sistemului de comandă și de comunicații (schimb de informații) în cadrul SFF, iar P. Mc Keown de la Confield Precision System (Anglia) prezintă problemele controlului de calitate în cadrul SFF.

Cel de-al doilea capitol se ocupă de SFF lucrînd după procese tehnologice diferite de procesul de așchiere.

Trei articole prezintă celule de fabricație flexibilă (CFF) pentru fabricația și asamblarea plăcilor cu circuite imprimante. Unul dintre acestea, semnat de trei cercetători de la compania Plessey din Regatul Unit descrie folosirea metodelor de simulare (modelare) în proiectarea celulei. Alte două articole — și unul din capitolul ,,Articole întîrziate" — se referă la celule de montaj automat. Cel prezentat de D. C. Fanthorpe de la firma ,,Black and Decker" arată, între altele, modul cum au fost reproiectate cunoscutele scule de mînă produse de firmă în vederea facilitării montajului lor. Un al șaselea articol prezintă modul de integrare într-o CFF a unei mașini de măsurat.

Capitolul întîrziat ,,Experiența sistemelor" cuprinde șase articole. Ele subliniază avantajele implementării unor SFF integrate în ansambluri mari, comandate de calculatoare cu exemplificări de la firmele Austin-Rover, Rolls-Royce, Holset din Regatul Unit, Volvo din Suedia, Messerschmidt-Bölkow-Blohm și Werner und Kolb din R.F.G.

Ideea integrării calculatoarelor în procesul de fabricație este prezentă și în cele șase articole consacrate ,,CIM — soluția integrată" (CIM — Computer Integrated Manufacturing, fabricația integrată cu calculatoare). Se discută economicitatea CIM, factorii care afectează reliabilitatea sistemelor de comandă în timp real distribuite, importanța ,,tehnologiei informației", integrarea SFF cu sisteme ,,la minut" (Inst-In-Time) și ,,rețele zonale" (LAN, Local Anea Network); sistemele ,,la minut" sînt sisteme organizate pe principiul fluxurilor sincronizate de materiale, semifabricate și informații, ele eliminînd depozitările și stocările. ,,Rețeaua zonală" permite, pe de o parte, coordonarea fabricației unui subansamblu spre exemplu, pe de altă parte, conlucrarea cu alte rețele zonale. Două articole introduc concepte noi privind comanda SFF. Cel bazat pe o experiență de la firma British Aerospace preconizează realizarea unor ,,mo-

dule" de aplicație, iar cel provenit de la firma ,,Cap Gemini" din Belgia abordează SFF ca pe un sistem deschis. Idei similare sînt cuprinse și în unicul articol din capitolul ,,Articole suplimentare", prezentat de W. Aspalkow de la Institutul de precizie mecanică din Polonia cît și trei articole din capitolul ,,Articole întîrziate".

Capitolul ,,Simulare : o unealtă pentru SFF" conține patru articole la care se poate adăuga un articol din capitolul ,,Articole întîrziate". Se remarcă articolul lui R. I. Mills, care reprezintă o trecere în revistă critică a utilizării simulării sistemelor de fabricație.

Cele cinci articole din capitolul ,,Baza tehnologică" — împreună cu unul din capitolul de ,,articole întîrziate" se ocupă de problemele sculelor utilitate în SFF și de prelucrarea în sisteme flexibile a tablelor în R.F.G. și Japonia. Merită o remarcă specială, de asemenea, articolul care prezintă experiența firmei Erwin Mehne din R.F.G. privind interconectarea sistemelor de fabricație prin intermediul unor poduri rulante automate.

Capitolul ,,Celule și sisteme — SFF pentru toată lumea" prezintă descrierea unor SFF în funcțiune. Se enumeră dintre acestea o celulă conținînd centre de prelucrare, una pentru prelucrarea volanților, carcaselor de lagăre și a semifabricatelor pentru arbori și una pentru fabricarea ferestrelor.

Ultimul capitol ,,Adoptarea unor hotăriri în domeniul SFF" conține cinci articole. Se prezintă, între altele, o trecere în revistă a SFF în Japonia, modul cum se integrează SFF într-o fabrică existentă și metodologia de justificare a eficienței introducerii SFF.

Articolele sînt semnate de 68 autori, dintre care doi din țările socialiste (unul din Polonia și unul din Cehoslovacia).

Volumul se adresează specialiștilor care lucrează în domeniul roboticii respectiv a organizării întreprinderilor industriale.

F. Kovács

R. H. HOLLIER (sub red.), *Automated Guided Vehicle Systems* (Sisteme de vehicule ghidate automat), *International Trends in Manufacturing Technology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987, 361 p., 169 fig.

Vehiculele ghidate automat (VGA) sînt dispozitive de transfer lung, utilizate în hale industriale fie pentru transferul obiectelor de lucru între locuri de muncă, fie ca și înlocuitori ai benzilor de montaj susținînd dispozitive specifice. VGA servesc de asemenea magazii și/sau interconectează magaziile cu locurile de muncă din hale industriale. Utilizarea VGA a cunoscut o importantă dezvoltare în țările avansate din punct de vedere industrial în cursul anilor 80.

Volumul a apărut în seria ,,Tendințe internaționale în tehnologii de fabricație". Cuprinde un număr de 30 articole scrise de specialiști din producție și învățămînt superior, grupate în cinci capitole.

Primul capitol, intitulat ,,Introducerea în sisteme de VGA — definiție și istorie" și cuprinde un număr de șase articole. Primele două discută istoria dezvoltării sistemelor de VGA, tendințele de dezvoltare ale acestor sisteme pe piețele americane și europene. Se descrie apoi vehiculele pentru realizarea transportului pe orizontală, un al patrulea articol descrie etapele achiziționării unui sistem de VGA, subliniindu-se importanța planificării îngrijite. Se prezintă apoi o trecere în revista a utilizării VGA în montaj la firma Volvo (Suedia). Capitolul se încheie cu un articol privind considerațiile de securitatea muncii.

Capitolul al 2-lea este intitulat ,,Proiectare" și cuprinde patru articole. Primul articol examinează problemele majore ale proiectării VGA. Urmează o analiză comparativă a diferitelor tehnici de ghidare și una a sistemelor de comandă centralizate și descentralizate. Ultimul articol trece în revistă principalii parametrii ai sistemelor VGA, acordînd atenție proiectării rețelei de ghidare și analizei mișcărilor de încărcare-descărcare.

Capitolul al 3-lea se ocupă de ,,operare", cuprinzînd cinci articole. Primele trei articole se ocupă de caracteristici operaționale, cum ar fi numărul de vehicule, capacitatea și disponibilitatea sistemului, probleme de flexibilitate și comandă, reguli de organizarea circulației pentru a realiza o utilizare satisfăcătoare a vehiculelor ca și o bună manipulare. Ultimele două articole se referă la utilizarea tehnicilor de simulare pe calculator pentru evaluarea rețelelor de VGA.

Capitolul al 4-lea prezintă sub denumirea ,,Aplicații" nouă articole. Primele șase se ocupă de diferite exemple de sisteme de fabricație flexibilă și sisteme de asamblare flexibilă servite de sisteme de VGA. Interesant este articolul care prezintă modalități de montare a unui robot pe un VGA. Ultimele trei articole se ocupă de utilizarea sistemelor de VGA în magazii. Merită o

atenţie deosebită examinarea metodelor de transfer a obiectelor între VGA şi rafturi de depozitare. Ultimul capitol se intitulează „Dezvoltări" şi constă din şase articole, care se ocupă de diferite aspecte ale viitorului prognozabil al VGA. În primul articol se prezintă realizarea unui sistem de VGA prin automatizarea unor dispozitive stivuitoare mobile. Un alt articol relatează despre cercetările întreprinse la Imperial College of Science and Technology de la Londra asupra VGA fără ghidare fizică. Conducerea automată a acestor vehicule se realizează cu ajutorul unor reţele „software". Un asemenea sistem prezintă o flexibilitate crescută şi permite o mai bună utilizare a spaţiilor halelor. Următoarele trei articole se referă la sisteme de VGA, unele prevăzute cu roboţi îmbarcaţi, şi care folosesc noi mijloace de ghidare, spre exemplu un sistem de vedere artificială sau sisteme de navigaţie autonomă cu senzori ultraacustici. În sfîrşit, ultimul articol se referă la VGA prevăzute cu roţi „Mecanum" de construcţie specială, care permit deplasări multidirecţionale ale vehicolului.

Autorii articolelor provin din Statele Unite ale Americii, Regatul Unit, Franţa, R.F.G., Elveţia, Suedia şi Japonia.

Cartea se adresează specialiştilor în probleme de robotică şi celor care lucrează în domeniul organizării întreprinderilor.

F. Kovács

J. D. LANE (sub red.), *Robotic Welding* (Sudarea robotizată), *(International Trends in Manufactoring Technology)*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987, 448 p., 284 fig.

Lucrarea analizează modalităţile de folosire a roboţilor industriali la automatizarea flexibilă a proceselor de sudare. Recunoscînd faptul că sudarea reprezintă actualmente cel mai larg domeniu de aplicare al roboţilor în tehnică, profesorul J. D. Lane reuneşte sub acest titlu un număr de 30 de lucrări, prezentate la congrese şi simpozioane internaţionale, majoritatea după 1984. Acestea cuprind cele mai recente informaţii relative la sistemele robotizate de sudare, disponibile în prezent. Lucrarea conţine următoarele capitole:

1. Consideraţii privind concepţia şi implementarea sistemelor robotizate; 2. Sisteme bazate pe viziune pentru urmărirea rostului la sudarea cu arc; 3. Sisteme de urmărire bazate pe alte metode decît viziunea; 4. Consideraţii privind programarea sistemelor robotizate; 5. Sisteme şi aplicaţii în domeniul sudării cu arcul electric; 6. Sudarea prin rezistenţă cu roboţi n dustriali.

Pe lîngă prezentarea unor informaţii amănunţite despre roboţi, procese de sudare, echipamente periferice, articolele cuprind date de cea mai mare importanţă referitor la integrarea acestora în sisteme robotizate.

Direcţiile principale de utilizare ale acestora sînt sudarea cu arc electric şi sudarea prin presiune. Informaţii amănunţite referitoare la tehnicile de reglare adaptivă a procesului şi sistemele de urmărire automată a rostului se constituie într-o sursă unică, de mare valoare practică. Lucrarea se adresează în primul rînd specialiştilor care intenţionează să implementeze roboţi în procesele de sudare furnizîndu-le elemente concrete de know-how, date experimentale şi soluţii tehnice care permit realizarea cu succes a unor aplicaţii. Este posibilă, de asemenea, consultarea lucrării de către cadrele didactice şi studenţii care studiază robotica şi aplicaţiile sale industriale.

N. Joni

C.M. BANAS, G.L. WHITNEY (sub red.), *The Changing Frontiers of Laser Materials Processing. Proceedings of the 5th International Congress on Applications of Lasers and Electro-optics ICALEO '86, November 10—13, 1986, Arlington, Virginia, USA* (Frontierele schimbătoare ale prelucrării cu laser a materialelor; lucrările celui de al 5-lea congres internaţional asupra aplicaţiilor laserului şi electrono-opticii), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 248 p., cca. 100 fig.

Cartea cuprinde 29 de lucrări prezentate în cadrul celui de-al 5-lea Congres Internaţional asupra Aplicaţiilor Laserului şi Electrono-opticii, ICALEO'86, congres ce a avut loc între 10—13 noiembrie 1986 la Arlington, Virginia, S.U.A.

Repartizate după criterii geografice (Europa, Orientul Îndepărtat și America de Nord) primele 23 de lucrări abordează probleme specifice prelucrării cu laser a materialelor ca: sudarea cuprului cu oțelul, topirea fontelor aliate, tratamentul termic al pieselor cu geometrie complexă, producerea de particule ultrafine din amestecuri metalo-ceramice, tăierea și perforarea de precizie, sudarea conductelor pentru petrol și gaze, durificarea cu laser etc. O serie de articole se referă la problemele legate de utilizarea laserelor de mare putere.

Într-un capitol final, ce cuprinde șase lucrări, sînt prezentate probleme referitoare la tehnologie și producția industrială, acoperind o gamă largă de preocupări, de la probleme privind motoarele spațiale la cele legate de fabricarea ambalajelor metalice, sau la cele privind subprodușii rezultați prin prelucrarea cu laser a unor noi aliaje, subproduși chimici cu grad ridicat de periculozitate.

Informațiile, de dată recentă, conținute în lucrare, sînt foarte utile tuturor cercetătorilor implicați în implementarea tehnologiilor de prelucrare, sudare, tăiere, tratament termic, tehnologii bazate pe fasciculul laser, precum și celor angrenați în proiectarea echipamentelor necesare.

X. Epure

GYÖRGY SITKEI, *Mechanics of Agricultural Materials* (Mecanica materialelor agricole), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986

Apariția în cadrul Editurii Academiei din Budapesta a cărții tehnice „Mecanica materialelor agricole" constituie un eveniment editorial important, o valoroasă contribuție la promovarea celor mai noi cuceriri ale mecanicii agricole. Lucrarea face parte dintr-o monografie amplă privind dezvoltarea ingineriei agricole, participînd cu o pondere importantă în cadrul acestei monografii.

Mecanica materialelor agricole ca disciplină științifică independentă este nouă și nu dispune în multe cazuri de o metodologie exactă, ceea ce împiedică utilizarea ei cu succes a proiectarea mașinilor agricole sau optimizarea proceselor tehnologice ale acestora. Cîteva elemente ale acestei științe au fost studiate între cele două războaie mondiale, însă după 1945 acest studiu a devenit mai sistematic. La început au fost luate în considerare numai proprietățile fizico-mecanice ale materialelor agricole, studiile ulterioare extinzîndu-se și asupra altor proprietăți mai relevante pentru ingineria agricolă.

Considerația ca disciplină empirică a ingineriei agricole s-a datorat confruntării acesteia cu o varietate mare a produselor agricole avînd structuri biologice complexe și în continuă transformare a proprietăților acestora, iar legile care guvernează aceste comportări fiind implicate în interacțiuni din cele mai complicate. Toate aceste cauze au întîrziat elaborarea unor teorii sigure și a unor metode corecte de dimensionare a utilajelor și mașinilor agricole aferente prelucrării lor. Progresul în acest domeniu a devenit posibil odată cu obținerea unor rezultate experimentale sistematice foarte numeroase care au putut permite generalizări și totodată elaborarea unor legi.

Lucrarea de față reprezintă o primă încercare de a rezuma metodele de calcul utilizate în principalele domenii ale mecanicii agricole și de a indica legile care se supun materialele agricole unificîndu-se cele mai relevante proprietăți fizico-mecanice care le caracterizează și care permit elucidarea proceselor tehnologice în care se implică.

În lucrare se pornește de la analiza dificultăților privind elaborarea unor metodologii de calcul determinate de complexitatea legilor care guvernează procesele multifactoriale și nonliniare. Se expun posibilitățile de extindere a lucrărilor de mecanizare în multe domenii ale agriculturii, lucrări limitate de multe ori de o corelare nejudicioasă a proprietăților fizico-mecanice ale produselor agricole cu parametrii utilajelor și a mașinilor agricole.

Lucrarea de față este elaborată pe baza unui material inedit utilizînd o bogată bibliografie. Se prezintă în mod sistematic cele mai importante proprietăți ale materialelor întîlnite în procesele de bază ale producției agricole.

Meritul lucrării constă în selecționarea celor mai importante procese de producție ce se desfășoară în agricultură studiindu-se fenomenele intime care le caracterizează cît și legile care guvernează aceste procese. În cadrul acestor procese, de-a lungul tuturor capitolelor, autorul după ce prezintă fenomenul de bază studiază principalele proprietăți ale materialelor care caracterizează procesul, modul de comportare ale acestor proprietăți asupra procesului de lucru al mașinilor.

Lucrarea conține 18 capitole prezentate într-o ordine cronologică studiind fiecare cîte un proces de lucru sau un grup de proprietăți. Astfel, sînt prezentate proprietățile fizice, termice, optice electrice, reologice, etc. ale principalelor materiale agricole procese de circulația apei în cadrul acestor materiale, a acțiunii forțelor de apăsare, de impact, a fenomenelor aero și hidrodinamice a efectelor biologice și chimice sub influența diferitelor forțe exterioare, problemele frecării, încheind cu studiul procesului de tăiere și mărunțire a materialelor agricole cu toate implicațiile teoretico-practice ce le revin.

Deși majoritatea materialelor agricole sînt corpuri elasto-plastice, vîscoase și coloidale cu comportamente foarte variate, autorul, printr-o prezentare sistematică și logică, stabilește legi care permit utilizarea corectă a acestor materiale în cadrul principalelor procese.

Lucrarea se distinge prin înaltul său conținut științific elevat prezentînd modelele matematice pentru majoritatea proceselor. Forma de prezentare grafică, de multe ori contribuție proprie a autorului, facilitează mult înțelegerea fenomenelor și posibilitatea de aplicare largă a acestora.

Prin abordarea unor probleme comune tuturor proceselor de lucru, lucrarea este utilă atît cercetătorilor, cît și proiectanților din domeniul mecanicii agricole, dar cu precădere are o deosebită valoare didactică umplînd un gol din literatura de specialitate.

Meritul deosebit al lucrării constă în evidențierea importanței mecanicii materialelor agricole și a dezvoltării ei rapide, sugerînd concluzia firească ca o certitudine că mecanica materialelor agricole va deveni o disciplină de bază a ingineriei agricole.

Șt. Căproiu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 3 mai—iunie 1988

SUMAR

STUDII

M. D. CAZACU, MONICA FELICIA POPOVICI şi MIHAELA TESTIBAN, Cercetări teoretice privind etanşările mecanice frontale 195

E. FÜLÖP, Curgerea nepermanentă prin filtre cu disipare vîscoasă a energiei şi transfer de căldură 205

M. D. PASCOVICI şi AL. O. RĂDULESCU, Portanţa lagărelor radiale înguste lubrifiate cu unsori consistente 215

E. N. DIACONESCU, Efectul timpului de tranzit asupra viscozităţii efective în contacte EHD 225

M. RAŞEEV şi D. PAVELESCU, O soluţie a problemei EHD pentru un contact evolventic şi determinarea stării de eforturi din flanc 231

C. BOB, Asupra calculului structurilor în formulare probabilistă cu metoda elementelor finite 243

F. P. SIMION şi GABRIELA SIMION, Cercetări asupra vibraţiilor maşinilor-unelte 257

O. BOLOGA, Cinetica distrugerilor cavitaţionale pe tribomodele de cavitaţie cu jet lichid de impact 267

A. TUDOR, Influenţa particulelor abrazive asupra intensităţii de uzare a articulaţiilor 275

RECENZII 287

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S. I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Coutte flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei, 125.

CERCETĂRI TEORETICE PRIVIND ETANȘĂRILE MECANICE FRONTALE*)

de M. D. CAZACU, MONICA FELICIA POPOVICI și MIHAELA TESTIBAN

Institutul Politehnic, București

Integrînd numeric ecuația propagării căldurii prin conducție în inelul fix și mobil al unei etanșări frontale, în condițiile la limită considerate, se obțin repartițiile de temperaturi în nodurile unei rețele pătratice adecvată geometriei inelelor. În continuare, transformînd sistemul liniar de ecuații cu derivate parțiale în coordonate cilindrice în două ecuații pentru deplasările pe direcția axială și radială, se obțin deformațiile termoelastice ale celor două inele și în consecință variația formei interstițiului unei etanșări mecanice frontale.

INTRODUCERE

Influența negativă dovedită de practica exploatării la regimuri variabile a etanșărilor mecanice frontale asupra duratei lor de viață, ne-a condus într-o lucrare anterioară [1], la punerea problemei deformării termoelastice a inelelor datorită căldurii produse prin frecarea fluidă dintre cele două inele în contact.

Această deformare ne apare deosebit de importantă datorită valorilor extrem de reduse ale interstițiului și rigidității relativ reduse ale inelelor etanșărilor mecanice, executate probabil în acest scop din cupluri de materiale antifricțiune ce ar putea interveni favorabil pentru micșorarea uzării în cazul variațiilor de regim în funcționare, cînd deformarea termoelastică a inelelor ar conduce local la atingerea frecării la limită.

În lucrarea de față ne propunem elucidarea problemei deformațiilor elastice ale inelelor unei etanșări mecanice frontale sub acțiunea solicitărilor mecanice și termice.

1. *Ecuațiile dimensionale ale termoelasticității* [2] [3] în cazul corpurilor cu simetrie axială, antrenate sau nu în mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω, constau din:

— ecuațiile de echilibru static:

$$\frac{\partial \Sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\Sigma_{RR} - \Sigma_{\varphi\varphi}}{R} + \frac{\partial \Sigma_{RZ}}{\partial Z} + (\rho R \omega^2) = 0,$$

$$\frac{\partial \Sigma_{ZZ}}{\partial Z} + \frac{\partial \Sigma_{RZ}}{\partial R} + \frac{\Sigma_{RZ}}{R} = 0; \tag{1}$$

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA '87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

— relațiile dintre deformațiile și deplasările $U_R = A$ și $U_Z = B$:

$$\varepsilon_{RR} = A'_R\,;\ \varepsilon_{ZZ} = B'_Z\,;\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = A/R\,;\ \varepsilon_{RZ} = \frac{1}{2}\,(A'_Z + B'_R)\,; \tag{2}$$

— relațiile constitutive, generalizînd legea lui Hooke și înglobînd efortul termic:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{RR} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{RR} + \lambda(\varepsilon_{ZZ} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \in (T - T_0),\\
\Sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda(\varepsilon_{ZZ} + \varepsilon_{RR}) - \in (T - T_0),\\
\Sigma_{ZZ} &= (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{ZZ} + \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{RR}) - \in (T - T_0),\\
\Sigma_{RZ} &= 2\mu\,\varepsilon_{RZ},
\end{aligned} \tag{3}$$

în care $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ și $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = G$ sînt coeficienții lui Lamé, iar $\in = \alpha E/(1-2\nu)$.

2. Pentru *adimensionalizarea sistemului*, alegem ca mărimi caracteristice: R_i — raza interioară a inelului, p_f — presiunea fluidului de etanșat, T_0 — temperatura de detensionare a inelelor și T_f — temperatura fluidului și notînd cu:

$$r = R/R_i\,;\ z = Z/R_i \text{ și } a = A/R_i\,;\ b = B/R_i,$$

$$\sigma_{rr} = \Sigma_{RR}/p_f\,;\ \sigma_{zz} = \Sigma_{ZZ}/p_f\,;\ \sigma_{\varphi\varphi} = \Sigma_{\varphi\varphi}/p_f\,;\ \sigma_{rz} = \Sigma_{RZ}/p_f\,;$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_f - T_0), \tag{4}$$

sistemul de ecuații cu derivate parțiale se scrie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + C_e \cdot r = 0,\\
&\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0,
\end{aligned} \tag{1'}$$

unde $C_e = \rho U_i^2/p_f$ l-am numit *criteriul centrifugării*,

$$\varepsilon_{rr} = a'_r\,;\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{a}{r}\ ;\ \varepsilon_{zz} = b'_z\,;\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\,(a'_z + b'_r)\,; \tag{2'}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{p_f}\,\varepsilon_{rr} + \frac{\lambda}{p_f}\,(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \frac{\in (T_f - T_0)}{p_f}\,\theta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{p_f}\,\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda}{p_f}\,(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}) - \frac{\in (T_f - T_0)}{p_f}\,\theta,$$

$$\sigma_{zz} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{p_f}\,\varepsilon_{zz} + \frac{\lambda}{p_f}\,(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}) - \frac{\in (T_f - T_0)}{p_f}\,\theta, \tag{3'}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{2\mu}{p_f}\,\varepsilon_{rz}.$$

3. La acest sistem de ecuații cu derivate parțiale vom mai adăuga și *ecuația anarmonică a propagării căldurii prin conductibilitate*, scrisă adimensional [1],

$$\theta''_{r^2} + \frac{1}{r}\,\theta'_r + \theta''_{z^2} = 0, \tag{5}$$

care, cuprinzînd în exclusivitate funcția de temperaturi $\theta\,(r, z)$, permite rezolvarea în primă etapă a distribuției temperaturilor în inelele etanșărilor mecanice frontale în condițiile la limită specifice lor, ceea ce va avea ca urmare solicitarea termică ce va influența deformarea inelelor.

4. *Deformațiile inelelor* $a(r, z)$ și $b(r, z)$ sub acțiunea solicitărilor mecanice și termice ce apar în funcționare, se pot calcula din sistemul liniar de două ecuații cu derivate parțiale, obținut prin înlocuirea relațiilor (2') în (3') și acestea din urmă în (1')

$$(\lambda + 2\mu)\left(a''_{r^2} + \frac{1}{r}\,a'_r - \frac{a}{r^2}\right) + \mu a''_{z^2} + (\lambda + \mu)\,b''_{rz} - \\ - \in (T_f - T_0)\,\theta'_r + (\rho U_i^2\, r) = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\,b''_{z^2} + (\lambda + \mu)\left(a''_{rz} + \frac{1}{r}\,a'_z\right) + \mu\left(b''_{r^2} + \frac{1}{r}\,b'_r\right) - \tag{6}$$

$$- \in (T_f - T_0)\theta'_z = 0,$$

ambele fiind independente de valoarea presiunii fluidului de etanșat, care intervine doar în condițiile la limită de suprafață, pe direcție radială intervenind doar forța masică de centrifugare acționînd asupra fiecărui element din domeniu.

5. *Metoda numerică* propusă pentru rezolvare, permite considerarea celor mai complicate condiții la limită și geometrii ale inelelor și constă [4] din dezvoltarea în serii Taylor finite a funcțiilor $\theta(r, z)$, $a(r, z)$ și $b(r, z)$ în nodurile unei rețele pătratice din vecinătatea unui punct ordinar O aparținînd domeniului și numerotate conform figurei 1.

Extrăgînd din aceste dezvoltări expresiile derivatelor parțiale

$$f'_{z,r} = (f_{1,2} - f_{3,4})/2\chi\,;\; f''_{z^2,r^2} = (f_{1,2} - 2f_0 + f_{3,4})/\chi^2,$$

$$f''_{zr} = (f_5 + f_7 - f_6 - f_8)/4\chi^2 \tag{8}$$

şi înlocuind-le în (5), (6) şi (7), obţinem relaţiile algebrice asociate acestor ecuaţii, de unde putem explicita pe

$$\theta_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\theta_i + \frac{\chi}{8r}(\theta_2 - \theta_4), \tag{9}$$

$$a_0 = \frac{1}{(\lambda+2\mu)\left(2+\dfrac{2\mu}{\lambda+2\mu}+\chi^2/r^2\right)} \times$$

$$\times\left[(\lambda+2\mu)(a_2+a_4)+\frac{\lambda+\mu}{4}(b_5+b_7-b_6-b_8)+\right.$$

$$+(\lambda+2\mu)\frac{\chi}{2r}(a_2-a_4)+\mu(a_1+a_3)-\in\chi(T_f-T_0)\times$$

$$\left.\times(\theta_{0,2}-\theta_{4,0})+(p_f C_e r\chi^2)\right], \tag{10}$$

$$b_0 = \frac{1}{2(\lambda+3\mu)}\left[\frac{(\lambda+\mu)}{4}(a_5+a_7-a_6-a_8)+\mu(b_2+b_4)+\right.$$

$$+(\lambda+2\mu)(b_1+b_3)+\frac{\chi}{2r}(\lambda+\mu)(a_1-a_3)+\frac{\chi\mu}{2r}(b_2-b_4)-$$

$$\left.-\in\chi(T_f-T_0)(\theta_{1,0}-\theta_{0,3})\right]. \tag{11}$$

6. *Condiţiile la limită* considerate pentru funcţia de temperaturi au fost următoarele (fig. 1):

$\theta_0 = 0$ pe suprafeţele expuse temperaturii mediului ambiant, presupusă a fi T_0;

$\theta_f = 1$ pe suprafeţele inelului în contact cu fluidul;

$\theta_a(z) = 1 - Z/L$ pe suprafaţa interioară a inelului din apropierea arborelui, unde s-a presupus o variaţie liniară a temperaturilor;

$\theta_n' = 0$ considerînd garnitura de rezemare a inelului ca fiind perfect izolantă termic, încît în calculul temperaturilor în punctele de pe suprafaţa $r = \text{const.}$ vom avea $\theta_2 = \theta_0$, iar pentru cele de pe suprafaţa $z = \text{const.}$, $\theta_1 = \theta_0$;

$\theta_i(r)$ variaţia temperaturii pe suprafaţa adiacentă interstiţiului, rezultînd din transferul termic conductiv al căldurii disipate în curgerea de forfecare.

7. *Condiţiile la limită* luate în consideraţie pentru deplasări şi eforturi (fig. 2) au fost următoarele:

a. *fixarea poziţiei axiale* a inelului [5], $b(R_i, L) = 0$, deplasările radiale fiind nule în axa lui de simetrie;

b. pe *suprafețele paralele cu axele și supuse presiunilor statice* avem $\sigma_t = 0$ și $\sigma_n = p$, unde presiunea poate fi datorată fluidului $p = p_f$, garniturii $p = p_g = \frac{p_f}{S_g}\left(\frac{S_i}{2} + S \sin \alpha\right)$ (dedusă din echilibrul forțelor axiale), sau suprafața poate fi liberă $p = 0$.

Astfel, pentru suprafața $z = \text{const.}$ a inelului în contact cu garnitura (nodurilor marcate cu ○-) din condițiile $\sigma_{zr} = 0$ și $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = p = p_g$

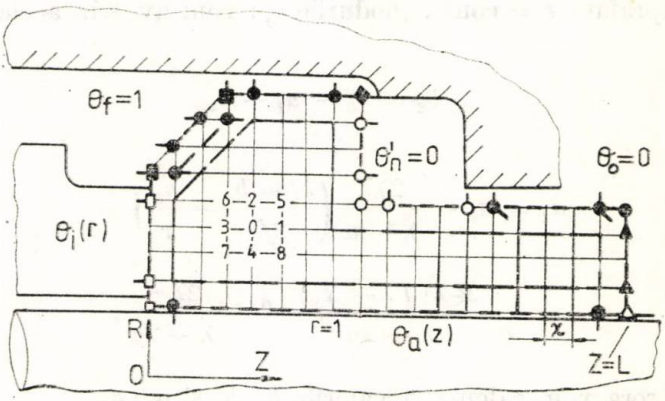


Fig. 1

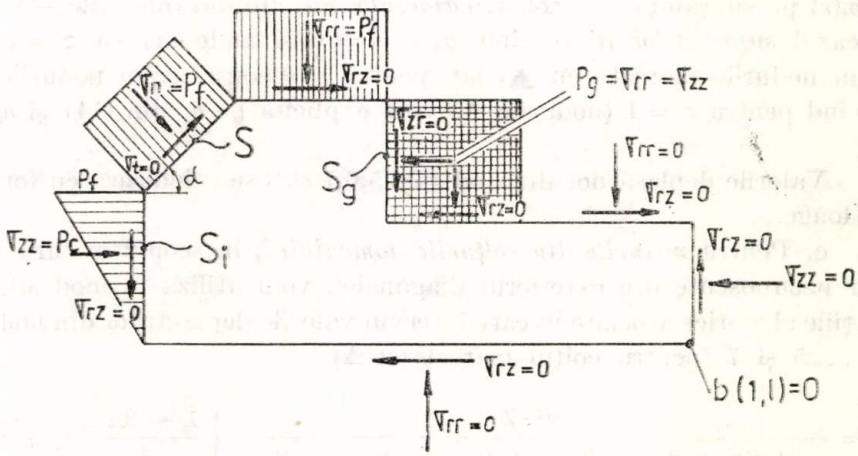


Fig. 2

rezultă expresiile deplasărilor ce cad în afara domeniului de calcul, prin exprimarea în diferențe finite a deformațiilor (2′) și înlocuirea lor în (3′),

$$a_1 = a_3 - b_2 + b_4 \tag{12}$$

şi

$$b_1 = b_3 - \frac{2\lambda\chi}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{a_2 - a_4}{2\chi} + \frac{a_0}{r}\right) + \\ + \frac{2\epsilon\chi(T_f - T_0)}{\lambda + 2\mu}\,\theta + \frac{2\chi p}{\lambda + 2\mu}. \qquad (13)$$

În mod analog se calculează şi valorile deplasărilor a_5, a_8 şi b_5, b_8.

Pe suprafaţa $r = \text{const.}$ (nodurile $\downarrow_{\circ}$) vom avea în aceleaşi condiţii, relaţiile

$$b_2 = a_3 - a_1 + b_4 \qquad (14)$$

şi

$$a_2 = a_4 - \frac{2\lambda\chi}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{b_1 - b_3}{2\chi} + \frac{a_0}{r}\right) + \\ + \frac{2\epsilon\chi(T_f - T_0)}{\lambda + 2\mu}\,\theta - \frac{2\chi p}{\lambda + 2\mu}, \qquad (15)$$

conform cărora vom calcula şi valorile b_5, b_6 şi a_5, a_6.

Acelaşi mod de calcul se aplică şi cînd $\sigma_n = p = p_f$ (nodurile $\downarrow$ pentru suprafaţa $r = \text{const.}$ a inelului în *contact cu fluidul*), sau cînd $\sigma_n = p_i(r)$ pe suprafaţa $z = \text{const.}$ *adiacentă interstiţiului* (nodurile $-\square$), sau în cazul *suprafeţelor libere* cînd $\sigma_n = p = 0$ şi unde pentru $z = \text{const.}$ avem nodurile marcate cu $\blacktriangle$, iar pentru $r = \text{const.}$ avem nodurile $\downarrow$, pe cînd pentru $r = 1$ (nodurile $\bullet$) vom explicita pe b_4 din (14) şi a_4 din (15).

Valorile deplasărilor din nodurile 5,6,7 şi 8 se calculează cu formule analoage.

c. Pentru *nodurile din colţurile domeniului*, în scopul evitării valorilor necunoscute din exteriorul diagonalei, vom utiliza în mod adecvat relaţiile algebrice asociate în care intervin valorile deplasărilor din nodurile $1, \ldots, 5$ şi 7 (pentru colţul marcat cu Δ),

$$a_0 = \frac{r^2 \cdot \chi^2}{[2r^2(\lambda + 3\mu) + \chi^2(\lambda + 2\mu) - r^2(\lambda + \mu)^2]}\left\{\frac{\lambda + 2\mu}{\chi^2}(a_2 + a_4) + \right.$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{2\chi^2}\left(b_5 + b_7 - \sum_{i=1}^{4} b_i\right) + \frac{\lambda + 2\mu}{2r\chi}(a_2 - a_4) + \frac{\mu}{\chi^2}(a_1 + a_3) -$$

$$- \frac{\epsilon}{\chi}(T_f - T_0)(\theta_{0,2} - \theta_{4,0}) + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 3\mu)}\left[\frac{\lambda + \mu}{2\chi^2}\left(a_5 + a_7 - \sum_{i=1}^{4} a_i\right) + \right.$$

$$+\frac{\mu}{\chi^2}(b_2+b_4)+\frac{\lambda+2\mu}{\chi^2}(b_1+b_3)+\frac{\lambda+\mu}{2r\chi}(a_1-a_3)+$$

$$+\frac{\mu}{2r\chi}(b_2-b_4)-\frac{\epsilon}{\chi}(T_f-T_0)(\theta_{0,1}-\theta_{3,0})\Big]\Big\}, \tag{16}$$

$$b_0=\frac{\chi^2}{2(\lambda+3\mu)}\left[\frac{\lambda+\mu}{2\chi^2}\left(a_5+a_7-\sum_{i=1}^{4}a_i\right)+\frac{\mu}{\chi^2}(b_2+b_4)+\right.$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\chi^2}(b_1+b_3)+\frac{\lambda+\mu}{2r\chi}(a_1-a_3)+\frac{\mu}{2r\chi}(b_2-b_4)-$$

$$\left.-\frac{\epsilon}{\chi}(T_f-T_0)(\theta_{1,0}-\theta_{0,3})+\frac{\lambda+\mu}{\chi^2}a_0\right], \tag{17}$$

sau cele în care intervin valorile deplasărilor din nodurile 1,..., 4,6 și 8 (pentru colțurile marcate cu ◆ ⊖ ● □),

$$a_0=\frac{2r^2\chi^2(\lambda+3\mu)}{2r^2(\lambda+3\mu)+\chi^2(\lambda+2\mu)-r^2(\lambda+\mu)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\chi^2}(a_2+a_4)+\frac{\lambda+\mu}{2\chi^2}\left(\sum_{i=1}^{4}b_i-b_6-b_8\right)+\frac{\lambda+2\mu}{2r\chi}(a_2-a_4)+\right.$$

$$+\frac{\mu}{\chi^2}(a_1+a_3)-\frac{\epsilon}{\chi}(T_f-T_0)(\theta_{0,2}-\theta_{4,0})-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+3\mu)}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda+\mu}{2\chi^2}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i-a_6-a_8\right)+\frac{\mu}{\chi^2}(b_2+b_4)+\frac{\lambda+2\mu}{\chi^2}(b_1+b_3)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda+\mu}{2r\chi}(a_1-a_3)+\frac{\mu}{2r\chi}(b_2-b_4)-\frac{\epsilon}{\chi}(T_f-T_0)(\theta_{0,1}-\theta_{3,0})\right]\right\}, \tag{18}$$

$$b_0=\frac{\chi^2}{2(\lambda+3\mu)}\left[\frac{\lambda+\mu}{2\chi^2}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i-a_6-a_8\right)+\frac{\mu}{\chi^2}(b_2+b_4)+\right.$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\chi^2}(b_1+b_3)+\frac{\lambda+\mu}{2r\chi}(a_1-a_3)+\frac{\mu}{2r\chi}(b_2-b_4)-$$

$$\left.-\frac{\epsilon}{\chi}(T_f-T_0)(\theta_{0,1}-\theta_{3,0})+\frac{\lambda+\mu}{\chi^2}a_0\right], \tag{19}$$

care au fost obţinute prin înlocuirea expresiei derivatei mixte din (8) prin

$$f''_{rz} = \frac{1}{2\chi^2}\left(2f_0 + f_5 + f_7 - \sum_{i=1}^{4} f_i\right), \tag{20}$$

respectiv

$$f''_{rz} = \frac{1}{2\chi^2}\left(\sum_{i=1}^{4} f_i - 2f_0 - f_6 - f_8\right). \tag{20'}$$

d. pe *suprafaţa înclinată*, supusă presiunii statice $p_f = \sigma_n$ (fig. 3), scriind echilibrul forţelor obţinem:

$$\sigma_{zz} + \sigma_{rz}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma_t\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - p_f = 0, \tag{21}$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{zr}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sigma_t\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - p_f = 0, \tag{22}$$

$$\sigma_{zz}\,\mathrm{tg}^2\alpha - \sigma_{rr} + 2\sigma_t\,\mathrm{tg}\alpha + p_f\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\mathrm{tg}^2\alpha\right) = 0, \tag{23}$$

din care, ţinînd seama de relaţiile (3′) unde am introdus în mod convenabil scrierea în diferenţe centrate sau necentrate pentru deformaţii, se obţin în cazul cercetat ($\alpha = 45°$ şi $\sigma_t = 0$) valorile deplasărilor a şi b în nodurile 2, 3 şi 6 din exteriorul domeniului de calcul.

e. pe *suprafaţa adiacentă a interstiţiului* am considerat o repartiţie de temperaturi $\theta_i(r)$, care ar proveni din egalitatea fluxului de căldură conductiv dinspre stratul limită al fluidului din interstiţiu, către suprafaţa adiacentă a inelului

$$\lambda_f(\theta_{3f} - \theta_0) = \lambda(\theta_0 - \theta_1), \text{ de unde } \theta_0 = \frac{\lambda\theta_1 + \lambda_f\,\theta_{3f}}{\lambda + \lambda_f}. \tag{24}$$

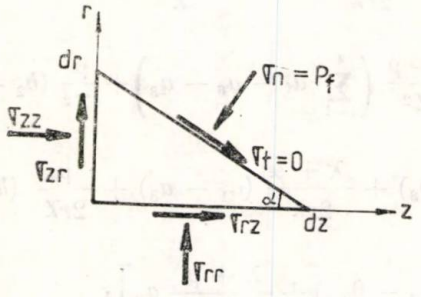
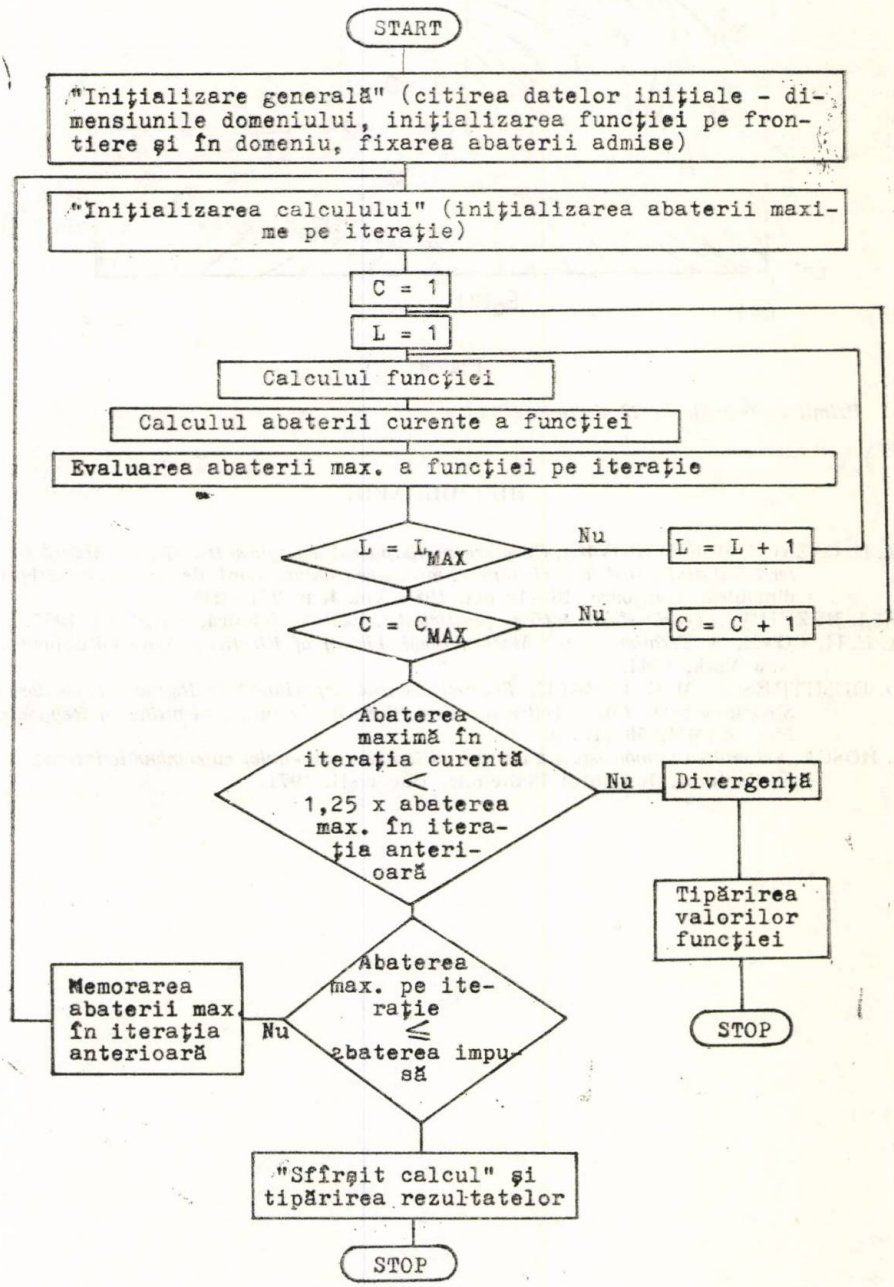


Fig. 3

8. *Rezultatele numerice* au fost obținute pe calculator prin întocmirea unui program conform următoarei scheme logice :



În figura 4 s-au reprezentat curbele de temperaturi constante obţinute pentru inelul fix al unei etanşări mecanice frontale.

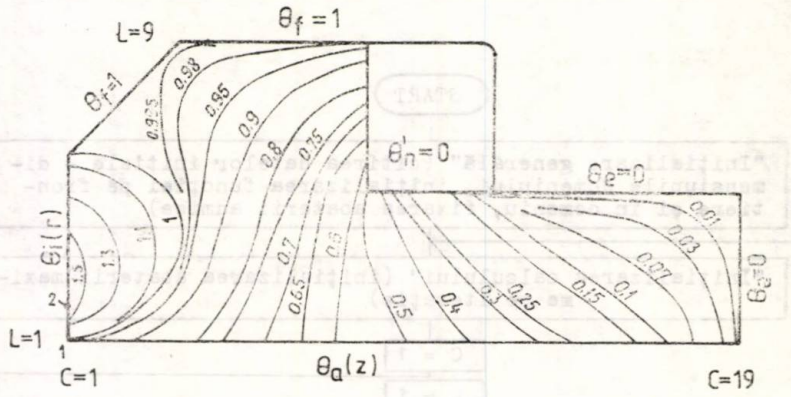


Fig. 4

Primit la redacţie la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. M. D. CAZACU, M. F. POPOVICI, *Curgerea cu disipare de energie şi transfer de căldură în interstiţiul dintre inelele unei etanşări mecanice frontale.* Conf. de Maş. hidr. şi Hidrodinamică, Timişoara, 18—19 oct. 1985, vol. I, p. 241—248.
2. N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticităţii şi plasticităţii*, Editura tehnică, Bucureşti, 1957.
3. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Dover-Publications, New York, 1944.
4. D. DUMITRESCU, M. D. CAZACU, *Theoretische und experimentelle Betrachtungen über die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen.* ZAMM, **50** (1970).
5. I. ROŞCA, *Solicitarea termoelastică a cămăşii cilindrilor motoarelor cu combustie internă.* Teză de doctorat, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1971.

CURGEREA NEPERMANENTĂ PRIN FILTRE CU DISIPARE VÎSCOASĂ A ENERGIEI ŞI TRANSFER DE CĂLDURĂ *)

de E. FÜLÖP

Institutul Politehnic, Bucureşti

În lucrare se elaborează un model matematic complex al mişcării nepermanente al fluidului vîscos în mediul poros al filtrului. Se modelează atît fenomenul de curgere în sine, cît şi procesul termic de transfer al căldurii degajate ca urmare a frecării vîscoase în porii filtrului. Se elaborează un program de integrare numerică în limbajul FORTRAN IV bazat pe algoritmul predictor-corector decalat şi cel al lui CRANK-NICOLSON. Utilizînd un calculator numeric CORAL 4011 se studiază, pentru dimensiuni de gabarit fixe ale filtrului, dependenţa gradului de încălzire al fluidului de fineţea de filtrare, de mărimea debitului filtrat şi de proprietăţile termice ale materialului filtrului.
Lucrarea se finalizează prin elaborarea unor nomograme care să faciliteze alegerea filtrelor în funcţie de parametrii amintiţi.

1. INTRODUCERE

Studierea fenomenului de curgere a lichidului de lucru în elemente filtrante prezintă o importanţă justificată. Predeterminarea prin calcul a unor dependenţe funcţionale importante, ca de exemplu : pierderea de presiune prin filtru în funcţie de finetea de filtrare şi mărimea debitului filtrat ; gradul de încălzire al fluidului în funcţie de finetea de filtrare şi de proprietăţile termice ale materialului filtrului, poate conduce la reducerea timpului de proiectare ale acestor elemente şi permite alegerea lor adecvată.

Precizia deplasărilor mecanismelor, în continuă creştere, a determinat reducerea considerabilă a jocurilor din ajustaje, care au impus ca o necesitate creşterea gradului de filtrare a agentului de ungere. Însă, o filtrare mai severă, utilizînd filtre din materiale poroase, conduce la încălzirea fluidului, care, prin efectele de dilataţie induse, poate veni în contradicţie cu diminuarea jocurilor funcţionale.

În lucrarea de faţă se propune un model hidro-termodinamic pentru descrierea fenomenului complex de curgere şi transfer de căldură în regim nepermanent într-un mediu poros.

2. MODELUL MATEMATIC AL CURGERII

Se consideră filtrul cilindric, din bronz sinterizat, aplicaţie specifică filtrelor de uz general (fig. 1). Curgerea fluidului vîscos are loc din exterior către cavitatea interioară a filtrului, pe care fluidul o părăseşte pe direcţia axială. Curgerea este identică în oricare secţiune transversală, de forma unei coroane circulare (fig. 2), iar în cadrul coroanei circulare, curgerea este similă de-a lungul oricărui segment de tip (IE).

---

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferinţă asupra frecării, ungerii şi uzării, Bucureşti, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 3, 1988, P. 205—214

Domeniul de valabilitate al modelului matematic ce se va deduce este definit de următoarele ipoteze de lucru :

— mișcarea în mediul poros se consideră laminară și nepermanentă ;

— se va considera disiparea vîscoasă a unei părți a energiei de mișcare a fluidului și transformarea ei în căldură ;

— curgerea are loc în condițiile schimbului caloric între fluidul de lucru și mediul poros ;

— datorită fenomenelor termice ce au loc, viscozitatea fluidului este variabilă în timp și spațiu.

În [8] sînt definite componentele vitezei de filtrare a fluidului, avînd viscozitatea dinamică (μ), ce se mișcă într-un mediu poros cu permeabilitatea (K) :

$$V_x = -\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{și} \quad V_y = -\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{1}$$

Ecuația de continuitate pentru curgerea nepermanentă într-un mediu poros cu porozitatea (m) este :

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V_y)}{\partial y} = -m\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{2}$$

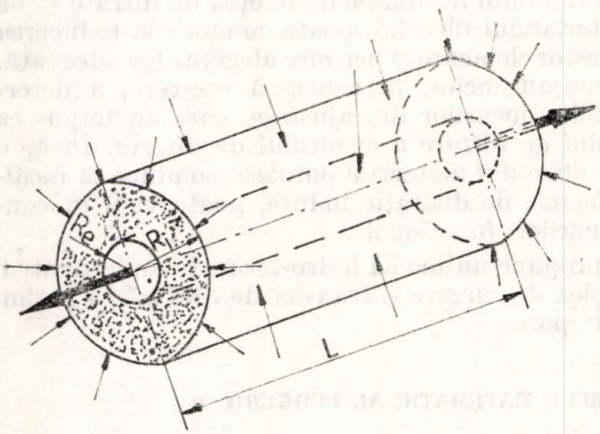


Fig. 1

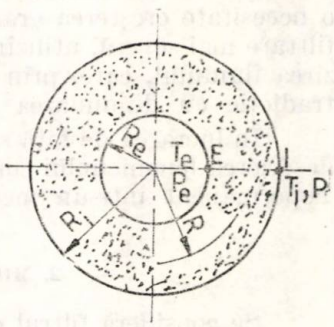


Fig. 2

Ecuația de stare a fluidului cu modulul de elasticitate (E) este

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\frac{p-p_0}{E}}. \tag{3}$$

După logaritmarea ecuației (3), efectuînd derivatele parțiale din relația (1), se obțin componentele vitezei de filtrare, care permit scrierea

ecuației de continuitate (2) sub forma :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{m}{K\cdot E}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4}$$

Se dezvoltă ecuația de stare (3) în serie Taylor finită și se exprimă derivatele parțiale ale densității fluidului cu ajutorul derivatelor parțiale ale presiunii :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cong\frac{p_0}{E}\frac{\partial p}{\partial x};\quad\frac{\partial p}{\partial y}\cong\frac{p_0}{E}\frac{\partial p}{\partial y};\quad\frac{\partial p}{\partial t}\cong\frac{p_0}{E}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Apoi, înlocuite în (4) și efectuate derivatele parțiale ce intervin, se exprimă ecuația (4) în coordonate cilindrice, obținîndu-se forma :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{m\cdot\mu}{K\cdot E}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5}$$

În ecuația cu derivate parțiale (5) termenul de variație a viscozității cu raza exprimă o dependență implicită a viscozității de temperatura fluidului, variabilă cu raza. În [2] se propune pentru dependența viscozității de temperatură, următoarea corelație :

$$\mu(T)=A\cdot e^{-BT}, \tag{6}$$

unde A este viscozitatea dinamică la temperatura $T=0°C$; B este tangenta unghiului ascuțit format de sensul negativ al axei temperaturii cu dreapta tangentă la curba $\mu(T)$ în punctul $T=0°C$.

Se exprimă termenul de variație a viscozității cu raza, ce intervine în (5), considerînd că această variație se produce datorită variației temperaturii fluidului, obținîndu-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}+B\frac{\partial T}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{m\cdot A}{C_0^2\cdot F^2\cdot E\cdot e^{BT}}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{7}$$

În ecuația de mișcare (7), permeabilitatea (K) a fost înlocuită în funcție de finețea de filtrare (F), printr-o relație de echivalare, care prin coeficientul (C_0) ține seama de gradul de compactare al filtrului [3].

Transferul de căldură în regim nepermanent, în masa unui fluid omogen, este dată sub forma operațională în [9],

$$\rho\cdot c_p\frac{DT}{Dt}=\lambda\cdot\Delta T+\Phi, \tag{8}$$

în care s-au notat ρ, c_p, λ, T — densitatea, căldura specifică la presiune constantă, conductivitatea termică și temperatura fluidului; Φ — cantitatea de căldură rezultată din disiparea viscoasă a unei părți din energia de mișcare a fluidului.

Pentru mișcarea spațială, în coordonate carteziene, se dă

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} . \tag{9}$$

Ecuația (8) este valabilă în transferul de căldură la curgerea unui fluid lîngă un perete sau în interiorul unei conducte netede. În cazul în care această curgere are loc într-un mediu poros, coeficienții ecuației (8) se modifică, [1].

Se stabilește pentru ecuațiile de transfer de căldură în medii poroase o analogie între mediul poros eterogen, constituit dintr-un schelet solid îmbibat pînă la saturație de un fluid, cu un *mediu continuu fictiv* în care se definește o ecuație de transfer de căldură similară ca formă cu ecuația (8), folosită pentru transferul de căldruă în fluide omogene, [1].

În ecuațiile de transfer de căldură, scrise pentru mediul continuu fictiv, caracteristicile termice ale scheletului poros sînt luate în calcul prin următorii doi parametrii :

$(\rho \cdot c_p)^*$ — capacitatea termică ; λ^* — coeficientul de conductivitate termică.

Convenim să notăm cu $(*)$ orice parametru care caracterizează însușirile mediului poros îmbibat cu fluid.

Capacitatea termică pentru mediul poros se definește astfel :

$$(\rho \cdot c_p)^* = (\rho c_p)_S \cdot (1 - m) + (\rho c_p)_f \cdot m \tag{10}$$

în care simbolul (S) se referă la o caracteristică a particulelor solide care compun mediul poros, iar simbolul (f) se referă la faza fluidă care circulă prin mediul poros.

Pentru stabilirea coeficientului (λ^*) în literatura de specialitate s-au propus mai multe modele :

— cînd mediul poros se poate asimila cu o succesiune de straturi de lichid și solid, transversale pe fluxul termic :

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1 - m}{\lambda_S} + \frac{m}{\lambda_f} ; \tag{11}$$

— cînd mediul poros se poate considera că este alcătuit din straturi de solid și lichid paralele cu fluxul termic :

$$\lambda^* = (1 - m) \cdot \lambda_S + m \cdot \lambda_f ; \tag{12}$$

— modelul geometric Mickley reprezintă un model mai complex și mai realist. Consideră o particulă solidă de formă paralelipipedică bordată pe cele trei direcții ale sistemului triortogonal cu canale de secțiune pătratică ($b \times b$) prin care circulă fluidul:

$$\lambda^* = b^2 \cdot \lambda_f + (1 - b^2)\lambda_S + \frac{2b(1-b)\lambda_f \cdot \lambda_S}{b\lambda_S + (1-b)\lambda_f}; \tag{13}$$

— modelul geometric Lichteneker consideră că dintr-un volum dat de mediu poros îmbibat cu fluid, un cub cu latura de $(1 - m)^{1/3}$ este faza solidă, iar restul este constituit din faza lichidă:

$$\lambda^* = \lambda_f \frac{(2 - m - (1-m)^{1/3} + \frac{\lambda_f}{\lambda_S}[(1-m)^{1/3} - (1-m)]}{1 - (1-m)^{1/3} + \frac{\lambda_f}{\lambda_S}(1-m)^{1/3}}; \tag{14}$$

— modelul empiric al lui Lichteneker propune:

$$\lambda^* = \lambda_f \cdot \lambda_S^{(1-m)}. \tag{15}$$

În lucrarea de față s-a utilizat modelul geometric Lichteneker.

Prin introducerea in (8) a caracteristicilor specifice mediului peros, explicitînd operatorii și ținînd seama că mișcarea în coroana poroasă este plană, se obține:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)^*}\left[V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y}\right] = \frac{\lambda^*}{(\rho c_p)^*}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] +$$

$$+ \frac{\mu(T)}{(\rho c_p)^*}\left\{2\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2\right\}. \tag{16}$$

Forma domeniului de curgere (fig. 2) impune utilizarea coordonatelor cilindrice. După schimbările variabile impuse de trecerea în coordonate cilindrice, ținînd seama că mișcarea este identică în orice plan, $\theta = \text{const.}$ și că nici o mărime nu variază cu (θ), ecuația (16) devine:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 2\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)^*} V_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda^*}{(\rho c_p)^*}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right] + 2\frac{\mu(T)}{(\rho c_p)^*}\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2. \tag{17}$$

Se definește viteza radială absolută a fluidului în mediul poros prin

$$V_r = -\frac{K}{m\mu(T)} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{18}$$

iar după înlocuirea sa în ecuația (17) se obține forma finală a ecuației transferului de căldură:

$$\frac{\partial T}{\partial r} - 2\,\frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)^*}\cdot\frac{C_0^2 F^2\cdot e^{BT}}{m\cdot A}\,\frac{\partial p}{\partial r}\,\frac{\partial T}{\partial r} =$$

$$= \frac{\lambda^*}{(\rho c_p)^*}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r}\right] + 2\,\frac{C_0^4 F^4\cdot e^{BT}}{m^2 A\,(\rho c_p)^*}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right)^2. \qquad (19)$$

Ecuațiile cu derivate parțiale (7) și (19), avînd funcțiile necunoscute $p(r, t)$ și $T(r, t)$, constituie modelul matematic al curgerii.

3. INTEGRAREA NUMERICĂ A MODELULUI MATEMATIC

Modelul matematic este constituit din două ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, avînd una din variabilele independente, timpul. Pentru integrarea numerică a unor astfel de ecuații există o paletă destul de largă de metode numerice recomandate (scheme de calcul explicite, scheme de calcul implicite), toate bazîndu-se pe metoda diferențelor finite.

În lucrarea de față se propune, pentru integrarea modelului matematic, metoda predictor-corector în varianta dezvoltată de Douglas și Jones [6]. Această metodă se bazează pe calculul matriceal. Prin rezolvarea ecuației matriceale, asociate ecuației cu derivate parțiale, se obțin simultan valorile funcțiilor necunoscute $p(r, t + \Delta t)$ și $T(r, t + \Delta t)$ de la momentul de timp actual din toate punctele spațiale, cunoscînd valorile $p(r, t)$ și $T(r,t)$ de la timpul precedent, din toate nodurile spațiale.

Se divide segmentul (IE) (fig. 3) în (N) porțiuni, rezultînd pasul radial (Δr) și nodurile spațiale numerotate cu $i = 0,1,\ldots,N$.

Pentru variabila independentă (t) se alege un pas de timp (Δt) în funcție de rapiditatea fenomenului studiat. Din acest punct de vedere fenomenul de curgere, descris de ecuația (7), este rapid, în timp ce fenomenul de transfer de căldură, descris de ecuația (19), este mult mai lent. Din acest motiv, se va utiliza un pas de timp mic pînă la stabilizarea presiunii, după care, pentru studiul fenomenelor termice se va mări pasul de timp de cîteva ori. Modificarea în timp a temperaturii va provoca, prin intermediul viscozității fluidului, modificări ale curgerii. Astfel, fazele de calcul termic și cel al curgerii se succed, influențîndu-se reciproc.

Orice ecuație cu derivate parțiale de tip parabolic, avînd una din variabilele independente timpul și funcția necunoscută $H(x, t)$, poate fi pusă sub forma cea mai generală:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = F\left(x, t, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial t}\right). \qquad (20)$$

Cunoscînd condițiile inițiale și cele la limită pentru funcția necunoscută $H(x, t)$ și alegînd pasul spațial (Δx) și cel temporar (Δt), soluția la momentul de timp $t^{j+i} = (j + i)\cdot\Delta t$ se află pornind de la soluția de la

momentul de timp anterior $t^{j+i} = j \cdot \Delta t$, în două faze, și anume :

— *faza predictor*, pentru care ecuația cu derivate parțiale (20) se transformă într-o ecuație algebrică, utilizînd următoarele expresii în diferențe finite :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}\,\delta_x^2 H_i^{j+\frac{1}{2}} =$$

$$= F\left[\mathrm{i}(\Delta x), \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta t, H_j^j, \frac{1}{2(\Delta x)}\,\delta_x H_i^j, \frac{1}{\Delta t/2}\left(\mathrm{H}_i^{j+\frac{1}{2}} - \mathrm{H}_i^j\right)\right] \quad (21)$$

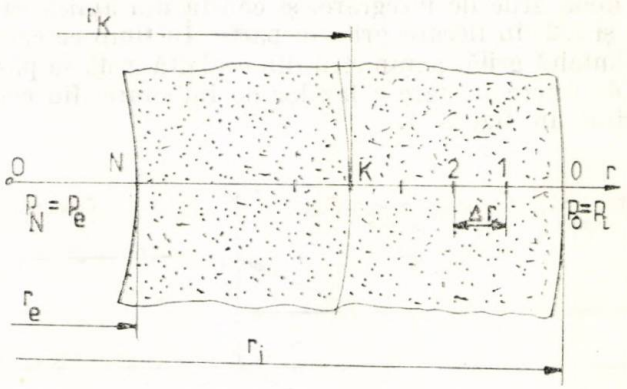


Fig. 3

— *faza corector*, în care se utilizează următoarele expresii algebrice :

$$\frac{1}{2(\Delta x)^2}\,\delta_x^2(H_i^{j+1} + H_i^j) =$$

$$= F\left[\mathrm{i}(\Delta x), \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta t,\ H_i^{j+\frac{1}{2}}, \frac{1}{4(\Delta x)}\,\delta_x(H_i^{j+1} + H_i^j), \frac{1}{\Delta t}(H_i^{j+1} - H_i^j)\right]. \quad (22)$$

Prin δ_x și δ_x^2 s-au notat operatorii în diferențe centrate :

$$\delta_x H_i^j = H_{i+1}^j - H_{i-1}^j$$

și

$$\delta_x^2 H_i^j = H_{i+1}^j - 2H_i^j + H_{i-1}^j .$$

Condițiile la limită în nodul (N) de ieșire din filtru, pentru funcția necunoscută $T(x,t)$, nu sînt dinainte cunoscute. Determinarea acestei temperaturi, deci a gradului de încălzire a fluidului, constituie unul din scopurile studiului întreprins. În astfel de cazuri, valoarea funcției necunoscute din ultimul nod se exprimă, în fiecare moment, cu ajutorul pasului

spațial (Δx) și a valorii derivatei funcției $T(r, t)$ din penultimul nod de calcul. Se exprimă derivata din nodul $(N-1)$ în diferențe finite regresive, care permite calculul valorii temperaturii din ultimul nod, la orice moment de timp $t^j = j \cdot \Delta t$:

$$T_N^j = T_{N-1}^j + \frac{1}{2}(3 \cdot T_{N-1}^j - 4 \cdot T_{N-2}^j + T_{N-3}^j). \tag{23}$$

Calculul numeric propriu-zis se desfășoară în două „grile" spațiu-timp: grila hidraulică în care se realizează integrarea numerică a ecuației de mișcare (7) și grila termică în care se derulează algoritmul de integrare a ecuației bilanțului termic (19). Calculul evoluează în timp, alternativ în cele două grile de integrare, și constă din aplicarea succesivă a relațiilor (21) și (22) în fiecare grilă în parte. În timp ce calculul progresează într-o anumită grilă, parametrii din cealaltă grilă se păstrează constanți. Modul de interconectare a fazelor de integrare din cele două grile este schematizat în figura 4.

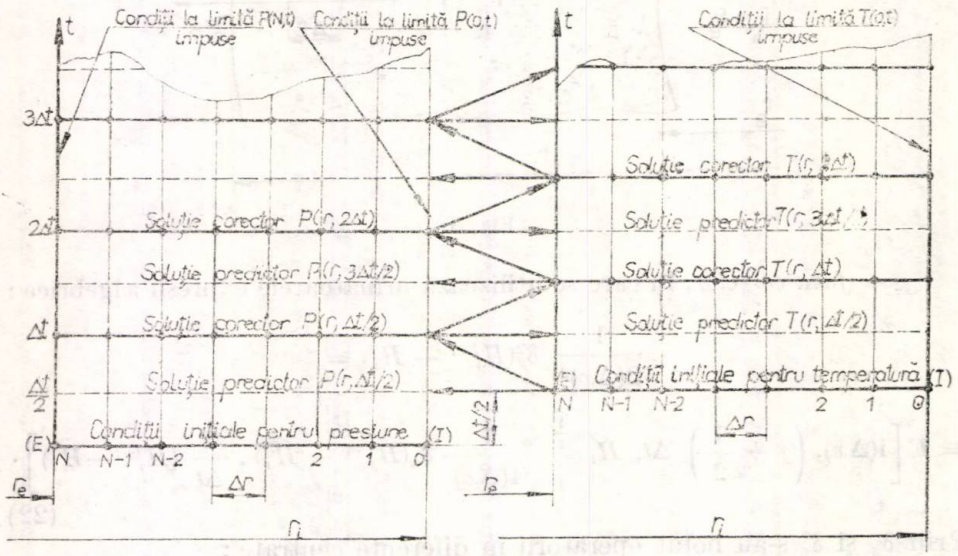


Fig. 4

În fiecare fază predictor sau corector, în fiecare grilă, în urma aplicării relațiilor (21) sau (22) în cele $(N-1)$ noduri de integrare, rezultă un sistem de ecuații algebrice cu $(N-1)$ ecuații liniare și $(N-1)$ necunoscute, necunoscutele fiind valorile $p(r, t)$ sau $T(r, t)$ din cele $(N-1)$ noduri de la momentul de timp respectiv. Sistemul algebric se pune sub forma unei ecuații matriceale. Matricea tridiagonală a coeficienților, înmulțită la dreapta cu matricea coloană a valorilor funcției necunoscute din cele $(N-1)$ noduri ale grilei respective, este egală cu matricea coloană a termenilor liberi. Rezolvarea se realizează cu algoritmul Thomas [7].

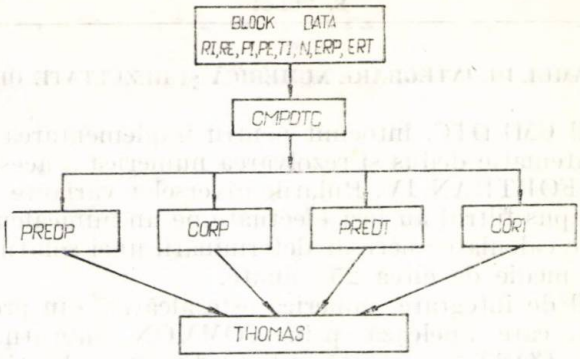


Fig. 5

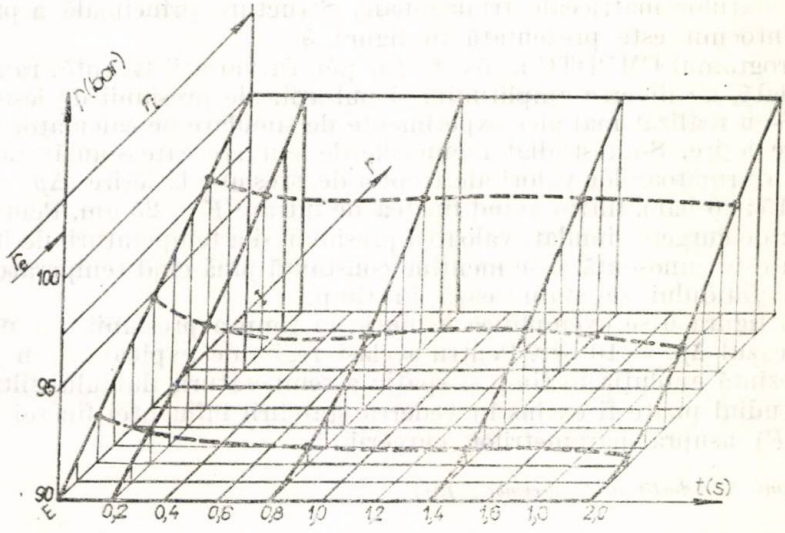


Fig. 6

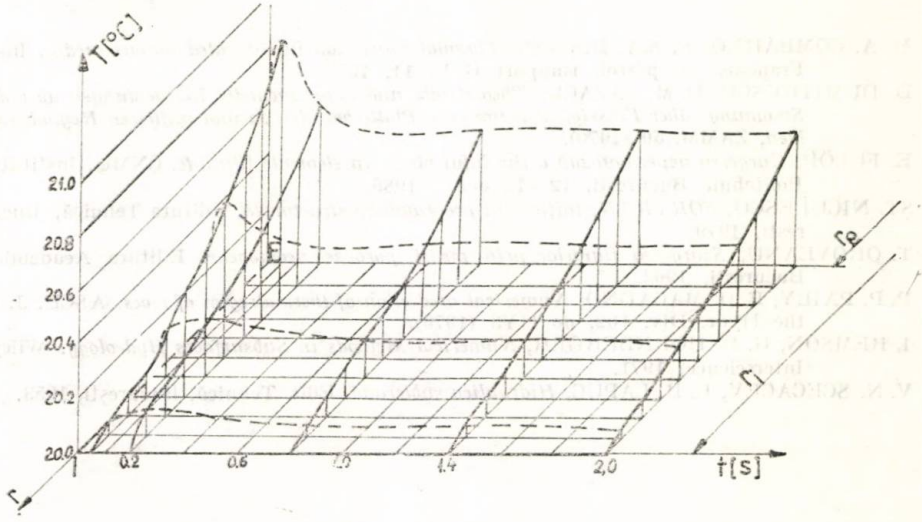


Fig. 7

4. PROGRAMUL DE INTEGRARE NUMERICĂ ȘI REZULTATE OBȚINUTE

Programul CMPDTC, întocmit pentru implementarea pe calculator a modelului matematic dedus și rezolvarea numerică a acestuia, este editat în limbajul FORTRAN IV. Rulările diverselor variante de exploatare la care a fost supus filtrul au fost efectuate pe un minicalculator CORAL 4011. Timpul de calculator necesar determinării unei soluții stabilizate în timp a fost în medie de circa 25 minute.

Programul de integrare numerică este alcătuit din programul principal CMPDTC, care apelează prin COMMON subrutinele PREDP, CORP, PREDT, CORT (în această ordine). Fiecare subrutină apelează la rîndul său prin COMMON, subrutina THOMAS, specializată pentru rezolvarea ecuațiilor matriceale tridiagonale. Structura principială a programului întocmit este prezentată în figura 5.

Programul CMPDTC a fost testat pentru variații treaptă, rampă și sinusoidală, de diverse amplitudini și pulsații, ale presiunii de ieșire din filtru. S-au realizat mai ales experimente de simulare pe calculator a presiunii de ieșire. S-au studiat regimurile de curgere care s-au instalat ca urmare a următoarelor valori ale treptei de presiune la ieșire ($\Delta p_e = 0{,}5$; 4 ; 10 ; 15 ; 20 bar), filtrul avînd finețea de filtrare $F = 25$ μm. Pentru fiecare caz de curgere simulat, valoarea presiunii și a temperaturii de intrare în filtru este cunoscută și se menține constantă pînă cînd temperatura de ieșire a fluidului se stabilizează în timp.

În figura 6 se exemplifică evoluția în timp a presiunii din noduri, pentru cazul $\Delta p_e = 10$ bar. Pentru același regim de exploatare, în figura 7 se prezintă evoluția în timp și spațiu a temperaturii fluidului filtrat.

Studiul poate fi extins în vederea stabilirii influenței finetei de filtrare (F) asupra parametrilor curgerii.

Primit la redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. COMBARNOUS, S.A. BORIES, *Thermal convection in saturated porous media.* Inst. Français du pétrol, Rapport G. E. 11, 1973.
2. D. DUMITRESCU, D. M. CAZACU, *Theoretische und experimentelle Betrachtungen über die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen*, ZAMM, **50** (1970).
3. E. FÜLÖP, *Curgerea nepermanentă a fluidului vîscos în elemente filtrante.* CNMU, Institutul Politehnic București, 12—13 dec. 1986.
4. ȘT. NICULESCU, *FORTRAN, inițiere în programarea structurată.* Editura Tehnică, București, 1979.
5. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene.* Editura Academiei, București, 1963.
6. P. P. PAILY, E. O. MACAGNO, *Numerical prediction of thermalregim of rives.* ASCE, J. of the Hydr. Div. 102, no HY3 (1976).
7. I. REMSON, G. M. HORNBERGER, *Numerical Methods in Subsurfaces Hydrology.* Wiley-Interscience, 1971.
8. V. N. SCECACEV, B. B. LAPUC, *Hidraulica subterană.* Edit. Tehnică, București, 1953.

PORTANȚA LAGĂRELOR RADIALE ÎNGUSTE LUBRIFIATE CU UNSORI CONSISTENTE*)

de M. D. PASCOVICI,
Institutul Politehnic București,
AL. O. RĂDULESCU,
I.C.T.C.M., București

Lucrarea prezintă un mod de calcul al forței portante, debitului de lubrifiant și al puterii consumate prin frecare pentru lagărele radiale de lățime mică lubrifiate cu unsori consistente considerate cu medii Bingham. Lucrarea conține și rezultatele obținute atît prin utilizarea unei rezolvări analitice (aproximative), cît și prin utilizarea unei rezolvări numerice.

NOTAȚII

$\mathcal{A} = 2\pi\,\mu n/(\tau_0\psi^*)$ — coeficient Bingham global;
$A = \mathcal{A}\,\varepsilon\sin\theta/(1+\varepsilon\cos\theta)^2$ — coeficient Bingham local;
B — lățimea lagărului;
B^* — lățimea filmului de lubrifiant în zona divergentă;
$\bar{B} = B/D$;
D — diametrul lagărului;
F — forța radială;
$\bar{F} = \psi^* p_m/\tau_0$ — forța radială adimensională;
J — jocul diametral;
$S^* = 2\pi\,\bar{F}/\mathcal{A} = p_m\psi^{*2}/(\mu n)$ — numărul Sommerfeld al lagărului îngust;
$U = \pi D n$ — viteza periferică;
$a = \gamma_{min}$;
e — excentricitatea;
h — grosimea filmului de lubrifiant;
h_m — grosimea minimă a filmului de lubrifiant;
n — turația, în rot/s;
p — presiunea în filmul de lubrifiant;
$\bar{p} = p/\tau_0$ — presiunea adimensională;
$p_m = F/(B\,D)$ — presiunea medie;
u — viteza în filmul de lubrifiant în direcția x;
w — viteza în filmul de lubrifiant în direcția z;
x, y, z — coordonate carteziene;
$\bar{z} = 2z/B$ — coordonată adimensională;
γ — grosimea relativă a nucleului stagnant;

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 3, 1988, P. 215—223

γ_{min} — valoarea lui γ pentru $\bar{z} = \pm 1$;
ε $= 2e/J$ — excentricitatea relativă;
θ — coordonata unghiulară;
μ — viscozitatea dinamică a lubrifiantului;
τ — tensiunea tangenţială în lubrifiant;
τ_0 — pragul de tensiune;
φ — unghiul de atitudine;
ψ $= J/D$ — jocul relativ convenţional;
ψ^* $= J/B$ — jocul relativ pentru lagărul îngust.

1. INTRODUCERE

Unsorile consistente sînt modelate frecvent ca medii Bingham [1]. Ecuaţiile constitutive, în coordonate carteziene, vor fi în acest caz

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = \tau_0 + \mu \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Curgerea acestor medii este caracterizată de apariţia unor nuclee stagnante — domenii în care tensiunile tangenţiale sînt inferioare pragului de tensiune. În interiorul nucleelor stagnante nu există mişcare relativă. Prezenta lucrare îşi propune să determine distribuţia presiunii în filmul de lubrifiant şi forţa portantă pentru lagărele radiale înguste.

2. DEDUCEREA ECUAŢIEI REYNOLDS CARACTERISTICE LAGĂRELOR ÎNGUSTE

Pentru lagărele radiale complete cu raportul $\bar{B} < 1$ este utilizat adesea modelul lagărului îngust („infinit scurt"). Acest model presupune că gradientul presiunii în direcţia vitezei periferice a fusului este neglijabil în raport cu cel în direcţia axei de rotaţie, $\partial p/\partial x \ll \partial p/\partial z$. În consecinţă, se va considera $\partial p/\partial x \approx 0$, ceea ce conduce la o distribuţie liniară a vitezei în film pe direcţia x.

În cazul utilizării unsorilor consistene, modelate ca medii Bingham, apar următoarele particularităţi:

— curgerea pe direcţia z (tip Poiseuille), va prezenta un nucleu stagnant de tipul celui întîlnit în cazul filmului expulzat [3] (fig. 1);

— curgerea pe direcţia x (cvasi Couette) este posibilă dacă $\mu U/h > \tau_0$, în caz contrar curgerea încetează.

Utilizînd modelul lagărului îngust, curgerea trebuie să fie posibilă pentru orice $\theta \in [0{,}2\ \pi]$, aceasta implică condiţia $\mu U/h_M > \tau_0$, unde h_M este grosimea maximă a filmului de lubrifiant.

Ecuația de mișcare pe direcția z conduce la profilul de viteze [1], [2] descris prin relațiile

$$w = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}[-y^2 + h(1-\gamma)y] \text{ pentru } y \in \left[0\,;\frac{h-\gamma h}{2}\right],$$

$$w = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(1-\gamma)^2 \text{ pentru } y \in \left(\frac{h-\gamma h}{2}\,;\,\frac{h+\gamma h}{2}\right), \tag{2}$$

$$w = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}[-y^2 + h(1+\gamma)\,y - \gamma h^2] \text{ pentru } xy \in \left[\frac{h+\gamma h}{2}\,;\,h\right].$$

Fluxul de lubrifiant în direcția z ce se obține integrînd distribuția de viteze (2) este

$$q_z = -\frac{h^3}{24\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(1-\gamma)^2(2+\gamma). \tag{3}$$

Fluxul de lubrifiant în direcția x, ca urmare a ipotezelor făcute, este

$$q_x = Uh/2. \tag{4}$$

Ecuația de conservare,

$$\partial q_x/\partial x + \partial q_z/\partial z = 0, \tag{5}$$

conduce, în acest caz, la forma particulară a ecuației Reynolds caracteristică lagărelor înguste lubrifiate cu medii Bingham,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\gamma)^2(2+\gamma)\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{12\,\mu U}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{6}$$

3. UTILIZAREA ECUAȚIEI REYNOLDS DEDUSE

Folosind expresia curentă a grosimii filmului de lubrifiant în cazul lagărelor radiale,

$$h = J(1 + \varepsilon\cos\theta)/2, \tag{7}$$

și schimbarea de variabile $x = D\theta/2$, se ajunge la următoarea formă a ecuației (6):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{96\,\mu U z\,\psi\varepsilon\sin\theta}{J^3(1+\varepsilon\cos\theta)^3(1-\gamma)^2(2+\gamma)}. \tag{8}$$

Pentru aflarea distribuției de presiuni este necesară integrarea ecuației (8). Integrarea este posibilă dacă se cunoaște modul de variație al factorului $\gamma(z)$. Se apelează la ecuația de echilibru a nucleului stagnant [1],

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\tau_0}{\gamma h}. \tag{9}$$

MŰSZAKI EGYETEM

Expresia frontierei nucleului stagnant se obţine din ecuaţiile (7), (8) şi (9)

$$\frac{(1-\gamma)^2(2+\gamma)}{\gamma} = \frac{24\,\mu U z\,\psi\,\varepsilon\sin\theta}{\tau_0 J^2(1+\varepsilon\cos\theta)^2}. \tag{10}$$

Utilizînd notaţii adimensionale aceasta devine

$$\gamma^3 - 3(1+2A\bar{z})\gamma + 2 = 0, \tag{11}$$

a cărei soluţie este

$$\gamma = 2(1+2A\bar{z})^{0,5}\cos\{60^\circ + [\arccos(1+2A\bar{z})^{-1,5}]/3\}. \tag{12}$$

În figurile 2 şi 3 este reprezentată forma nucleului stagnant pentru $\mathcal{A} = 1$; $\varepsilon = 0{,}5$ şi $\varepsilon = 0{,}75$.

Folosind soluţia (12) şi notaţiile adimensionale, ecuaţia (9) devine

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{\psi^*(1+\varepsilon\cos\theta)(1+2A\bar{z})^{0,5}\cos\{60^\circ + [\arccos(1+2A\bar{z})^{-1,5}]/3\}} \tag{13}$$

Integrarea ecuaţiei (13) se va efectua atît pe o cale aproximativă — analitică, cît şi pe una mai riguroasă — numerică. Vor fi abordate separat zona convergentă şi zona divergentă.

Ecuaţia distribuţiei presiunii (13) este valabilă numai pentru zona convergentă, $\theta \in [0, \pi]$, unde filmul de lubrifiant umple tot interstiţiul.

În zona divergentă, $\theta \in [\pi, 2\pi]$, filmul de lubrifiant îşi pierde continuitatea (se restrînge), curgerea făcîndu-se în filamente („în degete") [1], [3]. Se va presupune existenţa unui singur filament central (fig. 2). Pe direcţia z filmul va fi în regim de portanţă statică, deci $\gamma = 1$. În aceste condiţii ecuaţia (9) a nucleului stagnant devine

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\tau_0}{h}. \tag{9'}$$

Lăţimea $B^*(\theta)$ a filmului este dată de ecuaţia de conservare a debitului în direcţia circumferenţială,

$$UBh_m/2 = UB^*h/2. \tag{14}$$

Utilizînd condiţia la limită de presiuni,

$$z = \pm B^*/2\,;\; p = 0, \tag{15}$$

ecuaţiile (7), (9') şi (14) conduc la următoarea expresie a distribuţiei presiunii pentru zona divergentă:

$$p = \frac{4\tau_0}{J(1+\varepsilon\cos\theta)}\left[\frac{B(1-\varepsilon)}{2(1+\varepsilon\cos\theta)} \mp z\right];\; z \in \left[-\frac{B^*}{2}; \frac{B^*}{2}\right], \tag{16}$$

unde se ia primul semn pentru $z > 0$ şi al doilea pentru $z < 0$.

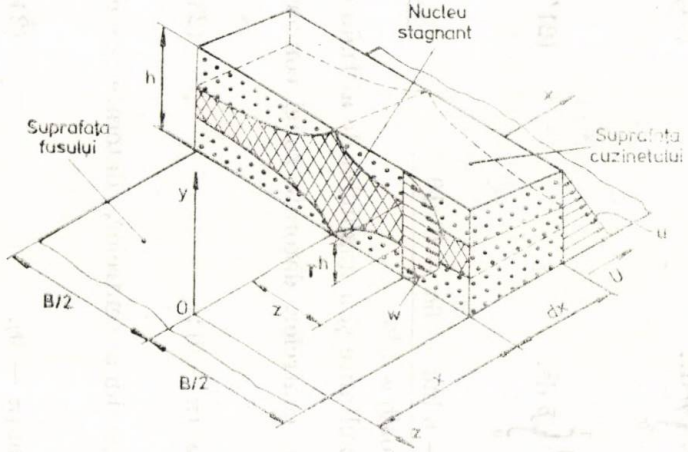


Fig. 1

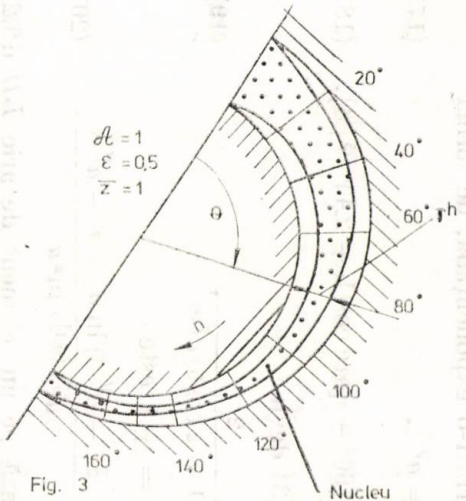


Fig. 3

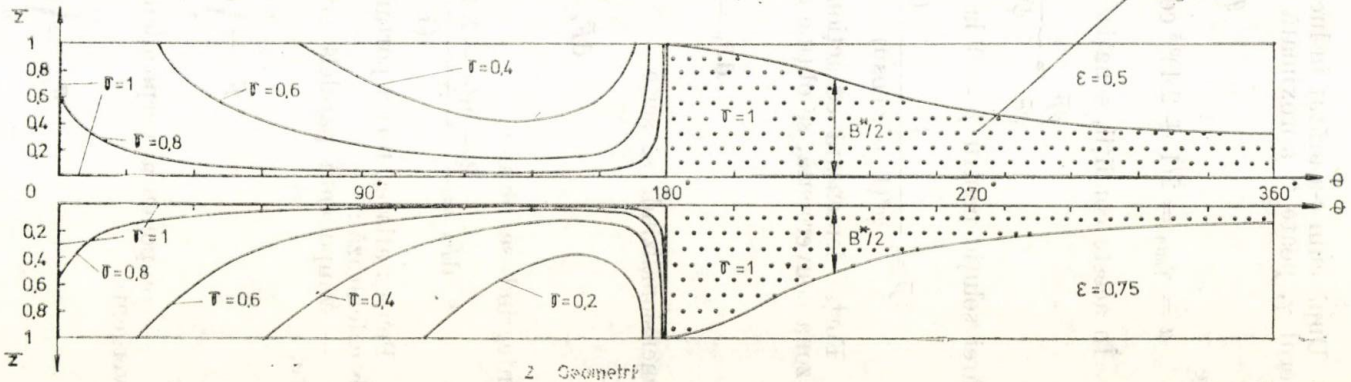


Fig. 2

Portanţa zonei convergente. Soluţia aproximativă-numerică.

După cum s-a arătat în lucrarea anterioară [2], soluţia (12), pentru factorul γ, poate fi aproximată printr-o exponenţială, de forma

$$g = a^{\sqrt{|\bar{z}|}}, \tag{17}$$

unde

$$a = \gamma_{min} = 2(1 + 2A)^{0,5} \cos\{60^\circ + [\arccos(1 + 2A)^{-1,5}]/3\}. \tag{18}$$

În aceste condiţii, ecuaţia (13) devine

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = -\frac{2}{\psi^*(1 + \varepsilon \cos\theta)\, a^{\sqrt{|\bar{z}|}}}, \tag{19}$$

a cărei soluţie pentru $p = 0$ la $z = \pm 1$ este

$$\bar{p} = \frac{4}{\psi^*(1 + \varepsilon \cos\theta)} \cdot \frac{(a\ \overline{|\bar{z}|} - a^{\sqrt{|\bar{z}|}}) \ln a + a - a^{\sqrt{|\bar{z}|}}}{a^{(\sqrt{|\bar{z}|}+1)} \cdot \ln^2 a}. \tag{20}$$

Forţa elementară ce acţionează pe un element de arie $BD\ \mathrm{d}\theta/2$, din zona convergentă, se obţine din integrala

$$\mathrm{d}F_c = D\,\mathrm{d}\theta \int_0^{B/2} p\,\mathrm{d}z. \tag{21}$$

Adimensionalizînd, se scrie

$$\mathrm{d}\bar{F}_c = \frac{\mathrm{d}\theta}{2} \int_0^1 \bar{p}\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{21'}$$

şi integrînd se obţine

$$\mathrm{d}\bar{F}_c = \frac{2(-\ln^3 a - 3\ln^2 a - 6\ln a + 6a - 6)\,\mathrm{d}\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)\, a \ln^4 a}. \tag{22}$$

Pentru aflarea forţei portante rezultante şi a unghiului de atitudine φ se calculează :

— componenta paralelă cu linia centrelor, datorate zonei convergente,

$$\bar{F}_{c\parallel} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\bar{F}_c \cos(\pi - \theta); \tag{23}$$

— componenta perpendiculară pe linia centrelor, datorate zonei convergente,

$$\bar{F}_{c\perp} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\bar{F}_c \sin(\pi - \theta). \tag{24}$$

Integralele (23) şi (24) se calculează numeric.

Soluție exactă — numerică

În acest caz se integrează numeric, în funcție de z ecuația (13), aflîndu-se distribuția presiunii. Apoi se integrează numeric în funcție de z și θ componentele forței din zona convergentă (23) și (24). Integrarea se face prin metode numerice uzuale [4].

Portanța zonei divergente. Soluție analitică

Forța elementară ce acționează pe un element de arie $B^*D\,\mathrm{d}\theta/2$ din zona divergentă se obține din integrala

$$\mathrm{d}F_d = D\,\mathrm{d}\theta \int_0^{B^*/2} p\,\mathrm{d}z. \tag{21'}$$

Utilizînd ecuația (16), efectuînd integrala și adimensionalizînd, se obține

$$\mathrm{d}\bar{F}_d = \frac{(1-\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\theta}{2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}. \tag{25}$$

Componentele forței portante după cele două direcții față de linia centrelor, datorate zonei divergente sînt

$$\bar{F}_{d\parallel} = \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}\bar{F}_d \cos(\theta-\pi) = \frac{3\pi\varepsilon}{4(1+\varepsilon)^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{26}$$

$$\bar{F}_{d\perp} = \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}\bar{F}_d \sin(\theta-\pi) = -\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}. \tag{27}$$

Integralele (23) și (24) se calculează numeric.

Portanța lagărului în ansamblu

Forța rezultantă a lagărului F și unghiul de atitudine φ se vor obține prin relațiile

$$\bar{F} = \sqrt{(\bar{F}_{c\parallel}+\bar{F}_{d\parallel})^2 + (\bar{F}_{c\perp}+\bar{F}_{d\perp})^2} \tag{28}$$

și

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{F}_{c\perp}+\bar{F}_{d\perp}}{\bar{F}_{c\parallel}+\bar{F}_{d\parallel}}. \tag{29}$$

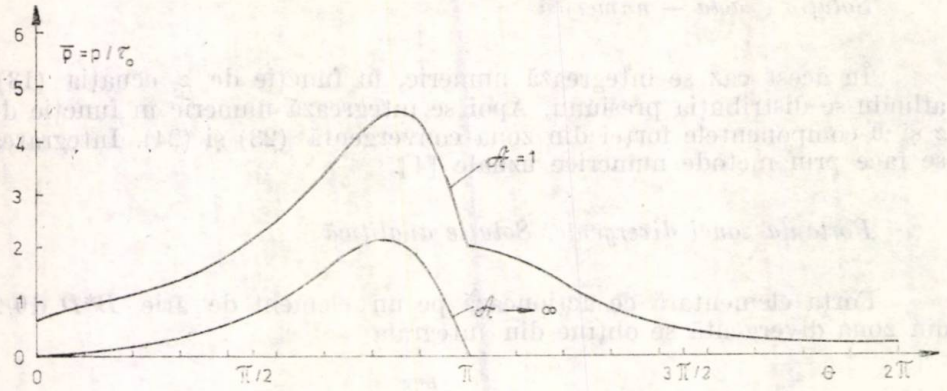


Fig. 4

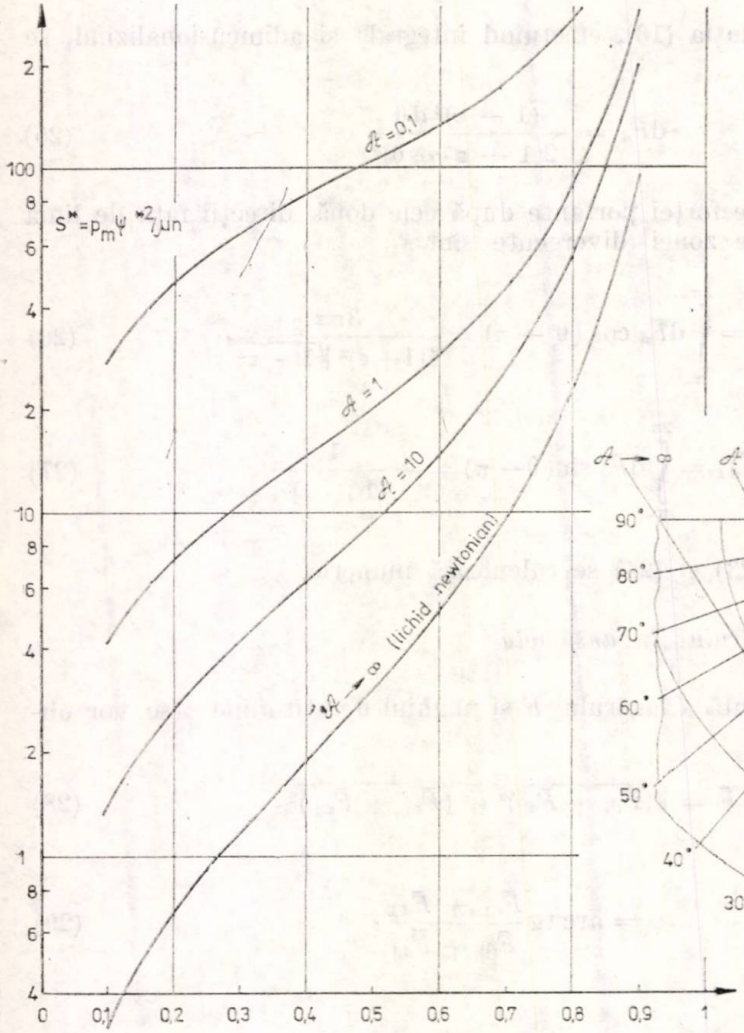


Fig. 5

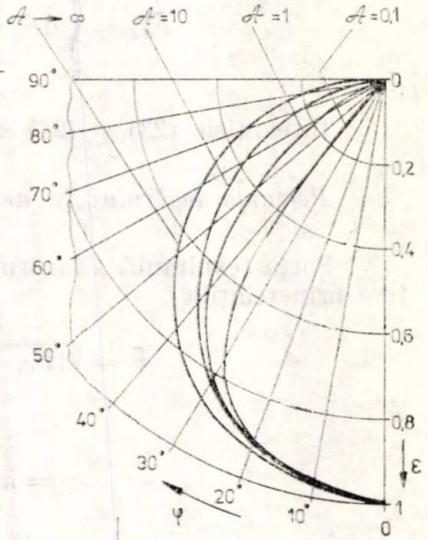


Fig. 6

4. APLICAȚII NUMERICE ȘI CONCLUZII

S-a determinat distribuția de presiuni, capacitatea portantă și unghiul de atitudine, pentru trei valori ale coeficientului Bingham global $\mathcal{A} = 0{,}1\,;\ 1\,;\ 10$ și excentricități relative $\varepsilon = 0{,}1 \ldots 0{,}9$. Rezultatele au fost comparate cu cele obținute pentru uleiuri newtoniene ($\mathcal{A} \to \infty$). În figurile 4, 5 și 6 sînt reprezentate o parte din aceste rezultate. Urmînd curbele trasate se constată :

— distribuția de presiuni pentru medii Bingham (unsori consistente) se deosebește mult, atît calitativ, cît și cantitativ de cea corespunzătoare uleiului newtonian. Deosebirile calitative mai însemnate apar în special în zona divergentă (neportantă) (fig. 4) ;

— capacitatea portantă evaluată prin numărul Sommerfeld crește mult în cazul unsorilor consistente în special pentru $\mathcal{A} < 1$ (fig. 5) ;

— variația unghiului de atitudine (fig. 6) își schimbă mult alura (înregistrată pentru uleiuri newtoniene) în special pentru valori $\mathcal{A} < 10$.

Este important să se precizeze că din punct de vedere practic domeniul investigat se restrînge, prin condiția necesară anunțată la începutul lucrării și anume $\mu U/h_M > \tau_0$. Folosind parametrii adimensionali condiția se rescrie

$$\mathcal{A} > (\varepsilon + 1)\bar{B}. \tag{30}$$

Pentru valorile uzuale ale raportului $\bar{B} = 0{,}3 \ldots 0{,}7$ și ale excentricității relative $\varepsilon = 0{,}3 \ldots 0{,}9$ rezultă că sînt de interes practic cazurile cu valori ale coeficientului Bingham global $\mathcal{A} > 1$.

Primit la redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. O. PINKUS, B. STERNLICHT, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, New York, McGraw-Hill, 1961.
2. M. D. PASCOVICI AL. O. RĂDULESCU, *The grease squeeze film*, Wear, 116, (1987).
3. K. YOSHIOKA, *The shape of cavity of short bearing with a circumferential oil groove*, Journal of JSLE, International edition, 3 (1982).
4. G. VRACIU, A. POPA, *Metode numerice cu aplicații în tehnica de calcul*, Scrisul românesc, Craiova, 1982.

EFECTUL TIMPULUI DE TRANZIT ASUPRA VISCOZITĂȚII EFECTIVE ÎN CONTACTE EHD*)

de E. N. DIACONESCU

Institutul de Învățămînt Superior, Suceava

Se prezintă mai întîi încercări experimentale de tracțiune la diverși timpi de tranzit ai lubrifiantului prin contact, rezultatele cărora evidențiază o scădere a viscozității efective din contact cu creșterea duratei de tranzit. Pentru elucidarea fenomenului se prezintă apoi măsurători experimentale de viscozitate la impulsuri de presiune de durate variabile, realizate pe un aparat simplu. Deoarece în acest din urmă caz se constată o tendință contrară de variație a viscozității cu durata forfecării, se propune o nouă explicație teoretică, care ține seama de structura moleculară a lubrifiantului și particularitățile de forfecare la tracțiune EHD, și care conduce la rezultate în concordanță satisfăcătoare cu concluziile experimentale.

STADIUL ACTUAL

Tracțiunea elastohidrodinamică este răspuns al peliculei de lubrifiant la forfecare în condițiile dinamice determinate de saltul de presiune de la intrarea în contact. După cum se sugerează pe bază de modele reologice [1, 2, 3], sau se demonstrează fizic [4], lubrifiantul nu răspunde instantaneu la acest salt, frecvența golurilor din lichid scăzînd de la valoarea inițială la valoarea de echilibru corespunzătoare noii presiuni într-un interval de timp dependent de timpul de relaxare al fluidului în condițiile date. Ca urmare, viscozitatea lubrifiantului, care variază exponențial cu inversul acestei frecvențe, va crește în același interval de timp de la valoarea avută la presiunea atmosferică la valoarea corespunzătoare presiunii de contact. În consecință, modificarea timpului de tranzit al lubrifiantului prin contact poate să ofere informații prețioase asupra duratei răspunsului tranzitoriu al lubrifiantului la saltul de presiune suferit. Atunci cînd acest timp crește, avînd valori inferioare duratei procesului tranzitoriu, viscozitatea efectivă a lubrifiantului crește și ea, iar tracțiunea corespunzătoare unei viteze date de forfecare se îmbunătățește; la valori superioare acestei durate, procesul tranzitoriu se încheie în interiorul contactului, iar viscozitatea medie a lubrifiantului crește tot mai lent cu timpul de tranzit pe seama reducerii ponderii viscozității tranzitorii. Este deci de așteptat ca creșterea coeficientului de tracțiune să aibă o diminuare sensibilă la un timp de tranzit aproximativ egal cu durata procesului tranzitoriu.

Măsurători de viscozitate, efectuate pe un viscozimetru original de Paul [5], confirmă calitativ concluziile din [1 ... 4].

În schimb rezultatele de tracțiune EHD obținute de Plint [6], la presiuni ridicate și valori reduse ale vitezei de rostogolire și temperaturii, arată că creșterea dimensiunilor ariei de contact, la presiune constantă,

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 3, 1988, P. 225—229

conduce la diminuarea coeficientului de tracțiune. Pentru a verifica aceste concluzii, s-a conceput și realizat un stand de încercat la tracțiune [7], pe care, în condițiile menținerii constante a presiunii hertziene și a grosimii peliculei de lubrifiant, timpul de tranzit poate fi variat de la simplu la du-

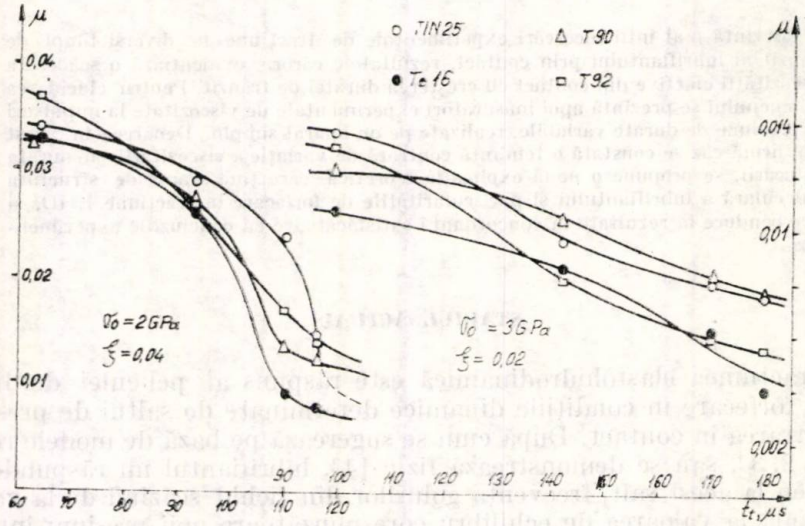


Fig. 1

blu. Pe el s-au încercat patru uleiuri indigene și anume T90, TIN25EP, Te16 și I92, la două valori ale presiunii hertziene maxime: 2GPa, cînd timpul de tranzit a variat între 64 și 114 μs, și 3GPa, pentru timpi de tranzit cuprinși între 99 și 180 μs. Toate rezultatele au confirmat calitativ concluzia lui Plint, indicînd scăderea tracțiunii cu creșterea timpului de tranzit. Pentru ilustrare, în figura 1 se prezintă variația coeficientului de tracțiune cu timpul de tranzit, trasată pe baza datelor din [7]. Despre încălzire nu poate fi vorba, deoarece temperatura uleiului s-a menținut constantă la 32°C, iar efectele termice prin forfecare sînt neglijabile la viteza mică de alunecare aplicată contactului, așa încît scăderea coeficientului de tracțiune pare inexplicabilă. Prezenta lucrare își propune să furnizeze un model posibil pentru această manifestare.

MODEL FIZIC

Moleculele lubrifiantului, sau părți ale lor, ca elemente structurale de curgere, nu sînt sferice și nici nu au simetrie sferică. Astfel, parafinele din uleiuri au molecule filiforme, simple sau ramificate. Cicloparafinele au inele plane de care se pot lega ramificații filiforme. Hidrocarburile aromatice au și ele inele benzenice cu orientare în plan. Ca urmare, aceste molecule vor opune o rezistență la curgere, dependentă de orientarea moleculei față de planul curgerii: maximă cînd ele sînt perpendiculare pe acest

plan și, dimpotrivă, minimă, atunci cînd moleculele sînt orientate în planul și pe direcția curgerii. Evident că în prima situație viscozitatea este maxină, iar în ultima minimă.

La intrarea în contact moleculele au o orientare aleatoare, așa încît din punct de vedere statistic se poate accepta că pe fiecare direcție a sistemului de coordonate este orientată o treime din molecule. În această așezare fluidul are o viscozitate relativ ridicată, η_0. Odată intrate în contact, sub acțiunea gradientului de viteză produs de forța de tracțiune aplicată contactului, moleculele tind să se orienteze în planul curgerii, așa încît viscozitatea scade. O astfel de orientare a moleculelor în pelicula EHD supusă la forfecare a fost observată experimental prin spectroscopie în infraroșu [8]. Cînd toate moleculele sînt orientate în planul curgerii, viscozitatea devine minimă.

Desigur, orientarea nu se produce instantaneu, ci în timp, așa încît este util de apreciat cinetica alinierii. În acest scop se consideră, ca în figura 2, o moleculă filiformă de lungime l, care intră în contact orientată

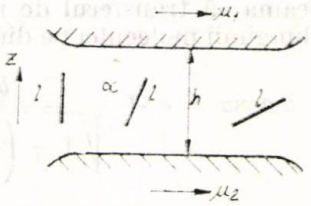


Fig. 2

după direcția normală la curgere, z. Sub acțiunea forfecării ea se înclină capătul superior, apropiat de elementul conducător, deplasîndu-se mai repede; la momentul t de la intrarea în contact ea face unghiul α cu direcția inițială. Mișcarea moleculei poate fi vizualizată ca o translație cu viteza capătului inferior și o rotație cu viteza unghiulară ω în jurul acestui capăt, dată de relația:

$$\omega = \frac{\Delta u_\alpha \cos\alpha}{l} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

unde Δu_α este diferența de viteză pe direcția curgerii dintre capetele moleculei, la rîndul ei exprimată prin

$$\Delta u_\alpha = \frac{\Delta u}{h} l \cos\alpha, \tag{2}$$

Δu fiind viteza de alunecare din contact ($\Delta u = u_1 - u_2$), iar h grosimea filmului de lubrifiant.

Din (1) și (2) se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta u}{h} \cos^2\alpha, \tag{3}$$

a cărei soluție este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta u}{h} t + c. \tag{4}$$

Constanta c de integrare este nulă dacă se presupune că inițial molecula este orientată pe direcția z, așa încît, final, timpul pentru ca molecula să se încline cu unghiul α este

$$t = \frac{h}{\Delta u} \operatorname{tg}\alpha. \tag{5}$$

Se vede că alinierea perfectă $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ se realizează după un timp infinit, așa încît viscozitatea minimă se poate nota prin η_∞.

În genere, viscozitatea are doi termeni : unul constant, corespunzător situației cînd toate moleculele ar fi aliniate, și unul variabil, proporțional cu cos α, care ține seama că transferul de impuls între straturi este proporțional cu proiecția lungimii moleculei pe direcția normală la curgere :

$$\eta = a + b\cos\alpha = a + \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{h} t\right)^2}}.$$

Cu condițiile $\eta = \eta_0$ la $t = 0$ și $\eta = \eta_\infty$ cînd $t \to \infty$, rezultă

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{h} t\right)^2}}. \tag{6}$$

Relația (6) exprimă variația viscozității cu timpul scurs de la intrarea în contact. Viscozitatea medie în contact se obține prin mediere integrală în

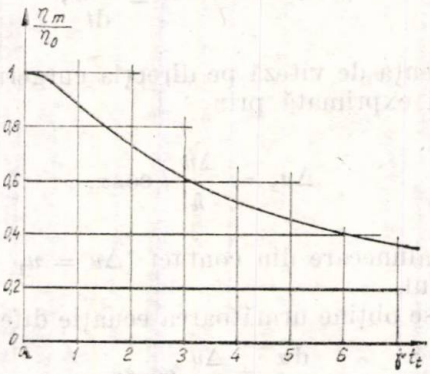


Fig. 3

raport cu timpul, dacă se acceptă că presiunea este constantă, egală cu valoarea medie:

$$\eta_m = \frac{1}{t_t}\int_0^{t_t} \eta \, dt = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\dot{\gamma} t_t} \ln [\dot{\gamma} t_t + \sqrt{1 + (\dot{\gamma} t_t)^2}], \qquad (7)$$

unde t_t reprezintă timpul de tranzit, iar prin $\dot{\gamma}$ s-a notat viteza de forfecare $\left(\dot{\gamma} = \frac{\Delta u}{h}\right)$. Variația viscozității medii cu produsul $\dot{\gamma} t_t$ este reprezentată în figura 3 pentru $\eta_\infty = 0$.

Se vede că alura curbelor seamănă cu cea a variației coeficientului de tracțiune cu timpul de tranzit, ceea ce, într-o primă etapă, reprezintă o confirmare calitativă a modelului extrem de simplificat propus.

CONCLUZII

Modelul propus pentru explicarea scăderii viscozității efective din contact cu creșterea timpului de tranzit, bazat pe aliniere, în planul curgerii, a moleculelor fără simetrie sferică, prin efectul gradientului de viteză din peliculă, este confirmat calitativ de rezultatele experimentale existente.

Primit la redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. FEIN, *Possible role of compressional viscoelasticity in concentrated contact lubrication*, ASME Trans., I.L.T., **89** (1967).
2. G. HARRISON, E. G. TRACHMAN, *The role of compressional viscoelasticity in the lubrication of rolling contacts*, ASME Trans., J.L.T., **94** (1972).
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Asupra viscozității fluidelor la presiuni mari*, VAREHD 1, Suceava, 1980.
4. E. N. DIACONESCU, *O teorie unitară a viscozității lichidelor simple*, VAREHD 4, Suceava, 1986.
5. G. R. PAUL, A. CAMERON, *Time-dependent viscosity effects measured on an impact microviscometer*, Nature, D. 2624, Feb. 1974.
6. M. A. PLINT, Ph. D. Thesis, Univ. of London, 1967.
7. E. N. DIACONESCU, I. M. CIORNEI ș.a., *Efectul timpului de tranzit asupra tracțiunii EHD*, VAREHD 3, Suceava, 1984.
8. V. W. KING, J. L. LAUER, *Temperature gradients through EHD films and molecular alignment evidenced by infrared spectroscopy*, ASME Trans, J.L.T., **103** (1981).

O SOLUȚIE A PROBLEMEI EHD PENTRU UN CONTACT EVOLVENTIC ȘI DETERMINAREA STĂRII DE EFORTURI DIN FLANC*)

de M. RAȘEEV și D. PAVELESCU

Institutul Politehnic, București

Se prezintă o soluție pentru problema EHD în cazul unui contact evolventic, la sarcină și viteză mare, soluție care ia în considerare geometria reală evolventică și cinematica ei. Rezultatele scot în evidență influența favorabilă a considerării tribosistemului evolventic real atît asupra repartiției de presiune și tracțiunii vîscoase precum și asupra grosimii minime a filmului. În același timp a fost determinată și starea de eforturi pe suprafața flancului pinionului și variația sa de-a lungul segmentului de angrenare.

1. ECUAȚIA REYNOLDS GENERALIZATĂ ȘI PARTICULARIZAREA EI PENTRU UN INTERSTIȚIU EVOLVENTIC

Pentru rezolvarea problemei contactului elastohidrodinamic evolventic (EHD-E) autorii au dedus o formă generalizată a ecuației Reynolds, utilizabilă pentru un interstițiu oarecare (fig. 1) și o curgere nestaționară.

În deducerea ecuației s-au admis ipotezele uzuale [4,5]:

— lubrifiantul este un fluid newtonian;

— forțele masice sînt neglijabile;

— nu există curgere pe direcța axei Oy;

— vîscozitatea și densitatea lubrifiantului sînt constante pe grosimea filmului.

Utilizînd metodica uzuală [2,5] a rezultat forma generalizată a ecuației Reynolds:

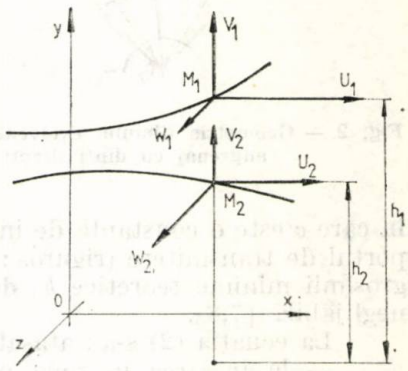


Fig. 1. — Forma generală a unui interstițiu și componentele vitezelor.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho(h_1-h_2)^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho(h_1-h_2)^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho(U_1+U_2)(h_1-h_2)}{2}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho(W_1+W_2)(h_1-h_2)}{2}\right]-\rho\left(U_1\frac{\partial h_1}{\partial x}-U_2\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)-$$

$$-\rho\left(W_1\frac{\partial h_1}{\partial z}-W_2\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)+\rho(V_1-V_2)+(h_1-h_2)\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (1)$$

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 3, 1988, P. 231—241

Este de remarcat că față de ecuațiile Reynolds „clasice" [4, 5 ș.a.] apar explicit ecuațiile celor două suprafețe (h_1 și h_2) și un termen ($\rho(V_1 - V_2)$) ce ține cont de efectul de squeeze.

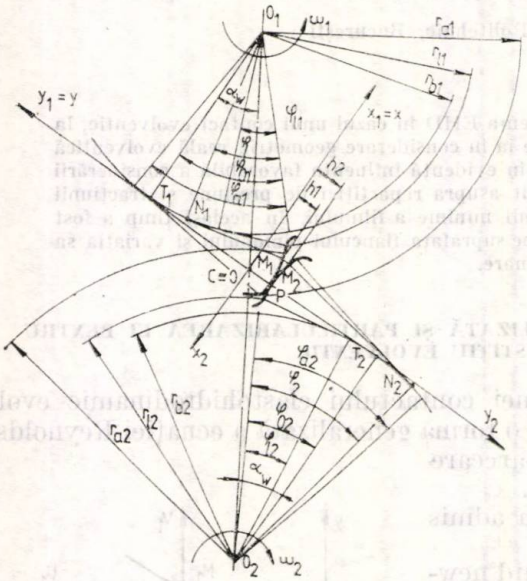


Fig. 2. — Geometria filmului evolventic pentru un angrenaj cu dinți drepți.

Ecuația (1) a fost particularizată pentru un interstițiu avînd (fig. 2) o geometrie și o cinematică evolventică, corespunzătoare unui angrenaj cilindric cu dinți drepți. În particularizarea ecuației s-a admis ipoteza unei curgeri cvasistaționare și a unui lubrifiant incompresibil, fiind cunoscut că influența compresibilității lubrifiantului asupra capacității portante a unui film EHD este neglijabilă [2]. Admițind aceste ipoteze a rezultat forma particulară a ecuației Reynolds pentru cazul unui angrenaj cilindric, evolventic cu dinți drepți:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta(1+i)\,\omega_1(h_1h_2+x^2+c)}{i(h_1-h_2)^3}, \tag{2}$$

în care c este o constantă de integrare necunoscută; $i = z_2/z_1 = \omega_1/\omega_2$ raportul de transmitere (riguros: $\omega_1/\omega_2 = i(1 + 1/r_{b1} \cdot dh_0/d\varphi_1)$ dar variația grosimii minime teoretice h_0 de-a lungul segmentului de angrenare este neglijabilă [7,8].

La ecuația (2) s-au atașat următoarele condiții la limită [6,7]:

— la intrarea în zona portantă: $p = 0$ pentru $x = x_{min}$;

— la ieșirea din zona portantă:

a) condiții la limită Reynolds: $p = dp/dx = 0$ pentru $x = x_m$ dacă $x_m \leqslant x_{max}$

sau

b) condiții la limită Somerfeld: $p = 0$ pentru $x = x_{max}$ dacă $x_m > x_{max}$

unde x_m abscisa punctului de sfîrșit al zonei portante; $x_{min,max}$ abscisele limită ale filmului evolventic.

2. EFORTURI TANGENȚIALE PE SUPRAFAȚĂ

Prin rezolvarea problemei EHD-E prezintă interes atît determinarea repartiției de presiune, cît și obținerea distribuțiilor eforturilor tangențiale pe cele două flancuri. Aceste eforturi sînt date de [7]:

$$\tau_{1,2}(x) = \frac{\eta\omega_1(A \pm B)}{i(h_1-h_2)^2}, \tag{3}$$

unde $A = -3(1 + i)\,(h_1h_2 + x^2 + c)$, $B = (h_1i + h_2)\,(h_1 - h_2)$.

3. GEOMETRIA CONTACTULUI EHD-E

S-a dedus [7] ecuaţia unui film evolventic elastohidrodinamic, ecuaţie formată din ecuaţia flancului nedeformat (care rezultă din geometria evolventei în raport cu un sistem de axe intrinsec, de exemplu x_1Oy_1 pentru pinion (fig. 2)) şi ecuaţia deformaţiei de contact, deformaţie produsă de distribuţia de presiune. În raport cu sistemul de coordonate xOy, avînd originea în polul angrenării şi axa Oy confundată cu linia de angrenare (fig. 2), a rezultat:

$$h = h_1 - h_2,$$

$$h_{1,2} = y_P \pm h_0/2 \pm r_{b1,2}\,[\varphi_{01,2} + \sin(\varphi_{1,2} - \varphi_{01,2}) -$$

$$- \varphi_{1,2}\cos(\varphi_{1,2} - \varphi_{01,2})] \mp \frac{1 - \nu_{1,2}^2}{\pi E_{1,2}} \int_{x_{min}}^{x_m} p(s)\ln(x - s)^2\,ds, \qquad (4)$$

în care parametrii $\varphi_{1,2}$ sînt soluţiile ecuaţiilor transcendente:

$$x = \pm r_{b1,2}[1 - \cos(\varphi_{1,2} - \varphi_{01,2}) - \varphi_{1,2}\sin(\varphi_{1,2} - \varphi_{01,2})], \qquad (5)$$

iar constantele $\varphi_{01,2}$ sînt date de

$$\varphi_{01,2} = \operatorname{tg}\alpha_w \pm \frac{2y_P \pm h_0}{2r_{b1,2}}, \qquad (6)$$

unde y_P este ordonata punctului teoretic de contact P; h_0 — grosimea filmului de lubrifiant dintre cele două flancuri, considerate nedeformate, în punctul teoretic de contact.

Totodată s-au stabilit valorile limită ale abscisei x, date de condiţia de existenţă a profilului evolventic deci de razele de cap $r_{a1,2}$ şi de razele începutului profilului evolventic $r_{11,2}$ (fig. 2) rezultînd

$$x \in [x_{min},\ x_{max}] \qquad (7)$$

unde

$$x_{min} = \operatorname{Max}\,[x(\varphi_{a1}),\ x(\varphi_{12})],$$

$$x_{max} = \operatorname{Min}[x(\varphi_{11}),\ x(\varphi_{a2})].$$

4. VISCOZITATEA LUBRIFIANTULUI

Autorii au adoptat o formă modificată a legii lui Barus:

$$\eta = \eta_0\, e^{\alpha p} \text{ pentru } \alpha p \leqslant (\alpha p)_{max}$$

şi (8)

$$\eta = \eta_0\, e^{\alpha p_{max}} \text{ pentru } \alpha p > (\alpha p)_{max},$$

limitîndu-se pe această cale eforturile tangenţiale pe cele două suprafeţe [3,7].

5. SISTEMUL DE ECUAȚII EHD-E

Sistemul de ecuații a problemei EHD-E este format din: ecuația Reynolds (2), ecuația viscozității lubrifiantului (8) și ecuațiile filmului evolventic (4), (5), (6) și (7). După cum se cunoaște, acest sistem de ecuații integrodiferențiale neliniare și parametrice, poate fi rezolvat numai numeric [2,3]. Pentru aceasta autorii au definit următorii parametrii adimensionali: $P = pi/\eta_0\omega_1$ presiunea adimensională; $X = x/r_{b1}$ abscisa adimensională; $Y = y/r_{b1}$ ordonata adimensională; $S = s/r_{b1}$ coordonată adimensională; $H = h/r_{b1}$ grosimea adimensională a filmului; $ALFA = \alpha\eta_0\omega_1/i$ coeficient piezoviscos adimensional; $FN = (F_n/b)i/(\eta_0\omega_1 r_{b1})$ sarcina specifică adimensională; $CE = \dfrac{1-\nu^2}{\pi E}\dfrac{\eta_0\omega_1}{i}$ constantă elastică adimensională.

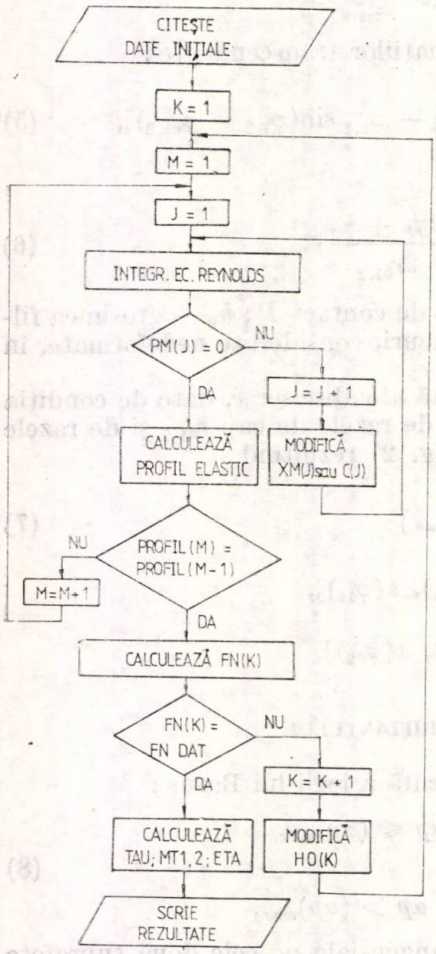


Fig. 3. — Organizarea programului EDH-E.

6. PROGRAMUL DE CALCUL NUMERIC EHD-E

Pentru obținerea unei soluții numerice a problemei EHD-E s-a elaborat un program numeric a cărui organigramă este prezentată în figura 3. În principiu programul este format din trei cicluri [7].

Ciclul K este ciclul de căutare a valorii necesare $HO(K)$ pentru realizarea sarcinii impuse FNDAT.

Ciclul M este ciclul de determinare a profilului deformat elastic. Pornind de la un profil inițial se integrează ecuația Reynolds, cu repartiția de presiune obținută calculîndu-se un profil deformat elastic final. Dacă cele două profile coincid se iese din ciclu, dacă nu ciclul se reia pînă la concordanța lor.

Ciclul J reprezintă ciclul de integrare a ecuației Reynolds. În cadrul lui se modifică fie abscisa $XM(J)$ a punctului de sfîrșit a zonei portante — în cazul unor condiții la limită Reynolds, fie constanta de integrare $C(J)$ — în cazul unor condiții la limită Somerfeld, pînă la realizarea condițiilor la limită.

7. STAREA DE EFORTURI DIN FLANC

Din punct de vedere practic, în afara repartiției de presiune, de eforturi tangențiale pe suprafață și de profilul filmului EHD-E prezintă interes și cunoașterea stării de eforturi din flancul dintelui pinionului respectiv al roții.

În determinarea componentelor tensorului eforturilor, dat de repartiția de presiune și de repartiția eforturilor tangențiale pe suprafața flancului, s-au admis ipotezele [1,2,7 ș.a]:

— dintele este un semispațiu elastic (dimensiunile zonei efective de contact sînt mult mai mici decît dimensiunile dintelui);

— starea de eforturi este o stare plană de deformații (lungimea zonei portante efective cu valori semnificative ale presiunii și ale eforturilor tangențiale este mult mai mică decît lățimea dintelui);
rezultînd [7] componentele tensorului eforturilor:

$$\sigma_{x1,2} = \mp \frac{2}{\pi} \int_{x_{min}}^{x_m} \frac{(x-t)^2 [(y - y_P \mp h_0/2)p(t) + (x-t)\tau_{1,2}(t)]}{[(x-t)^2 + (y - y_P \mp h_0/2)^2]^2} \, dt,$$

$$\sigma_{y1,2} = \mp \frac{2}{\pi} (y - y_P \mp h_0/2)^2 \int_{x_{min}}^{x_m} \frac{(y - y_P \mp h_0/2)p(t) + (x-t)\tau_{1,2}(t)}{[(x-t)^2 + (y - y_P \mp h_0/2)^2]^2} \, dt, \tag{9}$$

$$\sigma_{z1,2} = \nu_{1,2} (\sigma_{x1,2} + \sigma_{y1,2}),$$

$$\tau_{xy1,2} = \mp \frac{2}{\pi} (y - y_P \mp h_0/2) \int_{x_{min}}^{x_m} \frac{(x-t)[(y-y_P \mp h_0/2)p(t) + (x-t)\tau_{1,2}(t)]}{[(x-t)^2 + (y - y_P \mp h_0/2)^2]^2} \, dt,$$

$$\tau_{yz1,2} = \tau_{zx1,2} = 0.$$

Pentru determinarea numerică a componentelor tensorului eforturilor acestea au fost adimensionalizate în raport cu $\eta_0\omega_1/i$ și s-a elaborat un program de calcul numeric (programul EFORTURI). În cadrul acestui program se determină:

— componentele tensorului eforturilor în diverse puncte din substratul zonei de contact;

— eforturile principale și direcțiile principale;

— efortul echivalent dat de teoria efortului tangențial maxim și direcția acestuia;

— efortul echivalent dat de teoria energiei potențiale de variație a formei (Huber-Mises-Hencky);
putîndu-se astfel determina punctul de solicitare maximă din substratul flancului dintelui.

8. REZULTATE

Date inițiale

Geometria angrenajului: $z_1 = 14$; $z_2 = 21$; $m = 7$ mm; $a = 125$ mm; $b = 10$ mm; $x_1 = +0{,}393$; $x_2 = -0{,}010$; $\alpha_0 = 20°$.

Material: oțel 41MoCr11 STAS 791—80 îmbunătățit la $HB = 300$, avînd: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa și $\nu = 0{,}3$.

Sarcina: s-a ales $F_n/b = 19900$ N/mm corespunzătoare la $\sigma_{HC} = 250$ MPa.

Lubrifiant: ulei TIN 125 EP avînd: $\eta_0 = 0{,}1025$ Pas la $t_0 = 50°C$; exponentul temperatură-viscozitate $\beta = -0{,}04839\ °C^{-1}$; $\alpha = 2 \cdot 10^{-8} Pa^{-1}$; alegîndu-se [7] $(\alpha p)_{max} = 20$.

Parametrul viscozitate-viteză $\eta_0\omega_1/i$: s-a ales egal cu 6 Pa, valoare ce acoperă un domeniu al temperaturii de 50...70°C și un domeniu al turațiilor pinionului de 750...2500 rot/min.

Parametrii adimensionali. Cu datele de mai sus au rezultat: ALFA $= 12 \cdot 10^{-8}$; CE $= 8{,}276 \cdot 10^{-12}$ și FN $= 7{,}17 \cdot 10^4$.

Puncte de calcul pe segmentul de angrenare. Pentru determinarea variației parametrilor contactului EHD-E de-a lungul segmentului de angrenare s-au ales pe acesta (fig. 5) nouă puncte de calcul: trei (punctele 4,5 și 6) pe segmentul de angrenare unipară și șase (punctele 1,2,3,7,8 și 9) pe segmentele de angrenare bipară.

Repartiția de presiune, eforturi tangențiale și profilul interstițiului EHD-E.

În figura 4 este prezentat un rezultat tipic corespunzător contactului în polul angrenării.

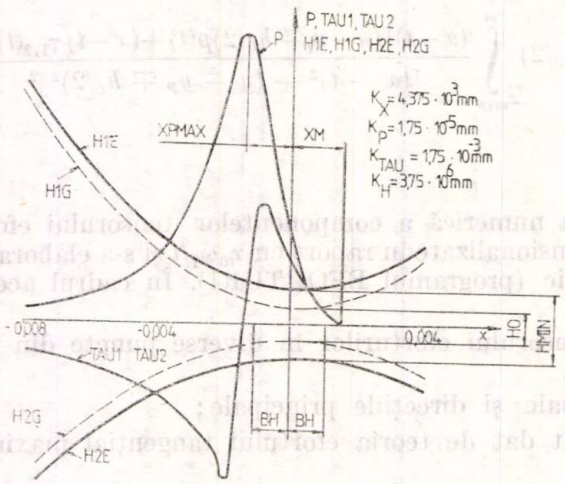


Fig. 4. — Zona centrală a contactului EDH-E pentru YP = 0.

Repartiția de presiune. Este tipic EHD dar fără vîrful de presiune de la sfîrșitul zonei portante, rezultat explicabil prin valoarea relativ ridicată a vitezei (parametrul vitezei, după Dowson [2] este $U = 6{,}5 \cdot 10^5$).

În ceea ce privește valoarea presiunii maxime (fig. 5) au rezultat valori de 1,7...5,1 ori mai mici decît presiunea hertziană, datorită lungimii mari a zonei portante (de ordinul a $10 \cdot b_H$), rezultat ce are evident un efect favorabil asupra stării de eforturi din flanc.

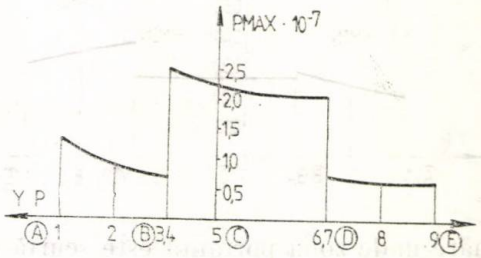


Fig. 5. — Variația presiunii maxime pe segmentul de angrenare.

Ca variație de-a lungul segmentului de angrenare (fig. 5) presiunea maximă scade de la intrarea (punctul A) spre ieșirea din angrenare (punctul E) (crește raza de curbură, deci zona portantă efectivă se lungește), presiunea maxim-maximorum apărînd la intrarea în zona de angrenare unipară (punctul 4), fapt confirmat de frecvența maximă de apariție a pittingului în această zonă.

Repartiția eforturilor tangențiale pe cele două flancuri este similară celei obținute de alți autori [1] (fig. 4), cele două eforturi TAU1,2 fiind practic egale și prezentînd o schimbare de semn în punctul maximului de

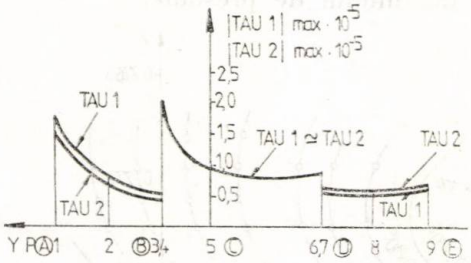


Fig. 6. — Variația eforturilor tangențiale maxime pe segmentul de angrenare.

presiune. Eforturile tangențiale maxime (fig. 6) urmăresc variația presiunii maxime (fig. 5) fiind însă, așa cum era de așteptat, cu două ordine de mărime mai mici.

Profilul filmului de lubrifiant (fig. 4). Este de tip EHD dar fără constricția de la ieșirea din zona portantă. Acest rezultat (ca și absența celui de-al doilea vîrf de presiune) poate fi explicat prin valoarea mare a vitezei.

Grosimea minimă a filmului. A rezultat mai mare (cu cel puțin 25%) decît cea calculată [7] pe baza relațiilor din literatura de specialitate [2,3,5 ș.a] deduse pentru contactul cilindru-plan sau cilindru-cilindru, rezultînd influența favorabilă a considerării geometriei și cinematicii evolventice.

Ca variație de-a lungul segmentului de angrenare (fig. 7) se remarcă, cum era de așteptat, o tendință inversă variației presiunii maxime și variației sarcinii specifice, grosimea minim-minimorum apărînd la intrarea

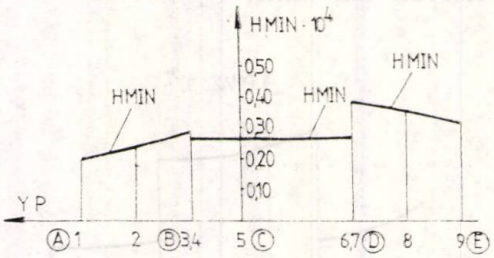


Fig. 7. — Variația grosimii minime pe segmentul de angrenare.

în angrenare unde zona portantă este scurtă și presiunea maximă relativ ridicată.

Starea de eforturi din flanc. Repartiția de eforturi s-a determinat pentru flancul pinionului fiind cunoscut că solicitarea maximă și frecvența maximă de apariție a pittingului apare la roata conducătoare. Din punct de vedere practic prezintă interes repartiția efortului echivalent (SE3 sau SE4) aceasta fiind decisivă pentru distrugerea superficială a danturii. Pe baza rezultatelor numerice a reieșit că între cele două eforturi echivalente nu există diferențe semnificative, rezultînd SE3 > SE4 dar cu cel mul 15...20%. În figura 8 s-a reprezentat, ca exemplu, starea de eforturt pentru punctul 8. Se remarcă faptul că punctul de solicitare maximă (cei prezintă interes pentru aprecierea solicitării flancului) este plasat la o adîncime relativ mare (aproximativ 2,24 ·BH) și are abscisa negativă, aproximativ egală cu cea a maximului de presiune.

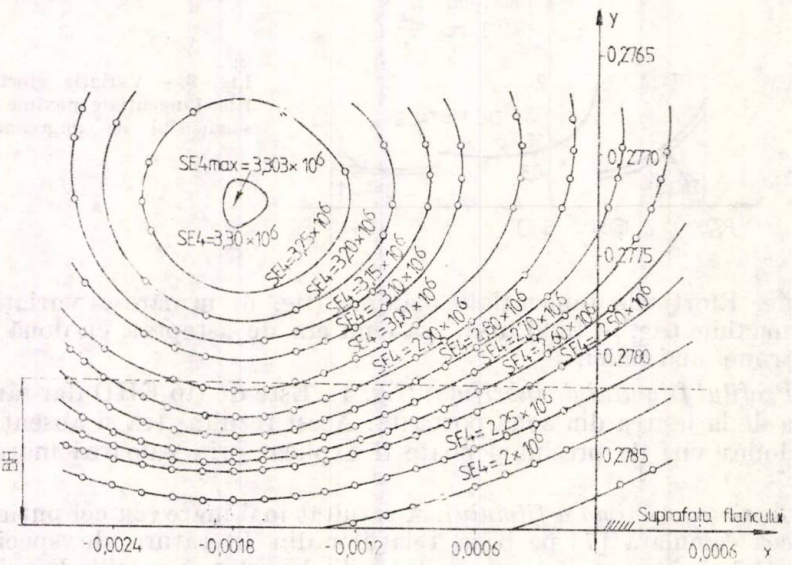


Fig. 8. — Starea de solicitare în flancul activ al pinionului pentru punctul 8.

Valorile maxime ale eforturilor echivalente. În figura 9 s-a reprezentat variația eforturilor echivalente maxime de-a lungul segmentului de angrenare. Se remarcă faptul că eforturile echivalente urmăresc variația

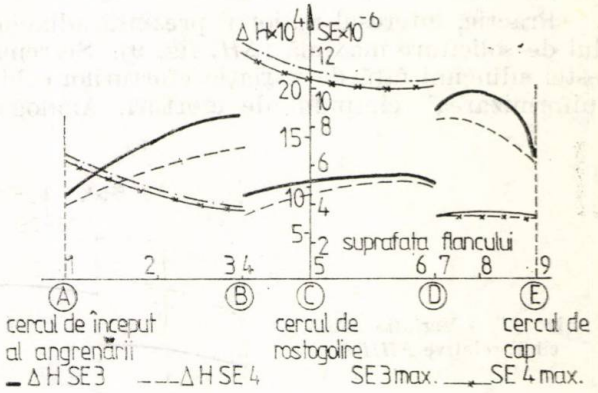


Fig. 9. — Eforturile echivalente maxime și adincimea lor în substrat.

presiunii maxime (fig. 5) și a efortului tangențial maxim (fig. 6), efortul maxim-maximorum apărînd la începutul angrenării unipare (punctul *B*), deci sub cercul de rostogolire, fapt ce se corelează cu frecvența maximă de apariție a pittingului în această zonă a flancului pinionului.

În ceea ce privește valoarea relativă a eforturilor echivalente maxime, acestea au fost comparate cu presiunea hertziană corespunzătoare punctului respectiv (raportul SE/PH) și cu presiunea hertziană corespunzătoare polului angrenării (raportul SE/PH5) (fig. 10).

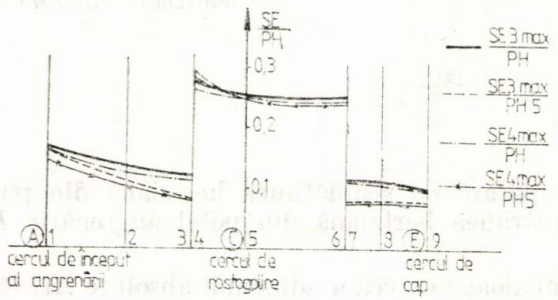


Fig. 10. —Variația rapoartelor *SE/PH*.

A rezultat o variație de același tip cu cea din figura 9 și o valoare maximă a raportului SE/PH de 0,298, mai mică decît cea rezultată din teoria contactului hertzian uscat (SE/PH = 0,6) fapt ce indică influența favorabilă a considerării tribosistemului evolventic real.

Valoarea unghiului ALFAE3, pe care îl face direcția efortului tangențial maxim cu axa *Ox*, a rezultat în toate cazurile mai mică de 45°, deci o înclinare spre ieșirea din zona portantă, înclinare dată evident de forța de frecare (efortul tangențial pe flanc).

Poziția punctului de solicitare maximă. Din analiza datelor obținute rezultă că între coordonatele punctului de efort echivalent $SE3_{max}$ și coordonatele punctului de efort echivalent $SE4_{max}$ nu există diferențe semnificative. De asemenea, a rezultat că abscisele XSE3 și XSE4 sînt foarte mici putîndu-se considera egale cu 0.

Practic, interesul major îl prezintă adîncimea de dispunere a punctului de solicitare maximă (ΔH, fig. 9). Se remarcă o variație inversă a acestei adîncimi față de variația eforturilor echivalente, justificabilă prin „uniformizarea" cîmpului de eforturi. Analog cu eforturile echivalente

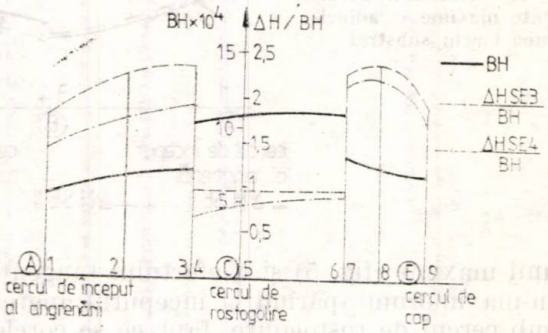


Fig. 11. — Variația adîncimii relative $\Delta H/BH$.

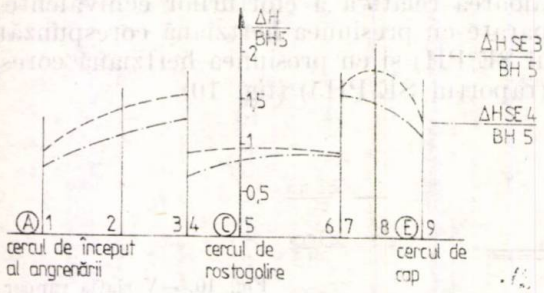


Fig. 12. — Variația adîncimii relative $\Delta H/BH5$.

adîncimea ΔH a fost comparată cu semilățimea hertziană din punctul considerat BH și cu semilățimea hertziană din polul angrenării $BH5$: (fig. 11 și fig. 12).

Au rezultat variații analoage cu cea a adîncimii absolute ΔH (fig. 9) și un domeniu de valori $\Delta H/BH = 0{,}64....2{,}5$, deci în majoritatea cazurilor valori mult mai mari decît cea dată de teoria contactului hertzian $\Delta H/BH = 0{,}6$. O explicație poate consta în faptul că presiunile maxime din filmul de lubrifiant sînt mai mici decît presiunea hertziană și că lungimea zonei portante efective este mult mai mare decît dublul semilățimii hertziene, deci sarcina exterioară este mult mai uniformă.

Adoptarea pentru proiectarea adîncimii de durificare superficială a acestor adîncimi relative este însă criticabilă, mai mult interes prezentînd cunoașterea adîncimii absolute de dispunere a punctului de solicitare maximă, pe baza unor diagrame de tipul celei din figura 9.

9. CONCLUZII

Considerînd geometria și cinematica reală a contactului evolventic format de două flancuri conjugate autorii au obținut o soluție a problemei EHD în cazul unei sarcini și a unei viteze relativ mari.

De asemenea, s-a determinat starea de eforturi din flancul dintelui pinionului, stare de eforturi produsă de repartiția de presiune și de repartiția de eforturi tangențiale.

Rezultatele care s-au obținut reflectă influența favorabilă a considerării tribosistemului evolventic real, atît asupra repartiției de presiune (valori maxime de 1,7...5,1 ori mai mici decît presiunea hertziană), cît și asupra grosimii minime a filmului de lubrifiant (cu cel puțin 25% mai mare decît cea calculată cu relațiile EHD „clasice").

În ceea ce privește repartiția eforturilor unitare din flanc au rezultat valori mai mici decît cele date de teoria contactului hertzian dar adîncimi de dispunere mai mari.

Utilizînd diagramele de variație de-a lungul segmentului de angrenare a eforturilor echivalente maxime și a adîncimii de dispunere a acestora se pot optimiza parametrii stratului durificat la danturi cementate sau nitrurate, iar în viitor se pot pune bazele unei noi metodici de calcul la oboseală superficială a angrenajelor, metodică bazată pe starea reală de solicitare din flanc.

Primit la redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. I. CZYZEWSKI, *Changes in the Stress Field in EHD Contact due to some Operating Factors*, Wear, 31 (1975).
2. D. DOWSON, G. R. HIGGINSON, *Elasto-Hydrodinamic Lubrication*, Pergamon Press, London, 1966.
3. D. S. KODNIR, *Kontactnaia Ghidrodinamica Smaski Detalei Mașin*, Mașinostroienie, Moscova, 1976.
4. GH. MANEA, *Organe de mașini*, Edit. Tehnică, București, 1970.
5. D. PAVELESCU, M. MUȘAT, A. TUDOR, *Tribologie*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.
6. M. RAȘEEV, *Rezolvarea problemei EHD pentru contactul a două flancuri evolventice*, Tribotehnica, 1984, Iași.
7. M. RAȘEEV, *Contribuții asupra influenței ungerii și a forței de frecare asupra stării de eforturii și uzării roților dințate metalice cu dinți drepți*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1986.
8. R. WAYNE ADKINS, E. RADZIMOVSKY, *Lubrication Phenomena in Spur Gears : Capacity, Film Thickness Variation and Efficiency*, Trans. of ASME, Series D. J. of Basic Eng., **87**, 3 (1965).

ASUPRA CALCULULUI STRUCTURILOR ÎN FORMULARE PROBABILISTĂ CU METODA ELEMENTELOR FINITE *)

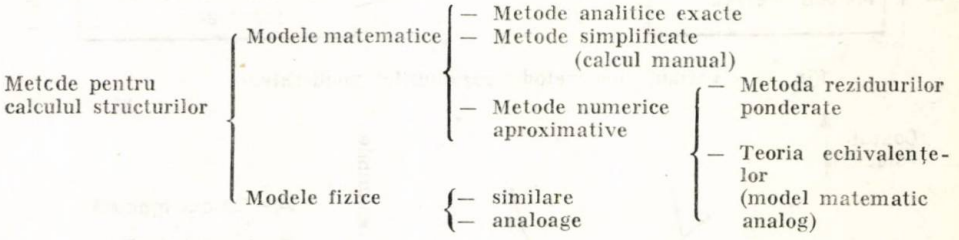
de C. BOB

Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Lucrarea se referă la proiectarea structurilor de rezistenţă prin folosirea metodei elementelor finite, în condiţiile abordării probabiliste a calculului static şi dimensionării elementelor structurale.
După prezentarea unor probleme generale privind calculul structurilor şi a unor date referitoare la evaluarea statistică a caracteristicilor construcţiilor, este abordat aspectul calculului static pe baze probabiliste, fiind dat, mai în detaliu, un procedeu original de abordare a acestei probleme. Se fac, de asemenea, referiri de principiu şi detaliu privitoare la dimensionarea probabilistă a elementelor structurale. În ultimul paragraf al lucrării sînt redate două exemple numerice de aplicare, din care sînt evidenţiate avantajele calculului probabilist al structurilor.

1. PROBLEME GENERALE

Calculul structurilor de rezistenţă presupune atît determinarea eforturilor şi deplasărilor produse de acţiunile statice şi dinamice, cît şi verificarea stabilităţii structurilor respective. În decursul timpului, metodele pentru calculul structurilor au evoluat, o clasificare generală fiind redată în următoarea schemă :



Modelele matematice se bazează pe o formulare diferenţială, variaţională sau integrală : formularea diferenţială necesită integrarea unor ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale în concordanţă cu condiţiile de margine ; formularea variaţională conţine funcţii care extremează o funcţională în aceleaşi condiţii de margine ; formularea integrală se bazează pe teorema reciprocităţii lucrului mecanic, rezultînd ecuaţii integrale pe frontiera domeniului de definiţie.

Metodele analitice exacte, dezvoltate foarte mult la sfîrşitul secolului trecut şi în prima jumătate a acestui secol, au un domeniu restrîns de aplicabilitate întrucît este dificil de a găsi funcţii care să descrie comportarea structurii în întregime.

*) Programele şi exemplele de calcul au fost efectuate împreună cu dr. ing. Valeriu Stoian.

Metodele simplificate de calcul al structurilor au avut, pînă în prezent, cea mai mare pondere în proiectarea construcţiilor. Pentru rezolvarea structurilor mai complicate, prin calcul manual se acceptă simplificări referitoare la : eliminarea unor legături de importanţă mai redusă, fracţionarea în structuri mai simple, neglijarea unor conlucrări spaţiale şi reducerea la sisteme plane, considerarea unei comportări elastice a materialelor etc. Un procedeu care s-a bucurat de un mare succes în rîndul proiectanţilor a fost cel prin utilizarea iteraţiei, efectuată pe scheme de transmiteri, mai ales pentru structurile liniare.

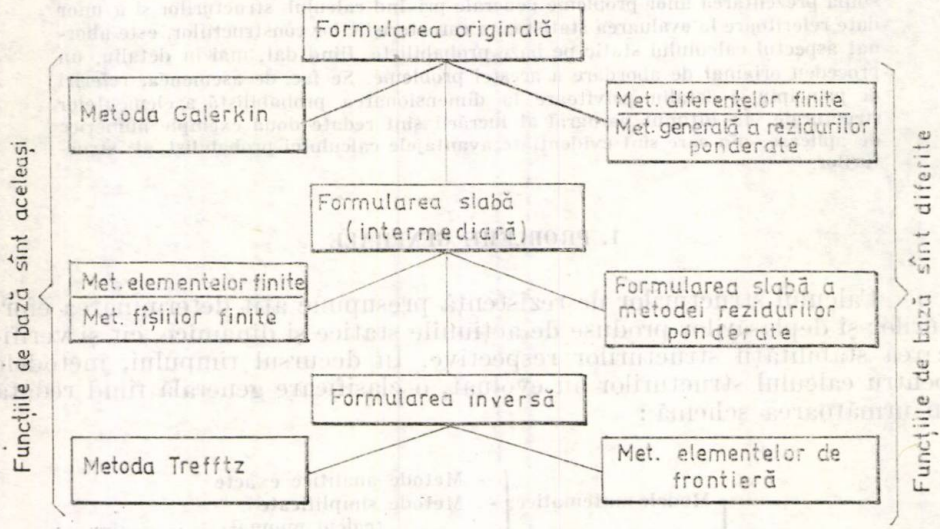


Fig. 1. — Variante ale metodei reziduurilor ponderate.

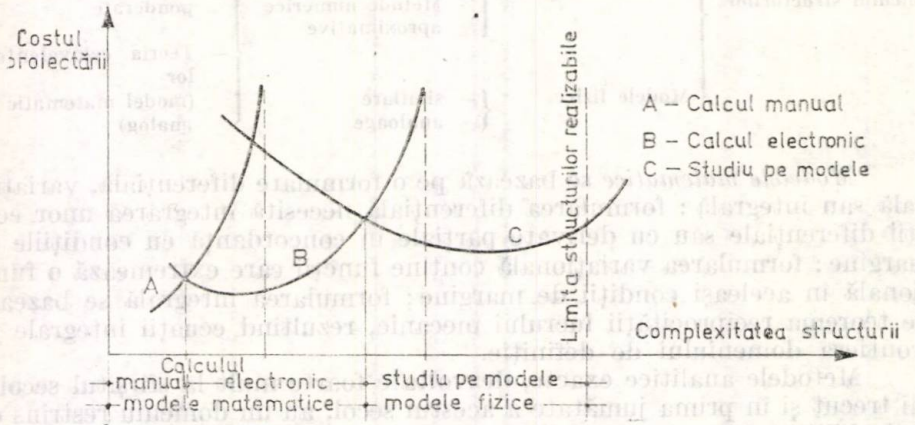


Fig. 2. — Corelaţia costul proiectării — complexitatea structurii.

Metodele numerice, care oferă soluţii aproximative, s-au dezvoltat foarte mult în ultimele decenii odată cu răspîndirea calculului automat. Există, astăzi, numeroase procedee şi variante de metode numerice, metoda reziduurilor ponderate fiind cea mai răspîndită, aşa cum rezultă din clasificarea din figura 1, datorată lui Brebbia [3].

Modelele fizice presupun determinarea eforturilor și deplasărilor din structuri prin metode experimentale. Studiul structurilor prin încercarea de modele similare datează de la începutul secolului XX, fiind foarte indicat pentru structuri de forme și alcătuiri complexe cît și în cazul folosirii unor materiale de construcții cu proprietăți care se îndepărtează de ipotezele comportării elastice. Modelele analoage se bazează pe identitatea formei matematice a unor fenomene care fac parte din domenii diferite ale fizicii; la încercările experimentale, o largă răspîndire are tensometria electrică, care se caracterizează prin analogia dintre legea lui Hooke și legea lui Ohm.

La alegerea uneia sau a alteia dintre metodele pentru calculul structurilor este necesar a se avea în vedere corelația complexității structurii — costul proiectării, așa cum rezultă din figura 2.

2. EVALUAREA STATISTICĂ A CARACTERISTICILOR CONSTRUCȚIILOR

Dacă x este o variabilă aleatoare, iar $\bar{x}$ este valoarea medie sau speranța matematică a variabilei aleatoare, atunci se numește variabilă aleatoare centrată asociată lui x, expresia $\tilde{x} = x - \bar{x}$, iar $x_{(1)} = \tilde{x}/s$ se numește variabilă aleatoare centrată și normată. În expresia de mai sus $s(x) = \sqrt{s^2(x)}$ este abaterea medie patratică (standard) a variabilei aleatoare x, iar $s^2(x)$ este dispersia variabilei.

Pentru caracteristicile geometrice cît și pentru rezistențele mecanice ale materialelor, distribuția normală este cea mai utilizată fiind confirmată de multe valori experimentale; se mai utilizează uneori și distribuția lognormală.

Dacă se reprezintă distribuția normală într-un sistem de axe de coordonate cu originea în abscisa corespunzătoare mediei ($\bar{x} = 0$), se obține repartiția normală care are dispersia egală cu 1.

Fractilii superiori, respectiv inferiori, ai variabilei aleatoare x sînt definiți de probabilitatea p prin

$$\begin{aligned} P(x \leqslant x_p) &= p, \\ P(x > x_p) &= 1 - P(x \leqslant x_p) = 1 - p. \end{aligned} \tag{1}$$

Pentru repartițiile de frecvențe curent folosite se poate scrie următoarea relație pentru calculul fractililor;

$$x_p = x_{max,min} = \bar{x} \pm \gamma s = \bar{x}(1 \pm \gamma v), \tag{2}$$

în care γ este un parametru care se scoate din tabele în funcție de probabilitatea dată p; $v = s/\bar{x}$ — coeficientul de variație.

Spre exemplu, pentru o probabilitate de 5%, caracteristică definirii rezistenței minime la compresiune a betonului — clasa betonului — se obține:

$$x_{min} = \bar{x} - 1{,}645\, s = \bar{x}\,(1 - 1{,}645\, v). \tag{3}$$

Din cele de mai sus rezultă că fractilii prin care se face evaluarea statistică a caracteristicilor geometrice și rezistențelor materialelor se compun din doi termeni : valoarea medie $\bar{x}$ și valoarea centrată $\tilde{x}_p$,

$$x_{max,min} = \bar{x} \pm \tilde{x}_p. \tag{4}$$

Evaluarea statistică a încărcărilor se face, în mod curent, prin calculul fractililor x_p ai distribuției Gumbel pentru maxime (se mai folosește și distribuția Frechet pentru maxime), definiți de probabilitatea p în funcție de media $\bar{x}$ și abaterea standard s ;

$$x_p = \bar{x} + \gamma_g s = \bar{x}(1 + \gamma_g v) = \bar{x} + \tilde{x}_p, \tag{5}$$

în care [5]

$$\gamma_g = -0{,}78 \ln\ln\frac{1}{p} - 0{,}45 = \frac{-\ln\ln\dfrac{1}{p}}{1{,}282} - 0{,}45, \tag{6}$$

fiind dat în tabele în funcție de probabilitatea p. Cum acțiunile de tipul celor climatice (vînt, zăpadă, variații de temperatură) și seismice se caracterizează prin perioade medii de revenire $\bar{T}$, atunci

$$p = 1 - 1/\bar{T} \text{ și } \gamma_t = \frac{-\ln\ln\dfrac{1}{1 - 1/\bar{T}}}{1{,}282} - 0{,}45 \tag{7-8}$$

și deci

$$x_{\bar{T}} = \bar{x} + \gamma_t s. \tag{9}$$

Cînd una sau mai multe dintre acțiuni se aplică pe structură de mai multe ori (de N_i ori) în decursul existenței acesteia, atunci valoarea încărcării $x_{i,N}$ și coeficientul de variație $v_{i,N}$ corespunzător se pot calcula cu valorile rezultate din distribuția Gumbel pentru maxime ;

$$x_{iN} = x_{ip}[1 + 0{,}78\ (\ln N_i)\ v_i], \tag{10}$$

și

$$v_{i,N} = \frac{v_i}{[1 + 0{,}78(\ln N_i)v_i]}. \tag{11}$$

Dacă solicitările provin din mai multe acțiuni, aplicate simultan asupra structurii și avînd natură fizică distinctă, atunci efectele acestora se obțin prin însumare algebrică [5],

$$\bar{x} = \bar{x}_{1N} + \bar{x}_{2N} + \ldots + \bar{x}_{iN}, \tag{12}$$

$$v = \frac{\sqrt{(\bar{x}_1 v_1)^2 + (\bar{x}_2 v_2)^2 + \ldots + (\bar{x}_i v_i)^2}}{\bar{x}_{1N} + \bar{x}_{2N} + \ldots + \bar{x}_{iN}}. \tag{13}$$

3. CALCULUL STATIC PE BAZE PROBABILISTE

Modelarea probabilistă a calculului static al structurilor se bazează, în principal, pe două metode [5]:

— metoda schimbării variabilelor, care se bazează pe o transformare de variabile din spațiul variabilelor cauză în spațiul variabilelor efect, transformare efectuată cu ajutorul operatorului Jacobian;

— metoda aproximativă sau a momentelor, bazată pe dezvoltarea ecuației cauză — efect în serie Taylor multidimensională în jurul mediilor variabilelor cauză. Această metodă, folosită în continuare, permite determinarea indicatorilor statistici de localizare și împrăștiere ai variabilei efect în funcție de indicatorii corespunzători ai variabilelor cauză. Metoda nu depinde de forma repartiției variabilelor aleatoare efect și nici de cea a repartițiilor variabilelor aleatoare cauză.

Sobolev și Kin [6] prezintă calculul probabilist al unei grinzi rezemate pe mediu elastic prin metoda elementelor finite. Autorii ajung la concluzia că vectorul deplasărilor necunoscute se obține prin însumarea vectorului valorilor medii și vectorilor aleatori, proveniți din încărcare și din matricea de rigiditate.

Pentru efectuarea calculelor, vectorul deplasărilor se liniarizează prin dezvoltare în serie Taylor în vecinătatea mediei aritmetice, fiind luați în considerare numai doi termeni întrucît dispersiile mărimilor aleatoare nu sînt mari. În consecință, rezultă

$$\{\delta\} = \{\bar{\delta}\} + \{\tilde{\delta}\}_F + \{\tilde{\delta}\}_k, \tag{14}$$

în care

$$\{\bar{\delta}\} = [\bar{K}]^{-1}\{\bar{F}\}, \tag{15}$$

este componenta valorilor medii ale vectorului deplasărilor,

$$\{\tilde{\delta}\}_F = \sum_{e=1}^{m} [\bar{K}]^{-1} \frac{\partial\{F\}}{\partial \tilde{x}_F^e} \tilde{x}_F^e \tag{16}$$

este componenta aleatoare a vectorului deplasărilor provenind din încărcare, unde m reprezintă numărul de elemente finite în care este discretizată structura; $\tilde{x}_F^e$ — variabila aleatoare centrată caracteristică încărcării și referitoare la elementul finit e;

$$\{\tilde{\delta}\}_k = \sum_{e=1}^{m} [\bar{K}]^{-1} \frac{\partial[K]}{\partial \tilde{x}_K^e} \{\bar{\delta}\} \tilde{x}_K^e \tag{17}$$

este componenta aleatoare a vectorului deplasărilor provenind din matricea de rigiditate.

O altă abordare, în formulare probabilistă, pentru calculul static al deplasărilor și eforturilor secționale cu metoda elementelor finite este prezentată în continuare, pe baza unui studiu propriu [2].

Ecuația generală de echilibru, neluînd în considerare matricele forțelor distribuite și a celor date de deformațiile inițiale, se scrie:

$$([\bar{K}] \pm [\tilde{K}]_p)\{\delta\} = (\{\bar{F}\} + \{\tilde{F}\}_p), \tag{18}$$

în care $[\bar{K}]$ și $\{\bar{F}\}$ sînt matricea de rigiditate și vectorul forțelor pentru întreaga structură, definiți de valorile medii (speranța matematică); $[\tilde{K}]_p$ și $[\tilde{F}]_p$ — matricea de rigiditate și vectorul forțelor, definite de valoarea centrată, adică ca fractili.

Vectorul deplasărilor necunoscute va rezulta:

$$\{\delta\} = ([\bar{K}] \pm [\tilde{K}]_p)^{-1} (\{\bar{F}\} + \{\tilde{F}\}_p). \tag{19}$$

Se constată că în ecuațiile deterministe au fost introduși fractili ai variabilelor individuale. În acest fel se violează esența fizică a ecuațiilor, dar procedeul este avantajos pentru calculele practice prin aceea că se folosesc algoritmii de calcul din metoda deterministă. De asemenea, dă posibilitatea ca în calcul să fie considerați ca avînd caracter probabilist numai anumiți parametri, care pot avea indicatori statistici de localizare și împrăștiere diferiți pentru diverse elemente finite sau tipuri de deplasări.

Pentru exemplificarea modului de calcul se consideră matricea de rigiditate a unei bare dublu încastrate în modelul de deplasări [1]. Se presupune, în cazul cel mai general, că toți termenii matricei de rigiditate sînt aleatori. Indicatorii statistici de localizare și împrăștiere sînt: mediile aritmetice $\bar{E}$, $\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{l}$; abaterile medii patratice s_E, s_A, s_I, s_l; coeficienții de variație v_E, v_A, v_I, v_l. Pentru a se determina componentele matricei de rigiditate, fiecare termen al matricei se consideră ca funcție aleatoare, care se liniarizează prin dezvoltare în serie Taylor (Mac Laurin) în punctul de medie, fiind reținuți, de asemenea, numai primii doi termeni.

Pentru matricea de rigiditate a barei dublu încastrate se vor scrie, spre exemplificare, doi termeni, structura celorlalți fiind identică. În conformitate cu cele arătate și cu relațiile (1) și (3) fiecare termen al matricei de rigiditate are două componente, astfel (se renunță, pentru simplitatea scrierii, la indicele p):

$$k_{11} = \frac{EA}{l} = \bar{k}_{11} \pm \tilde{k}_{11}, \tag{20}$$

în care

$$\bar{k}_{11} = \bar{E}\bar{A}/\bar{l} \text{ și } \tilde{k}_{11} = \bar{k}_{11}\gamma v_{11}. \tag{21,22}$$

Pentru calculul variabilelor aleatoare centrate, care definesc matricea de rigiditate, se vor utiliza indicatorii statistici ai funcțiilor aleatoare (formule exacte și respectiv calculul aproximativ) date în [5]. În consecință, coeficientul de variație rezultă:

$$v_{11} = \sqrt{v_E^2 + v_A^2 + v_l^2}. \tag{23}$$

Pentru termenul k_{22} al matricei de rigiditate a barei dublu încastrate rezultă:

$$\bar{k}_{22} = 12\,\bar{E}\bar{I}/\bar{l}^3, \quad \tilde{k}_{22} = \bar{k}_{22}\gamma v_{22} \tag{24,25}$$

și

$$v_{22} = \sqrt{v_E^2 + v_I^2 + (3v_l)^2}. \tag{26}$$

În mod asemănător se scriu și restul termenilor matricei de rigiditate.

Vectorul forțelor care acționează la nodurile structurii poate să fie compus din mai multe acțiuni, aplicate simultan asupra structurii și avînd natură fizică distinctă. Efectele acestor acțiuni se obțin prin însumare în conformitate cu relațiile (12) și (13) sau în conformitate cu principiile de grupare a încărcărilor, date în normele actuale.

Cu deplasările necunoscute ale nodurilor, stabilite pe baza relației (19), se pot deduce eforturile secționale (momente încovoietoare, forțe axiale și tăietoare) din relațiile care definesc matricea de rigiditate [1].

Analiza probabilistă sau stohastică a comportării unei structuri se poate face și prin aplicarea metodei Monte-Carlo, care poate fi definită ca metoda modelării variabilelor aleatoare în scopul calculării caracteristicilor repartițiilor lor. Numele și evoluția semnificativă ale metodei se datoresc (1944) lui J. von Neuman și S. Ulam. Rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare, așa cum sînt și cele rezultate prin aplicarea metodei elementelor finite, se poate face prin asocierea la sistemul de ecuații a unui „lanț Markov" cu n stări [4]. Dacă ξ_N este variabila aleatoare, definită pe traiectoriile de lungime N ale lanțului Markov, atunci metoda Monte-Carlo constă în calcularea valorilor medii ale variabilei aleatoare ξ_N după traiectoriile lanțului. Cum metoda este foarte cunoscută și aplicată, nu face obiectul prezentei lucrări.

4. DIMENSIONAREA PROBABILISTĂ A SECȚIUNILOR ELEMENTELOR STRUCTURALE

a) *Metodele actuale* de dimensionare a secțiunilor elementelor structurale au un caracter semiprobabilist și constau, în esență, în : definirea probabilistă atît a rezistențelor caracteristice (normate) ale materialelor, cît și a încărcărilor caracteristice (normate) prin considerarea fractililor corespunzători ; stabilirea semiprobabilistică a rezistențelor de calcul și încărcărilor de calcul prin afectarea valorilor caracteristice (normate) cu coeficienți stabiliți determinist ; stabilirea, pe baza cunoștințelor din rezistența materialelor, a efortului secțional care caracterizează capacitatea portantă de calcul M_r^c și calculul, prin metodele staticii construcțiilor, a efortului secțional M_a^c, dedus cu valorile de calcul ale încărcărilor. Condiția de siguranță în metodele semiprobabiliste este

$$M_a^c \leqslant M_r^c. \tag{27}$$

b) *Dimensionarea probabilistă* a secțiunii elementelor se poate face pe baza analizei siguranței pe modele moment de ordinul doi [5]. În baza acestei teorii se introduce noțiunea de indicator de reliabilitate β_E, care se poate scrie în funcție de coeficientul de siguranță C_0, coeficientul de variație al rezistenței secțiunii analizate v_r și coeficientul de variație al acțiunilor v_a. Prin neglijarea unor valori mici, coeficientul de siguranță se scrie în funcție de indicatorul de reliabilitate și coeficienții de siguranță :

$$C_0 = \frac{1 + \beta_E \sqrt{v_r^2 + v_a^2}}{1 - (\beta_E v_r)^2}, \tag{28}$$

în care β_E se scoate din tabele [5] în funcție de probabilitatea de cedare P_c, care are următoarele valori în funcție de importanța construcției:

construcții de importanță excepțională: $P_c = 10^{-8} \ldots 10^{-10}$;
construcții de importanță deosebită: $P_c = 10^{-6} \ldots 10^{-8}$;
construcții de importanță medie: $P_c = 10^{-5} \ldots 10^{-6}$;
construcții de importanță secundară: $P_c = 10^{-3} \ldots 10^{-5}$;
construcții neimportante: $P_c = 10^{-2} \ldots 10^{-3}$.

Pentru o încărcare statică x^a, caracterizată prin probabilitatea $P^a = 1 - p^a$, astfel încît efectul ei să fie mai mare decît cel al capacității portante x^r, caracterizată prin probabilitatea p^r, probabilitatea de cedare P_c este definită de

$$P_c = P(x^a > x^r) = \Sigma[P(x^a > x) \cdot P(x < x^r \leqslant x + \mathrm{d}x)] = \int_{-\infty}^{\infty} P^a \, \mathrm{d}p^r. \quad (29)$$

Corelația indicator de reliabilitate — coeficient de siguranță s-a scris pentru modelul diferență sau Rjanitin-Cornell; se mai utilizează și alte modele inginerești ca Ditlevsen sau raport, Freudenthal-Rosenblueth sau logaritmic.

Ecuația de dimensionare a unei secțiuni caracteristice, aparținînd unei structuri de beton armat, are forma generală:

$$M_r = C_0 M_a, \quad (30)$$

în care M_r este efortul secțional (moment încovoietor, forța axial) care caracterizează capacitatea portantă (rezistența) secțiunii respective; M_a — efortul secțional calculat din toate acțiunile care solicită structura studiată. De precizat că M_r și respectiv M_a se calculează cu valorile medii ale rezistențelor și încărcărilor; rezultă că se face un calcul static pe baze deterministe. Această metodă este cea mai modernă în analiza siguranței structurilor, avînd avantajul efectuării unui calcul mai precis, cu implicații economice favorabile, reduceri de consumuri specifice de materiale la construcții mai puțin importante, iar în cazul construcțiilor deosebite un grad de siguranță sporit. Un dezavantaj al metodei este acela că nu se ține seama, explicit, de variabilitatea unor caracteristici geometrice și fizice ale structurii, care apar în calculul static.

c) *Metoda probabilistă a fractililor* se bazează pe aceeași formă a condiției de siguranță ca și în metodele semiprobabilistice, adică

$$M_a^k \leqslant M_r^k. \quad (31)$$

Deosebirea constă în aceea că se elimină coeficienții stabiliți determinist. În relația (31), M_a^k este efortul secțional rezultat din calculul static efectuat pe baze probabiliste, cu acțiuni luate ca fractili care țin seama și de efectul de repetare. În consecință se poate renunța la coeficientul determinist de supraîncărcare care ține seama de supraîncărcări, inexactități de execuție, simplificări în ipotezele analizei structurale, erori geometrice etc. M_r^k este efortul secțional care caracterizează capacitatea portantă (rezistența) și se calculează cu rezistențele caracteristice ale materialelor, astfel încît să fie inclus și coeficientul determinist specific rezis-

tenței ; spre exemplu la beton se va calcula fractilul rezistenței considerînd o probabilitate de 0,5% și nu 5% cît se ia în metodele semiprobabiliste. De altfel, variabilitatea calității betonului din structură, de care ține seama coeficientul determinist, este luată în considerare și prin calculul static prin intermediul matricei de elasticitate (modulul de elasticitate).

Principalul dezavantaj al metodei propuse este acela că prin folosirea fractililor nu se mai respectă tipurile repartițiilor variabilelor componente. De asemenea, sînt necesare studii viitoare privind precizarea altor detalii de aplicare a procedeului propus.

5. EXEMPLE DE CALCUL

5.1. CALCULUL STATIC ȘI DIMENSIONAREA SECȚIUNILOR

Pentru a se pune în evidență influența considerării probabiliste a matricei de rigiditate asupra variației eforturilor și deplasărilor, s-a rezolvat cadrul din figura 3 ; încărcările s-au presupus deterministe cu valori caracteristice. Rezultatele calculului sînt prezentate în tabela 1 și figura 3,

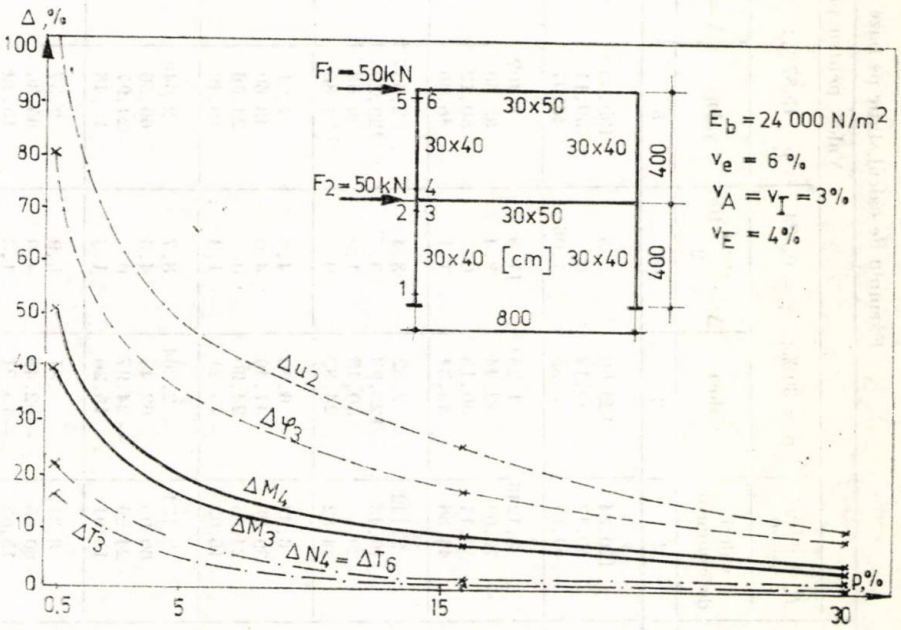


Fig. 3. — Exemplu de calcul static pe baze probabiliste.

din care se constată următoarele : cele mai mari diferențe față de calculul determinist le au deplasările și apoi momentele încovoietoare ; diferențele procentuale ale deplasărilor și eforturilor nu variază liniar cu probabilitatea p ; în anumite secțiuni forțele tăietoare și axiale nu se modifică prin considerarea probabilistă a matricei de rigiditate.

Tabela 1

Exemplu de calcul static pe baze probabiliste

Secțiunea	Eforturi-deplasări	Valori pentru probabilitățile p: $p = 50\%$; $\gamma = 0$	$p = 30\%$; $\gamma = 0{,}524$		$p = 15{,}87\%$; $\gamma = 1{,}0$		$p = 5\%$; $\gamma = 1{,}645$		$p = 0{,}5\%$; $\gamma = 2{,}576$	
		valori deterministe	valori	$\Delta = \frac{3-2}{2}100$	valori	$\Delta = \frac{5-2}{2}100$	valori	$\Delta = \frac{7-2}{2}100$	valori	$\Delta = \frac{9-2}{2}100$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	M, kNm	120,84	125,09	3,5	130,05	7,6	139,32	15,3	162,93	34,8
	T, kN	50,13	50,12	0	50,11	0	50,10	0	50,09	0
	N, kN	−44,87	−45,35	1,06	−46,07	2,7	−47,71	6,3	−53,10	18,3
2	u, cm	1,1248	1,254	11,5	1,402	24,6	1,675	48,9	2,35	108,9
	M, kNm	79,69	82,44	3,4	85,60	7,4	91,44	14,7	105,93	32,8
	T, kN	−50,14	−50,13	0	−50,12	0	−50,11	0	−50,09	0
	N, kN	44,86	45,34	1,1	46,06	2,7	47,70	6,3	53,09	18,3
3	φ,...10^{-3}rad	−2,142	−2,32	8,4	−2,537	18,7	−2,914	35,9	−3,835	80,4
	M, kNm	−119,48	−123,93	3,7	−129,20	7,9	−139,27	16,6	−165,97	38,9
	T, kN	−29,85	−30,15	1,0	−30,58	2,4	−31,58	5,8	−34,83	16,7
	N, kN	24,82	24,83	0	24,86	0	24,85	0	24,88	0
4	v,...10^{-3}cm	6,33	6,60	4,3	7,01	10,7	7,74	22,3	9,53	50,6
	M, kNm	39,78	41,49	4,0	43,60	9,6	47,85	20,3	60,03	50,6
	T, kN	24,95	24,96	0	24,96	0	24,96	0	24,97	0
	N, kN	−15,02	−15,21	1,3	−15,49	3,1	−16,14	7,5	−18,28	21,7
5	u, cm	2,174	2,364	8,7	2,649	21,8	3,179	46,2	4,53	108,4
	M, kNm	60,05	62,45	4,3	65,36	8,8	71,08	18,4	86,97	44,8
	T, kN	−24,96	−24,97	0	−24,97	0	−24,97	0	−24,98	0
	N, kN	15,01	15,20	1,3	15,48	3,1	16,13	7,5	18,27	21,7
6	v,...10^{-3}cm	8,317	8,81	5,9	9,37	12,6	10,36	24,5	12,806	53,8
	M, kNm	−60,05	−62,45	4,0	−65,36	8,8	−71,08	18,4	−86,97	44,8
	T, kN	−15,02	−15,21	1,3	−15,49	3,1	−16,14	7,5	−18,28	21,7
	N, kN	25,04	25,03	0	25,03	0	25,03	0	25,02	0

Dimensionarea cu metodele semiprobabiliste, folosite actualmente în proiectare, s-a făcut pentru secțiunea 3 a cadrului din figura 3. Întrucît forțele axiale sînt mici, dimensionarea s-a făcut la momentul încovoietor, rezultat pentru $\gamma = 0$, dar multiplicat cu un coeficient global de supraîncărcare de 1,2. Pentru un beton de clasa BC15 (B 200) și un oțel OL37, au rezultat un procent și o arie de armătură conform tabela 2.

Tabela 2

Exemple de dimensionare a secțiunilor

Metoda de dimensionare	Valori ale procentelor și ariilor de armare, în secțiunea 3, din figura 3		
Semiprobabilistă		$\mu = 1{,}22\ \%$;	$A_a = 17\ cm^2$
Probabilistă – modele moment de ordinul doi	$P_c = 10^{-2}$;	$\mu = 1{,}035\ \%$;	$A_a = 14{,}44\ cm^2$
	$P_c = 10^{-4}$;	$\mu = 1{,}32\ \%$;	$A_a = 18{,}35\ cm^2$
	$P_c = 10^{-6}$;	$\mu = 1{,}61\ \%$;	$A_a = 22{,}46\ cm^2$
Probabilistă a fractililor	$p = 5\ \%$;	$\mu = 1{,}018\ \%$;	$A_a = 14{,}01\ cm^2$
	$p = 5^0/_{00}$;	$\mu = 1{,}25\ \%$;	$A_a = 17{,}57\ cm^2$

Dimensionarea probabilistă pe modele moment de ordinul doi s-a făcut considerînd următoarele valori ale forțelor orizontale: valorile medii $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 31$ kN; fractili în cazul aplicării forțelor de mai multe ori $F_{1,N} = F_{2,N} = 51{,}77$ kN. Momentul încovoietor în secțiunea 3 s-a luat cel pentru $\gamma = 0$ și corespunzător valorii de 51,77 kN a forțelor.

Momentul încovoietor reprezentînd capacitatea portantă (rezistența) secțiunii 3 este

$$M_r = \bar{A}_0 \bar{\sigma}_0 (\bar{h}_0 - 0{,}5\,\bar{x}) \cong 0{,}9\,\bar{h}_0 \bar{\sigma}_0 \bar{A}_a.$$

Pentru OB37 rezultă $\bar{\sigma}_c = 285\ \mathrm{N/mm^2}$ și $v_0 = 0{,}09$, iar $v_{h0} = v_1 = 0{,}06$, de unde

$$M_r = 119273\,\bar{A}_a,\ \mathrm{Nmm} \text{ și } v_r = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}09^2} = 0{,}106.$$

Coeficientul de variație al acțiunilor, considerînd că dimensionarea se face la diverse combinații, s-a luat cu valoarea $v_a = 0{,}08$. Rezultatele calculului în baza relațiilor (28) (30) sînt date în tabela 2.

Calculul prin metoda probabilistă a fractililor s-a făcut cu valorile momentelor încovoietoare din tabela 1, pentru probabilitățile $p = 5\%$ și $p = 0{,}5\%$, dar corespunzînd fractililor forțelor $F_{1,N} = F_{2,N} = 51{,}77$ kN. Ca rezistență a betonului s-a considerat rezistența caracteristică corespunzătoare unei probabilități de 0,5% ($\gamma = 2{,}576$), rezultînd pentru BC15, $R_{cR} = 11{,}13\ \mathrm{N/mm^2}$. Rezultatele sînt date, de asemenea, în tabela 2.

Din datele prezentate în tabel se constată că s-au obținut valori apropiate prin cele trei metode (pentru $P_c = 10^{-4}$ și $p = 0{,}5\%$ în ultimele două metode). Se observă, de asemenea, că în metodele probabiliste există posibilitatea unei dimensionări variate, funcție de importanța construcției.

5.2. CALCULUL LA STABILITATE

Calculul probabilist la stabilitate al cadrului din figura 4 s-a făcut în concordanță cu cele prezentate la punctul 3, rezultatele acestui calcul fiind redate în tabela 3. Calculele au fost făcute pentru două variante: varianta A care a presupus fibra medie a stîlpilor nedeformată; varianta B la care s-a presupus că ambii stîlpi au o deformată inițială, la vîrf, de

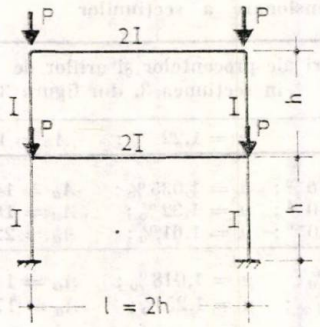


Fig. 4. — Exemplu de cadru calculat la stabilitate.

Tabela 3

Calculul probabilist la stabilitate al cadrului din figura 4

Varianta de calcul		Forța critică de pierdere a stabilității pentru probabilitățile: ($P_{cr} = \ldots EI/h^2$)				
		$p = 50\%$ $\gamma = 0$	$p = 30\%$ $\gamma = 0{,}524$	$p = 15{,}87\%$ $\gamma = 1{,}0$	$p = 5\%$ $\gamma = 1{,}645$	$p = 0{,}5\%$ $\gamma = 2{,}576$
A	val	3,5187	3,24177	2,9783	2,6004	2,0305
	%	0	7,87	15,35	26,09	42,29
B	val	3,5036	3,2420	2,9776	2,5870	1,9970
	%	0	7,46	15,01	26,16	43,0

Valori pentru: $v_l = 6\%$; $v_A = v_I = 5\%$; $v_E = 4\%$

1/250, în aceeași direcție. Din datele prezentate în tabelă se constată că forța critică de pierdere a stabilității scade cu creșterea probabilității de comportare sigură a structurii ($1 - p$), diferențele procentuale Δ față de calculul determinist ($\gamma = 0$) sînt de același ordin de mărime cu cele obținute la calculul static. De asemenea, se observă că deformațiile inițiale ale stîlpilor nu au o influență semnificativă în metoda de calcul abordată, aceea a bifurcării echilibrului.

Calculul probabilist la stabilitate are avantajul că poate lua în considerare, în condiții avantajoase pentru proiectare, imperfecțiunile de natură geometrică și structurală ale construcțiilor.

6. CONCLUZII

Din studiul și exemplele de calcul prezentate se desprind unele concluzii privind calculul structurilor de rezistență ale construcțiilor.

a) Prin abordarea probabilistă a calculului static și la stabilitate se realizează concordanța metodologică cu calculul de dimensionare a secțiunilor, care se face fie semiprobabilist, fie probabilist.

b) Metoda elementelor finite, utilizată pe larg la studiul structurilor de rezistență, permite abordarea probabilistă a calculului, fiind folosiți algoritmii din metoda deterministă, timpul suplimentar de calcul la computer fiind relativ foarte mic.

c) Calculul probabilist la stabilitate ia în considerare, printr-o abordare mai realistă și avantajoasă față de metodele clasice, imperfecțiunile de natură geometrică și structurală ale construcțiilor.

d) Folosirea metodelor probabiliste creează posibilitatea unei dimensionări variate, funcție de importanța construcției, realizîndu-se, în acest fel, reduceri de consumuri specifice de materiale la construcțiile mai puțin importante, iar în cazul construcțiilor deosebite un grad de siguranță sporit.

e) Pentru aplicarea în proiectare a metodei probabiliste a fractililor, propusă în lucrare, sînt necesare exemple de folosire la diferite tipuri de structuri cît și precizări suplimentare privind evaluarea statistică a caracteristicilor construcțiilor și acțiunilor.

Primit la redacție la 23 octombrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor*, Editura Academiei, București, 1984.
2. C. BOB, *Calculul probabilist al construcțiilor cu metoda elementelor finite*, Simpozionul „Soluții noi, eficiente în proiectarea și execuția structurilor", Timișoara, 14—15 noiembrie 1986, p. 239.
3. C. A. BREBBIA, I. C. F. TELLES, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1984.
4. S. M. ERMAKOV, *Metoda Monte-Carlo și probleme înrudite* (trad. din limba rusă), Edit. Tehnică, București 1976.
5. D. LUNGU, D. GHIOCEL, *Metode probabilistice în calculul construcțiilor*, Edit. Tehnică, București, 1982.
6. D. N. SOBOLEV, V. E. KIM, *Veroiatnostnii rascet construcții metodom conecinovo elementa*, Stroitelinaia mehanica i rascet soorujenii, 1, (1986).
7. * * * *Simulations: Put the real world in your computer*, Creative computing — Mag. of computer applications and software, **II**, 11 (1985).

CERCETĂRI ASUPRA VIBRAȚIILOR MAȘINILOR-UNELTE

de F. P. SIMION și GABRIELA SIMION

Institutul Politehnic, București

În lucrarea de față sînt prezentate studii și cercetări asupra vibrațiilor mașinilor-unelte utilizînd un model mecanic reprezentativ. Se studiază stabilitatea sistemului și se verifică modelul ales prin identificarea sistemelor, utilizînd eroarea de ieșire ca eroare între model și sistem.

A. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE MODELULUI MECANIC

Vibrațiile mașinilor-unelte sînt deosebit de complexe (datorită numărului mare de factori care participă în procesul de prelucrare), determinînd dificultăți în generarea suprafețelor pieselor în condiții de productivitate, calitate și precizie dimensională.

În vederea îmbunătățirii performanțelor mașinilor-unelte este necesar a cunoaște legile de apariție și de desfășurare a fenomenelor dinamice și a aplica măsurile eficiente de atenuare a vibrațiilor.

Vibrațiile mașinilor-unelte apar datorită, neechilibrării unor mase în mișcare, transmisiilor cu angrenaje și curele, șocurilor din instalațiile hidraulice, inversării sensului variației grosimei așchiei și a structurii materialului de prelucrat.

Vibrațiile care exercită cea mai mare influență asupra preciziei dimensionale, a calității suprafeței piesei, a uzurii sculei și uzurii subansamblelor, apar în zona de lucru a mașinilor unelte (strunguri, mașini de frezat, de rectificat, de mortezat, de rabotat, de șeveruit, de honuit etc.).

În toate aceste cazuri, se iau în considerație vibrațiile care se produc în planul format de axa piesei și sculă, ținînd seama de influența exercitată de unele subansamble ale mașinii-unelte, asupra întreținerii sau atenuării vibrațiilor în zona de lucru, între sculă și piesă. În lucrarea de față vom studia vibrațiile mașinilor-unelte din categoria mașinii de frezat, de mortezat etc. În figura 1 este reprezentată schema cinematică a unei mașini de mortezat cu cuțit-roată.

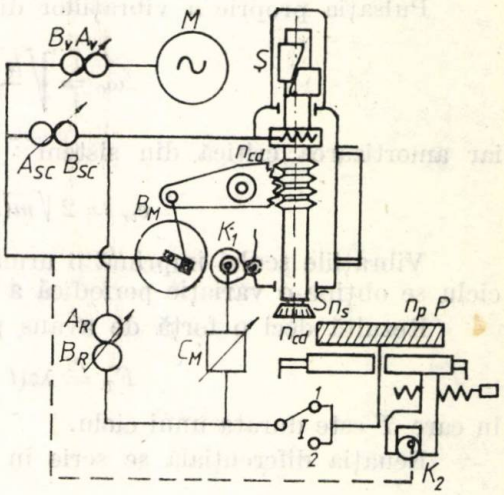


Fig. 1

Modelul mecanic — reprezentativ pentru o gamă largă de mașini (mașini de mortezat, de frezat, de rabotat, de rectificat etc.) — este alcătuit dintr-o sanie port-sculă 1 și piesa 2. Vibrațiile sînt provocate în pri-

mul rînd de rigiditatea dinamică în direcția de avans a sculei, figura 2, în care :

m este masa sanie port sculă ; k — constanta elastică a saniei port sculă ; c — constanta de amortizare a saniei port-sculă ; a_0 — avansul ; z — elongația vibrației sculei ; z_0 — săgeata statică a sculei aflată în contact cu piesa ; F_a — forța de avans ; F_0 — forța statică de apăsare a sculei pe suprafața piesei.

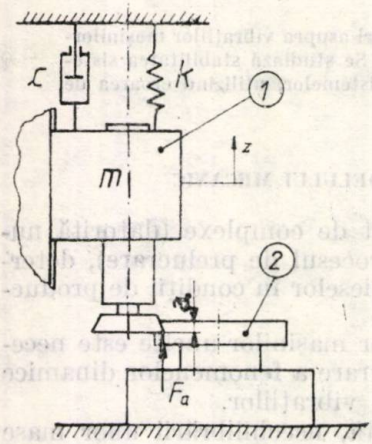


Fig. 2

Forța de avans se calculează cu relația :

$$F_a = \lambda a_0 = kz_0, \tag{1}$$

în care λ este o mărime dependentă de condițiile de prelucrare și denumită rigiditate de așchiere.

În cazul variației grosimei așchiei și a structurii materialului de prelucrat, apar vibrații ale sculei și a saniei port-sculă, care au ecuația de mișcare :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k(z_0 + z) = \lambda(a_0 - z) + F_0. \tag{2}$$

Ținînd seama de relația (1), se obține

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + (k + \lambda)z = F_0.$$

Pulsația proprie a vibrațiilor din sistem este

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + \lambda}{m}}, \tag{3}$$

iar amortizarea critică din sistem

$$c_{cr} = 2\sqrt{m(k + \lambda)}. \tag{4}$$

Vibrațiile sculei imprimă o urmă pe suprafața piesei, iar după un ciclu se obține o variație periodică a avansului.

Rezultă deci o forță de avans periodică :

$$F_T = \lambda z(t - T), \tag{5}$$

în care T este durata unui ciclu.

Ecuația diferențială se scrie în acest caz :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = \lambda[z(t - T) - z(t)] + F_0 \tag{6}$$

sau

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_z + F_0, \tag{7}$$

în care

$$F_z = \lambda[z(t - T) - z(t)], \text{ iar } F = F_z + F_0. \tag{8}$$

B. STABILITATEA SISTEMULUI

Considerînd sistemul mașină-sculă-piesă ca un sistem feedback semnalul de la ieșirea unui element S — (sistem) este adus pe o cale inversă de transmitere înapoi, spre intrarea elementului direct sau prin intermediul unui alt element R. Reacția poate fi pozitivă sau negativă, după cum semnalul adus înapoi la intrare se însumează sau se scade cu semnalul de intrare, figura 3.

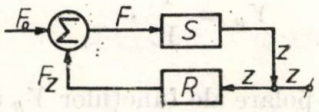


Fig. 3

Funcțiile de transfer corespunzătoare elementelor S și R sînt:

$$Y_s(p) = \frac{z(p)}{F(p)} = \frac{1}{mp^2 + cp + k}\,; \quad Y_R(p) = \frac{F_z}{z(p)} = \lambda[e^{-pT} - 1], \tag{9}$$

în care

$$F_z(p) = \lambda[z(p)\, e^{-pT} - z(p)]. \tag{10}$$

Presupunînd o reacție pozitivă, rezultă relația

$$F(p) = F_z(p) + F_0(p). \tag{11}$$

Funcția de transfer a întregului sistem este dată de relația

$$Y_{(p)} = \frac{z(p)}{F_0(p)} \tag{12}$$

și cum $F_0(p) = F(p) - F_z(p)$,
se obține

$$Y(p) = \frac{z(p)/F(p)}{1 - F_z(p)/F(p)}. \tag{13}$$

Ținînd seama de relațiile (9) rezultă expresia funcției de transfer în cazul unei reacții pozitive:

$$Y(p) = \frac{Y_s(p)}{1 - Y_R(p) \cdot Y_s(p)}. \tag{14}$$

În cazul modelului mecanic din figura 2, funcția de transfer $Y_S(p)$ este definită de caracteristicile mecanice ale sculei, iar $Y_R(p)$ definește caracteristicile procesului de așchiere.

Sistemul ales va fi stabil, dacă toate soluţiile ecuaţiei caracteristice:

$$1 - Y_R \cdot Y_S = 0, \tag{15}$$

respectiv

$$1 - \frac{\lambda[e^{-pT} - 1]}{mp^2 + cp + k} = 0 \tag{16}$$

au partea reală negativă.

Considerînd ecuaţia caracteristică sub forma

$$Y_R = \frac{1}{Y_s}, \tag{17}$$

din intersecţia diagramelor polare ale funcţiilor Y_R şi $\frac{1}{Y_S}$, cînd $p \to i\omega$, se deduce condiţia de stabilitate a sistemului.

În acest caz, prin înlocuirea $p \to i\omega$ se obţin relaţiile:

$$Y(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \tag{18}$$

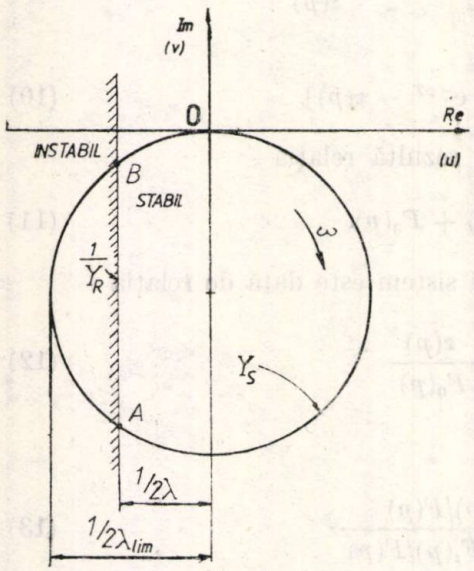


Fig. 4

şi

$$\frac{1}{Y_R(\omega)} = \frac{1}{\lambda[\cos \omega t + i \sin \omega t - 1]}. \tag{19}$$

Notînd cu u partea reală, respectiv cu v partea imaginară a relaţiei (18), rezultă

$$u = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2},$$

$$v = \frac{-c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}. \tag{20}$$

Între expresiile u şi v există relaţia:

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c\omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c\omega}\right)^2, \tag{21}$$

care reprezintă ecuaţia unui cerc de rază $\frac{1}{2c\omega}$ cu centrul pe axa imaginară şi tangent în origine la axa reală, figura 4.

În mod analog, separînd partea reală a relaţiei (19), se obţine:

$$u = -\frac{1}{2\lambda}, \tag{22}$$

care reprezintă ecuaţia unei drepte paralelă cu axa imaginară, figura 4.

Stabilitatea este asigurată dacă dreapta (22) taie cercul (21), respectiv dacă

$$-\frac{1}{2\lambda} > \min\ (\mathrm{Re}\ Y_s). \tag{23}$$

Derivînd prima relație (20) în raport cu ω și anulînd această derivată, se obține

$$\omega^2 = \omega_p^2\,(1 \pm 2\zeta), \tag{24}$$

unde $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$, iar ζ este factorul de amortizare:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}\cdot \tag{25}$$

Înlocuind valoarea $\omega^2 = \omega_p^2(1 - 2\zeta)$ în (22), se obține

$$\min(\mathrm{Re}\,Y_S) = -\frac{1}{2\lambda_{lim}} = -\frac{1}{4k\,\zeta(1+\zeta)}\cdot \tag{26}$$

deoarece condiția de stabilitate:

$$\lambda > \lambda_{lim} = 4k\zeta\,(1+\zeta). \tag{27}$$

C. DETERMINAREA PARAMETRILOR MODELULUI ALES

Identificarea sistemelor cu parametri concentrați sau cu parametri distribuți, cu structură oricît de complexă, este concepută pentru verificarea modelelor alese în urma analizei teoretice. Parametrii modelului se obțin astfel încît să fie minimizată o funcțională a erorii între model și sistem.

Ca eroare între model și sistem se utilizează eroarea de ieșire, figura 5, în care S este sistemul real, M — modelul, $F(t)$ — forța de intrare aplicată sistemului și respectiv modelului; $z(t)$ și $z_1(t)$ sînt deplasările sistemului, respectiv ale modelului, $h(t)$ este perturbația deplasării sistemului.

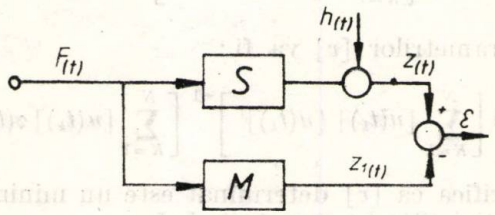


Fig. 5

Forma generală a ecuației pentru un model discret și liniar este următoarea:

$$z_1(t_n) + a_1 z_1(t_{n-1}) + \ldots + a_{N_1} z_1(t_{n-N_1}) = b_1 F(t_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + b_m F(t_{n-m}) + \psi(t), \tag{28}$$

unde $z_1(t_n)$ este valoarea deplasării modelului la momentul t_n; $F(t_{n-1})$ — valoarea forţei aplicată modelului la momentul t_{n-1}; $\psi(t)$ — suma erorilor de modelare.

Notînd cu

$$[u(t_n)] = [-z_1(t_{n-1}) \ldots - z_1(t_{n-N_1}) : F(t_{n-1}) \ldots F(t_{n-m})]^T$$

matricea ieşirilor şi intrărilor la momentele anterioare t_n, iar matricea parametrilor cu

$$[v] = [a_1\ a_2 \ldots a_{N_1} : b_1\ b_2 \ldots b_m]^T \quad \text{rezultă}$$

$$z_1(t_n) = [u_n]^T\ [v];\ z(t_n) - z_1(t_n) = \varepsilon(t_n). \tag{29}$$

Funcţionala aleasă este

$$V(v) = \sum_{K=1}^{N} \varepsilon^2(t_k) = \sum_{K=1}^{N} [z(t_k) - z_1(t_k)]^2 = \sum_{K=1}^{N} \{z(t_k) - [u(t_k)]^T\ [v]\}^2, \tag{30}$$

N — numărul de măsurători; $[v]$ se află astfel încît să asigure minimul funcţionalei V.

Derivînd funcţionala V în raport cu v şi egalînd cu zero, va rezulta valoarea optimă a parametrilor conţinuţi de matricea $[v]$:

$$\frac{\partial}{\partial v}[V(v)] = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\sum_{K=1}^{N} z^2(t_k) - 2\sum_{K=1}^{N} z(t_k)\ [u(t_k)]^T\ [v] + \right.$$

$$\left. + \sum_{K=1}^{N} ([u(t_k)]^T\ [v])^2\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{-2\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)\ z(t_k)]\ [v] + \right.$$

$$\left. + [v]^T\left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ [u(t_k)]^T\right][v]\right\} = -2\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ z(t_k) +$$

$$+ 2\left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ [u(t_k)]^T\right][v] = 0. \tag{31}$$

Matricea parametrilor $[v]$ va fi:

$$[v] = \left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ [u(t_k)]^T\right]^{-1}\left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ z(t_k)\right]. \tag{32}$$

Pentru a verifica că $[v]$ determinat este un minim, vom deriva ultima formă a relaţiei (31) în raport cu $[v]$.

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}[V(v)] \overset{\Delta}{=} \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial v} V(v)\right]^T = \frac{\partial}{\partial v}\left\{-2\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ z(t_k) + \right.$$

$$\left. + 2\left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ [u(t_k)]^T\right][v]\right\} = 2\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\ [u(t_k)^T. \tag{33}$$

Matricea astfel obținută se verifică ușor că e pozitiv semidefinită. Astfel, pentru orice $\alpha \in R^{nv \times 1}$, se obține

$$\alpha^T \left[\sum_{K=1}^{N} [u(t_k)]\,[u(t_k)]^T \right] \alpha = \sum_{K=1}^{N} \alpha^T [u(t_k)]\,[u(t_k)]^T\,\alpha =$$

$$= \sum_{K=1}^{N} [\alpha^T [u(t_k)]]^2 \geqslant 0. \tag{34}$$

Rezultă că matricea parametrilor $[v]$ este un minim.

Pentru a pune în evidență principalele operații necesare implementării lui $[v]$, ecuația (32) se scrie detaliat astfel:

$$[v] = \left[\begin{array}{l|l} \sum\limits_{K=1}^{N} z_1(t_{ki})\, z_1(t_{kj}) & -\sum\limits_{K=1}^{N} z_1(t_{ki})\, F(t_{kj}) \\ ij = 1, \ldots, N_1 & \begin{array}{l} i = 1, \ldots, N_1 \\ j = 1, \ldots, m \end{array} \\ \hline -\sum\limits_{K=1}^{N} F(t_{ki})\, z(t_{kj}) & \sum\limits_{K=1}^{N} F(t_{ki})\, F(t_{kj}) \\ \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, N_1 \end{array} & i,j = 1, \ldots, m \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{l} -\sum\limits_{K=1}^{N} z_1(t_{ki})\, z(t_k) \\ i = 1, \ldots, N_1 \\ \hline \sum\limits_{K=1}^{N} F(t_{kj})\, z(t_k) \\ j = 1, \ldots, m \end{array}\right].$$

Cu acești parametri se determină un model a cărui ieșire să aibă o eroare minimă față de ieșirea sistemului real.

CONCLUZII

Identificarea unui sistem include observarea comportării acestuia pe un interval de timp și determinarea unui model pe baza observațiilor culese.

Sistemele din construcția de mașini, ale căror amplitudini de ieșire trebuie menținute cît mai aproape de valorile teoretice, ridică multe restricții asupra experimentului.

Dacă perturbațiile din proces tind să aducă amplitudinile de ieșire în afara limitelor de toleranță impuse, operatorul uman poate interveni asupra sistemului pentru a ajusta valoarea parametrilor intrării.

Determinarea valorilor optime a parametrilor conținuți de matricea v fac ca eroarea t să fie foarte apropiată de zero, obținîndu-se astfel mașini unelte cu parametri funcționali ridicați.

Primit la redacție la 20 ianuarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. SIMION, GABRIELA SIMION, *Studiul comportării la vibrații în zona de lucru a unei mașini-unelte, utilizînd metoda simulării pe calculatorul analogic*, Construcția de mașini, 10 (1986).
2. C. ISPAS, F. P. SIMION, *Vibrațiile mașinilor-unelte*, Edit. Academiei, București, 1986.
3. R. VOINEA, F. P. SIMION, *Determinarea amplitudinilor vibrațiilor subansamblelor principale ale unei mașini-unelte*, Buletinul IPB, **XLIII**, 1 (1981).

```
      DIMENSION A(20,20),B(20)
      DIMENSION Y(20),Z(20),F(20),C(20,20),E(20),
     *D(20)
      N=20
      N3=20
      READ(105,1)N,N1,N2,M
    1 FORMAT(4I3)
      N3=N1+M
      READ(105,2)(Z(I),I=1,N)
      READ(105,2)(Y(I),I=1,N)
    2 FORMAT(5F10.5)
      READ(105,3)(E(I),I=1,N)
    3 FORMAT(5F10.5)
      NN=MAXO(N1,M)+1
      CALL MATR(N,NN,N1,M,N3,C,D,J,X)
      CALL PRINV(C,C,N3,KOD,DET,0.00001,
     *IP,IR)
      IF(KOD)4,4,5
    5 WRITE(108,6)
    6 FORMAT(50X,'MATRICE SINGULARA')
      N1=0
      GO TO 9
    4 CALL KROD(N3,N3,1,C,D,E)
      WRITE(108,7)(E(I),I=1,N1)
    7 FORMAT(//,3X,'PARAMETRII IESIRI'/,5(3X,F10.3))
      IP=N1+1
      WRITE(108,8)(E(I),I=IP,M)
    8 FORMAT(//,3X,'PARAMETRII INTRARII',
     */5(3X,F10.5))
    9 CONTINUE
      STOP
      END
```

CCPLSIMI 21/01/88 10.05.26

```
      SUBROUTINE  MATR(N,N1,M,N3,N2,A,T,
     *F,Z)
      DIMENSION A(20,20),T(20),F(20),Z(20)
C     SUBRUTINA PT. CALCULUL MATRICILOR
C           A=U*UTRANSPUS
C              *U*Z
C     U=(-Y(T-1),...,Y(T-N1),F(T-1),...,F(
C           T=Z1
C           N=NUMARUL DE DATE
C           N3=N1+M
C           N2=MOMENT   DE LA CARE INCEPE
C           INSUMAREA
      LL=1
      IF(M.EQ.0) LL=0
      DO 2 JJ=1,N1
      DO 2 L=1,N1
      II=J
      JJ=L
      IF(II.GT.JJ) GO TO 2
      A(II,JJ)=0
      DO 1 IT=N2,N
    1 A(II,JJ)=A(II,JJ)+Y(IT-J)*Y(IT-L)
    2 CONTINUE
      IF(LL)79,9,4
    4 DO 6 L=1,M
      DO 6 J=1,M
      II=N1+J
      JJ=N1+L
      IF(II.GT.JJ) GO TO 6
      A(II,JJ)=0
      DO 5 IT=N2,N
    5 A(II,JJ)=A(II,JJ)+F(IT-J)*F(IT-L)
    6 CONTINUE
      DO 8 J=1,N1
      DO 8 L=1,M
      II=J
      JJ=N1+L
      A(II,JJ)=0
      DO 7 IT=N2,N
    7 A(II,JJ)=A(II,JJ)-Y(IT-J)*F(IT-L)
    8 CONTINUE
    9 DO 10 I=1,N3
      DO 10 J=I,I
   10 A(I,J)=A(J,I)
      DO 11 J=1,N3
      II=J
   11 T(II)=0
```

CCPLSIMI 21/01/88 10.0

Anexa I

```
      DO 11 IT=N2,N
   11 T(II)=T(II)-Y(IT-J)*Z(IT)
      IF(LL) 14,14,12
   12 DO 13 J=1,M
      II=N1+J
      T(II)=0
      DO 13 IT=N2,N
   13 T(II)=T(II)+F(IT-J)*Z(IT)
   14 RETURN
      END
                                                    CCPLSIMI   21/01/88  10.05.42

      SUBROUTINE PROD(M,N,L,A,B,C)
C     INMULTIREA A DOUA MATRICI
      DIMENSION A(20,20),B(20,20),C(20,20)
      DO 1 I=1,M
      DO 1 J=1,L
      C(I,J)=0
      DO 1 K=1,N
    1 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      RETURN
      END
                                                    CCPLSIMI   21/01/88  10.05.47

      SUBROUTINE MRINV(A,B,N,KOD,DET,EPS,
     *IL,IC,IND)
C     SUBRUTINA CALCULEAZA INVERSA UNEI
C     MATRICI PATRATICE
C     PARAMETRII UTILIZEAZA URMATOARELE VARIABILE
C     SI TABLOURI:
C     A - CONTINE MATRICEA DE INVERSAT
C     N - DIMENSIUNEA MATRICEI (DIM=N*N)
C     B - MATRICEA INVERSA ARANJATA PE COLOANE
C     N - DIMENSIUNEA A,B
C     DET - DETERMINANT(A)
C     KOD=0 EXISTA INVERSA
C     KOD=1 MATRICE CVASISINGULARA
C     EPS - VALOAREA SUB CARE UN PIVOT ESTE
C           CONSIDERAT NUL
      DIMENSION A(1),B(1),IL(1),IC(1)
      KOD=0
      NN=N*N
      DO 1 I=1,NN
    1 B(I)=A(I)
      DET=1
      NM=N
      DO 11 M=1,N
      NM=NM+N
      IL(M)=M
      IC(M)=M
      MM=NM+M
      PIVO=B(ID)
      DO 2 J=M,N
      IK=J*N+N
      DO 2 I=MN
      IK=IK+1
      IF(ABS(PIVO),GE,ABS(B(I))) GO TO 2
      PIVO=B(II)
      IL(M)=I
      IC(M)=J
    2 CONTINUE
      IL(M)
      IF(I.LE.M) GO TO 4
      MM=M-N
      DO 3 J=1,N
      IM=IM+N
      JK=JK-M+I
      SAVE=B(IM)
      B(IM)=B(JK)
    3 B(JK)=SAVE
    4 J=IC(M)
                                                    CCPLSIMI   21/01/88  10.05.47
```

Anexa II

```
      IF(J.LE.M) GO TO 6
      NJ=NJ+N
      DO 5 I=1,N
      JM=NM+I
      JJ=NJ+I
      X=-B(JM)
      B(JM)=B(JJ)
    6 IF(ABS(PIVO).GT.EPS) GO TO 7
    5 B(JJ)=X
      DET =0
      KOD=4
      RETURN
    7 DO 8 L=1,N
      IF(L.EQ.M) GO TO 8
      LL=NM+L
      B(LL)=-B(LL)/PIVO
    8 CONTINUE
      DO 9 I=1,N
      II=II+N
      IF(I.EQ.M) GO TO 9
      IF(J.EQ.M) GO TO 9
      JJ=II-I+M
      B(II)=B(II)+B(IM)*B(JJ)
    9 CONTINUE
      MJ=M-N
      DO 10 J=1,N
      MJ=M+N
      IF(J.EQ.M) GO TO 10
      B(MJ)=B(MJ)/PIVO
   10 CONTINUE
      IF(IND.EQ.0) GO TO 20
      DET=DET*PIVO
   20 B(ID)=1./PIVO
   11 CONTINUE
      M=N
   12 M=M-1
      IF(M.LE.0) GO TO 16
      I=IL(M)
      IF(I.LE.M) GO TO 14
      J1=N*(M-1)
      J2=N*(I-1)
      DO 13 J=1,N
      JX=J1+J
      JY=J2+J
      X=B(JX)
      B(JX)=-B(JY)
   13 B(JY)=X
                                                  CCPLSIMI   21/01/88   10.05.47

   14 J=IC(M)
      IF(J.LE.M) GO TO 12
      J1=M-N
      DO 15 I=1,N
      J1=J1+N
      J2=J1-M+J
      X=B(J1)
      B(J1)=-B(J2)
   15 B(J2)=X
      GO TO 12
   16 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Anexa III

CINETICA DISTRUGERILOR CAVITAȚIONALE PE TRIBOMODELE DE CAVITAȚIE CU JET LICHID DE IMPACT *)

de O. BOLOGA

Universitatea din Galați

Lucrarea prezintă o instalație experimentală în care activează un tribomodel de cavitație cu impact de jet lichid.
Rezultatele obținute (curbele cinetice de uzură) sînt apoi analizate cu funcții spline.
Se observă și apariția unor caverne mari de forme neregulate care măresc progresiv suprafețele expuse atacului cavitațional.

1. GENERALITĂȚI

Pornind de la instabilitatea cavităților produse prin metoda ultrasonoră [1], se propune o teorie care explică distrugerile produse de cavitație prin fenomenul de impact cu un jet de lichid. Bula de cavitație fiind comprimată puternic, dă naștere unui jet care lovește suprafața solidă din imediata vecinătate, provocînd distrugeri. Teoria este confirmată prin cercetarea comportării bulelor cavitaționale în apropierea frontierelor solide [2], [3], [4]. Bazîndu-se pe teoria cumulației dezvoltată de Lavrentiev [5], Kozîrev [6], propune formarea unui jet de viteză ridicată în timpul colapsului cavitațional. Pentru evidențierea jeturilor cumulative s-a efectuat un set de experimente [6] constînd în injectarea vaporilor de apă în glicerină. Utilizînd o tehnică de fotografiere de mare viteză, Kozîrev observă formarea unui prim jet cu viteză relativ mică, apoi, în partea opusă a cavității, formarea unui al doilea jet, după care cavitatea se divide și se formează noi jeturi ce divid cavitățile după legea reacției în lanț.

2. INSTALAȚIE EXPERIMENTALĂ

Funcționarea instalației se bazează pe modelul propus de Kozîrev, distrugerea suprafeței triboelementelor producîndu-se prin șocul intermitent dintre acestea și un jet de apă. Tribomodelul [7], [8] se compune dintr-un sistem de șase tuburi cilindrice fixate în plan orizontal pe un arbore care este rotit cu o turație variabilă de către un motor de curent continuu (fig. 1). Alimentarea cu apă a tuburilor se realizează prin interiorul arborelui cu ajutorul unei palete elicoidale solidarizată pe arbore. Jeturile de apă ce pornesc din duze sînt intersectate de patru triboelemente cilindrice fixate pe un disc ce se rotește în sens invers față de duze.

Discul este antrenat printr-un sistem multiplicator cu curele trapezoidale de către un motor trifazat cu rotor în scurt circuit. Schema electrică de acționare a instalației se prezintă în figura 2. Dispunerea triboele-

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

mentelor în tribomodelul cu jet lichid de impact Tvi se prezintă în figura 3. Prin modificarea vitezei unghiulare a brațelor port duză, mărimile parametrilor de comandă ai tribomodelului variază într-un domeniu

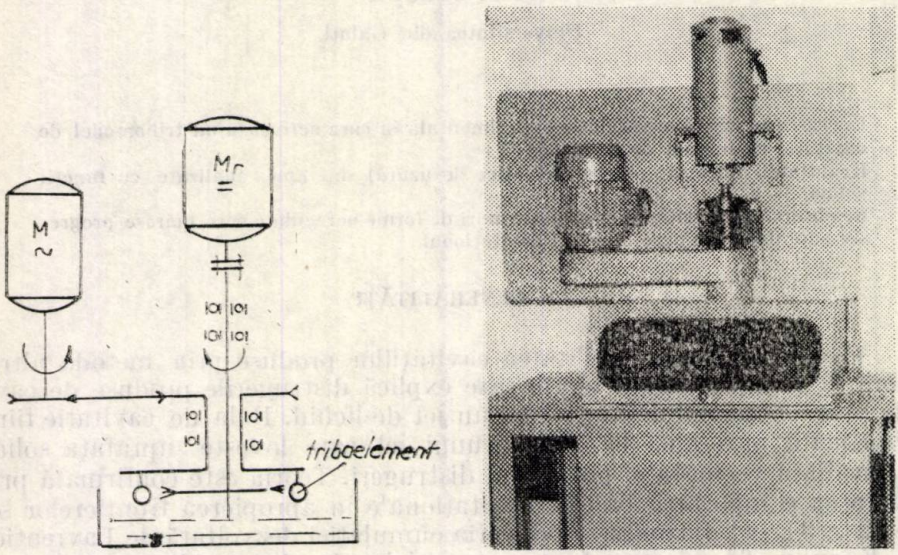


Fig. 1. — Instalație pentru tribomodel Tvi.

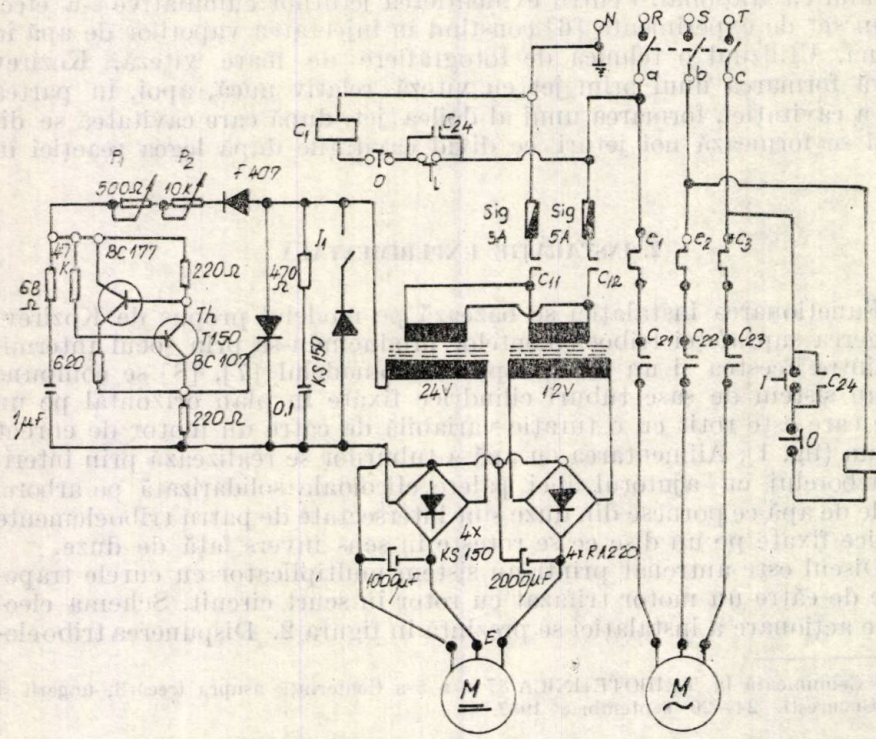


Fig. 2. — Acționarea electrică a tribomodelului de cavitație cu jet lichid de impact.

larg. În acest domeniu s-au ales trei viteze unghiulare pentru care s-au efectuat seturile de experimente I, II, III (tabelul 1).

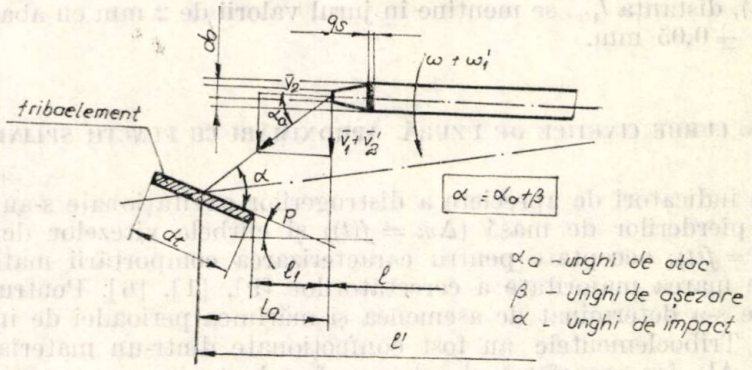


Fig. 3. — Dispunerea triboelementelor.

Tabela 1

Exp	ω [rad/sec]	v [m/s]	v [m/s]	v [m/s]	Fr $d=2,5$	Fr $d=4$	α_a [0]	β [0]	α [0]	l [mm]	g [mm]	l, cor [mm]
I	50	5,75	5,61	45,35	1283	802	82,8	−10	72,8	2,12	0,1	2,02
								+10	92,8	2,12	0,1	2,02
								+40	122,8	3,87	1,9	1,97
								+60	148,8	4,00	2	2,00
II	100	11,5	11,22	51,98	5133	3208	77,5	− 5	72,5	2,03	0	2,03
								−15	92,5	2,27	0,3	1,97
								+45	122,5	4,3	2,3	2,00
								+65	142,5	6,60	4,6	2,00
III	157	18	17,62	59,96	12659	7920	72,9	0	72,9	2,0	0	2,00
								+20	92,9	2,48	0,5	1,98
								+50	122,9	4,85	2,8	2,05
								+70	142,9	7,26	5,3	1,96

Fiecare set de experimente conține cîte patru încercări, corespunzătoare celor patru mărimi ale unghiului de impact α. Se observă că prin alegerea convenabilă a unghiului de așezare β, unghiurile de impact au abateri mai mici de 0,4° față de valorile corespunzătoare pentru setul

II de încercări. Prin varierea unghiului β, distanța l_1 dintre duză și marginea triboelementului se va modifica după relația $l_1 = l_0 - 0{,}5\ d_t \cos \beta$. Pentru a anihila acest lucru au fost utilizate șaibe distanțiere calibrate la asamblarea duzei cu brațul port duză în așa fel încît prin adăugarea acestora (gs), distanța l_{1cor} se menține în jurul valorii de 2 mm cu abateri mai mici de $\pm 0{,}05$ mm.

3. CURBE CINETICE DE UZURĂ. APROXIMĂRI CU FUNCȚII SPLINE

Ca indicatori de apreciere a distrugerilor cavitaționale s-au utilizat curbele pierderilor de masă ($\Delta m = f(t)$) și curbele vitezelor de uzură $\delta\Delta m/\Delta t = f(t)$, acceptate pentru caracterizarea comportării materialelor de către marea majoritate a cercetătorilor [9], [1], [6]. Pentru fiecare încercare s-a determinat de asemenea și mărimea perioadei de incubație (t inc). Triboelementele au fost confecționate dintr-un material moale (99,5 % Al), iar suprafețele de atac au fost lustruite.

Analizînd curbele cinetice de uzură (fig. 4) se poate afirma că distrugerea, pe acest tip de tribomodel se manifestă ca un fenomen ciclic cumu-

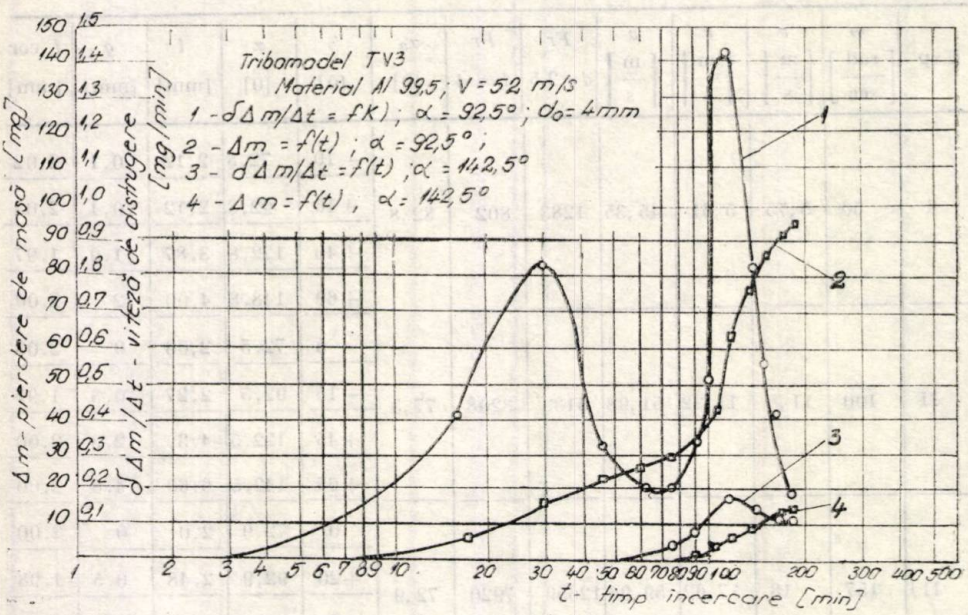


Fig. 4. — Curbe cinetice de uzură.

lativ. Micșorarea vitezei de impact duce la micșorarea numărului de cicluri de distrugere și la creșterea timpului de incubație. Unghiul de impact are o influență deosebită asupra cineticii procesului de distrugere atît în privința cantității totale de material erodat, cît și a mărimii duratei de incubație. Menținînd viteza de impact constată, s-au trasat curbele vite-

zelor maxime de uzură, ale pierderii totale de masă și ale timpului de incubație în funcție de unghiul de impact (fig. 5).

Analizînd aceste curbe se observă că deși vitezele maxime corespunzătoare ciclurilor de distrugere pentru unghiul de impact de 92,5° sînt superioare celor corespunzătoare unghiului de impact de 72,5°, pierderea de masă după 180 de minute de atac cavitațional este mai mare pentru unghiul de impact de 72,5°. Aceasta se datorește faptului că perioadele de atenuare parțială sînt mai pronunțate la încercarea corespunzătoare unghiului de impact de 92,5°. Timpul de incubație minim corespunde unghiului de impact de 92,5°; odată cu modificarea unghiului de impact, creșterea timpului de incubație este foarte pronunțată. Pierderea totală de masă variază puțin pentru unghiuri de impact cuprinse în intervalul 70—110°; odată cu modificarea unghiului față de acest interval, pierderile de masă se micșorează considerabil.

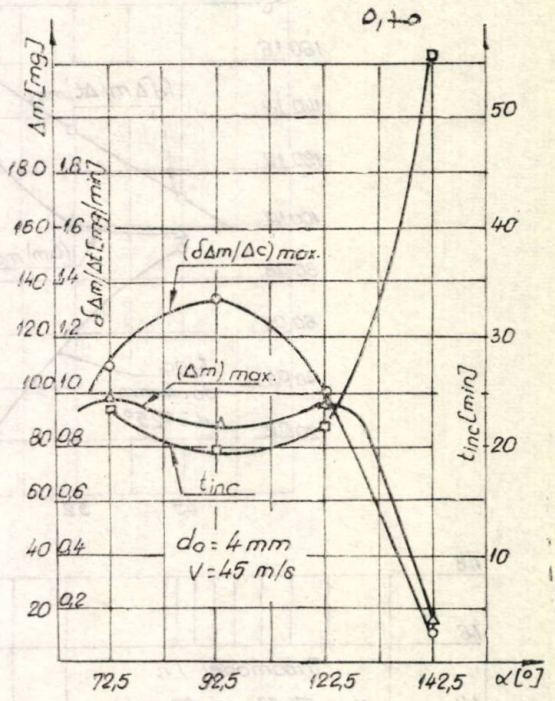


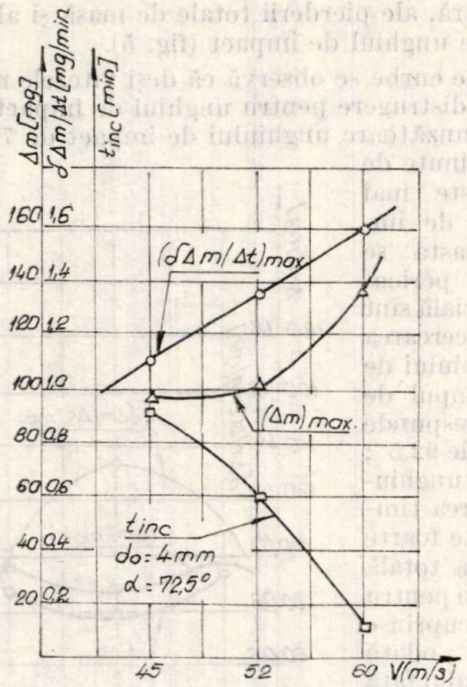
Fig. 5

Menținînd parametrul α constant s-au trasat curbele de variație ale vitezelor maxime de uzură, ale pierderilor totale de masă și ale timpului de incubație în funcție de viteză (fig. 6). Se observă că viteza maximă de distrugere are o variație aproximativ liniară, iar pierderea totală de masă a variației parabolică cu viteza de impact. Timpul de incubație are o variație pronunțată la modificarea vitezei de impact, de la cîteva minute ($v = 60$ m/s), la zeci de minute ($v = 45$ m/s).

Pentru prelucrarea datelor experimentale se utilizează în general două categorii de metode: o primă categorie o formează tehnicile de interpolare bazate de regulă pe polinoame interpolative de tip Lagrange. O a doua categorie de metode o formează tehnicile de regresie bazate pe metoda celor mai mici pătrate, utilizată în special cînd datele sînt afectate de erori.

Funcțiile de interpolare cubică pe porțiuni cu netezire combină atît condițiile interpolatoare de trecere a curbei prin apropierea punctelor experimentale, cît și condiția de ondulare minimă a curbei. Pentru aproximarea curbelor experimentale s-a utilizat setul de subrutine SPLINAJUST, INTSPAJ, EVASAJ. Cu subrutina SPLINAJUST s-au calculat coeficienții funcțiilor spline de aproximare pe porțiuni. Utilizarea parame-

Fig. 6



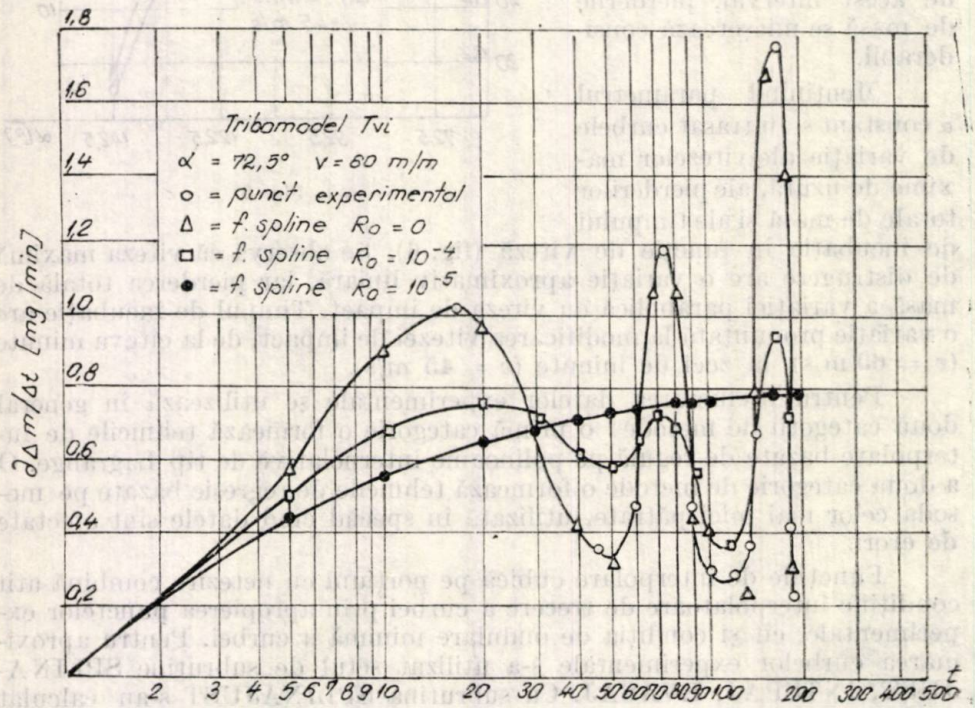


Fig. 7. — Aproximare cu funcţii spline.

trului RO face posibil ca funcția de aproximare să se apropie de un polinom de regresie sau de un polinom de interpolare. Subrutina INTSPAJ s-a folosit pentru calculul valorilor funcțiilor spline în punctele dorite (ce pot diferi de punctele experimentale) (fig. 7). Cu ajutorul subrutinei EVASAJ s-au determinat abaterile curbei de aproximare de la punctele experimentale.

Analizînd curbele de aproximare din figura 7 se observă că pentru RO = 0 curbele trec prin punctele experimentale cu o precizie foarte bună. Pentru RO = 10^{-4} și RO = 10^{-5} se observă că numărul de cicluri de distrugere dat de curbele spline se micșorează.

Pentru acest tribomodel curbele vitezelor de uzură diferă sensibil de curbele tipice de uzură cavitațională prezentate în literatură. Acest lucru se datorește faptului că pe măsura evoluției eroziunii cavitaționale, condițiile geometrice din tribomodel se modifică fiind posibilă distrugerea cumulativă. Analizînd triboelemente încercate, se observă caverne de dimensiuni considerabile și forme foarte neregulate care măresc progresiv suprafețele expuse atacului cavitațional.

Primit la redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. R. T. KNAPP, J. W. DAILY, F. G. HAMMITT, *Cavitation*, Mc Graw-Hill, Inc, New York, 1970.
2. M. S. PLESSET, R. B. CHAPMAN, *Collapse of an Initially Spherical Vapour in the Neighborhood of a Solid Boundary*, Journ. Fluid. Mech., **47** (1971).
3. A. SCHIMA, *The behavior of a spherical duble in the Vicinity of a Solid Wall*. Trans. ASME, scries D, march (1968).
4. M. POPOVICIU, *Evoluția bulelor cavitaționale produse prin scîntei electrice*, Teză de doctorat, I. P. Timișoara, 1971.
5. M. A. LAVRENTIEV, *Shaped charge and its Principale of Operation*, Uspehi Mathem. Nauk, **12** (1957).
6. S. P. KOZYREV, *On cumulative collapse of cavitation Cavities*, Trans. ASME, march (1968).
7. I. CRUDU, O. BOLOGA, *Tribosystem and tribomodel in cavitation damage*, Symp. IMAEM, Varna, may, 1987.
8. O. BOLOGA, *Contribuții la studiul uzurii în tribosistemele de cavitație*, teză de doctorat, Universitatea din Galați, 1986.
9. I. ANTON, *Cavitația* vol. **I** și **II**, Edit. Academiei, București, 1984 și 1985.

INFLUENȚA PARTICULELOR ABRAZIVE ASUPRA INTENSITĂȚII DE UZARE A ARTICULAȚIILOR

de A. TUDOR

Institutul Politehnic, București

Se analizează procesul de uzare din cupla de tip fus-cuzinet, în cazul în care mediul de funcționare (lubrifiant sau aer) este infestat cu particule abrazive. În ipoteza unor particule abrazive sferice cu caracteristicile mecanice cunoscute, se evidențiază condițiile de apariție a uzării, în corelație cu geometria interstițiului, caracteristicile mecanice ale materialelor fusului și cuzinetului și sarcina radială transmisă. Se determină viteza de uzare, în ipoteza unor caracteristici deterministe și aleatoare ale particulelor abrazive (diametru, tensiune de rupere și concentrație în mediul de funcționare).

1. INTRODUCERE

Cuplele de frecare, utilizate în construcția de mașini pentru transmiterea unei mișcări continue sau oscilante, sînt supuse unor forțe radiale și axiale. Durata de funcționare a unor astfel de cuple este limitată de procesele de uzare, procese ce au loc fie ca urmare a imposibilității formării unei pelicule continue de lubrifiant, fie ca urmare a existenței unor particule abrazive în lubrifiant. Particulele abrazive pot proveni din mediul exterior, cazul utilajelor pentru construcții, utilajelor miniere, agricole, sau din însăși particulele de uzură de tip adeziv, desprinse în procesul de uzare și-n prezența unui regim termic local, ridicat. Numeroase cercetări experimentale dovodesc că multe tipuri de cuple de frecare (rulmenți, lanțuri, piston-cilindru, angrenaje, etanșări etc.) au durabilitatea limitată de prezența și efectele particulelor abrazive [1,2,3].

Lucrarea de față își propune să analizeze, din punct de vedere tribologic, factorii care determină procesul de uzare a unei cuple de tip fus-cuzinet (bolț-bucșă) cu mișcare continuă sau alternativă, atunci cînd în lubrifiant se găsesc particule abrazive. Pentru evidențierea aspectelor de frecare și uzare se analizează starea de deformație dintre elementele cuplei (fus și cuzinet) în absența și-n prezența particulelor abrazive, în ipoteza că grosimea filmului de lubrifiant este mai mică decît diametrul particulelor abrazive. Această ipoteză se poate verifica ușor, întrucît atît efectele hidrodinamice, cît și cele de extrudere ale filmului de lubrifiant conduc la grosimi mici ale filmului (0,01...1 μm), pentru cazul articulațiilor cu viteze periferice mici și medii (0,1...5 m/s), iar particulele abrazive, des întîlnite în lubrifiant ca urmare a condițiilor de funcționare, au diametrul mediu relativ ridicat (10...100 μm).

2. DEFORMAȚIA PARTICULEI ABRAZIVE ÎN INTERSTIȚIU

Se consideră un interstițiu convergent-divergent, caracterizat prin jocul relativ ψ [$\psi = (D - d)/D$, D-diametrul interior al cuzinetului, d-diametrul fusului] și lungimea de contact L, și o particulă abrazivă de

formă sferică, caracterizată prin diametrul d_a (fig. 1). Fusul 1 are viteza unghiulară ω_1 și trebuie să transmită forța radială F cuzinetului 2, care are viteza unghiulară ω_2 (în multe cazuri $\omega_2 = 0$).

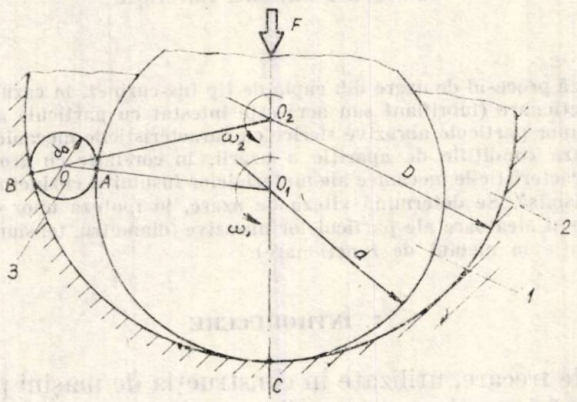


Fig. 1

Suprafețele fusului 1 și cuzinetului 2 se caracterizează în zona de contact prin durităților HB_1 și HB_2 și se presupune $HB_1 > HB_2$.

În lipsa particulei abrazive, contactul dintre fus și cuzinet se consideră elastic, astfel că geometria suprafeței nominale de contact și distribuția de presiuni se determină cu relațiile Hertz-Beliaev, particularizate la cazul în care diferența dintre curburile fusului $(2/d)$ și cuzinetului $(2/D)$ este mică [4]:

— condiția ca deformațiile dintre fus și cuzinet să fie elastice este ca parametrul adimensional de încărcare C_p să respecte restricția

$$C_p = \frac{2F}{LE_2 \psi D} [(1 - \nu_2^2) + (1 - \nu_1^2) E_2/E_1] \leqslant 0{,}092, \qquad (1)$$

în care E_1, E_2 sînt modulele de elasticitate longitudinale ale celor două materiale, iar ν_1, ν_2 sînt coeficienții contracției transversale (coeficienții Poisson);

— semiunghiul hertzian de contact φ_0,

$$\varphi_0 = \text{arc sin } (4C_p/\pi)^{1/2}; \qquad (2)$$

— distribuția de presiuni în zona de contact,

$$p(\varphi) = p_m [1 - (\varphi/\varphi_0)^2]^{1/2}, \qquad (3)$$

în care p_m este presiunea maximă și apare în centrul suprafeței de contact

$$p_m = 2F/(\pi LD \sin \varphi_0); \qquad (4)$$

— deformația elastică relativă a bolțului și bucșei (apropierea centrelor) δ/D,

$$\delta/D = \frac{\psi C_p}{(1-\nu_2^2)+(1-\nu_1^2)\,E_2/E_1}\{(E_2/E_1)(1-\nu_1^2)\ln[(3/2)\sqrt{\pi/C_p}]+$$

$$+(1-\nu_2^2)\ln[(3/2)\sqrt{\pi/C_p}/(1-\psi)]\}. \qquad (5)$$

Pe baza figurii 2 se poate constata că atunci cînd unghiul $\varphi' > \varphi_0$, particula abrazivă nu va fi „antrenată" în zona de presiuni, astfel că va fi doar „rostogolită" prin intermediul forțelor de adeziune, însă în afara zonei portante.

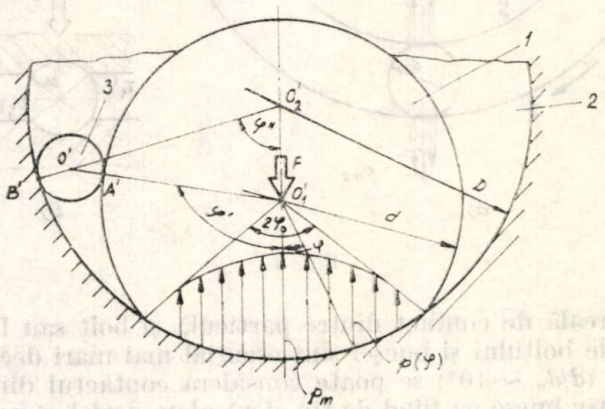


Fig. 2

Din triunghiul $O_1'O_2'O'$ ($|O_1'O_2'| = |O_1O_2| - \delta$) se determină unghiul $\pi - \varphi'$, astfel că

$$\varphi' = \arccos\{[\psi(1+2\delta/D+d_a/D-\psi)-2d_a/D-$$

$$-2\delta^2/D^2]/[\psi-2\delta/D)(1-\psi+d_a/D)]\}. \qquad (6)$$

Dacă diametrul particulei abrazive este mai mic decît o valoare critică, determinabilă din condiția $\varphi' = \varphi_0$, atunci asupra particulei acționează presiuni, și prin frecare este antrenată în zona de contact.
Dacă elementele cuplei nu transmit prin contact forțe (cazul pornirii utilajelor în gol), atunci pot pătrunde în interstițiu particule cu diametrul d_a mai mic decît jocul radial $j_r = \psi D/2$. Astfel că în momentul transmiterii forțelor pot exista în zona de contact particule abrazive.

Se analizează cazul în care particula abrazivă se găsește în zona de contact, chiar pe direcția sarcinii exterioare F (fig. 3*a*).
În funcție de duritatea HB a particulei și de durităților suprafețelor de frecare HB_1, HB_2, particula se va deforma plastic și eventual se va sparge dacă $HB < HB_2$, sau se va deforma elastic dacă $HB > HB_1$, sau elastoplastic dacă $HB_2 < HB < HB_1$. Spargerea particulei abrazive are loc

atunci cînd tensiunile ce acționează asupra ei depășesc o valoare critică σ_a, caracteristică materialului respectiv,

$$\pi \sigma_a \, r_a^2 = A_r \, HB, \tag{7}$$

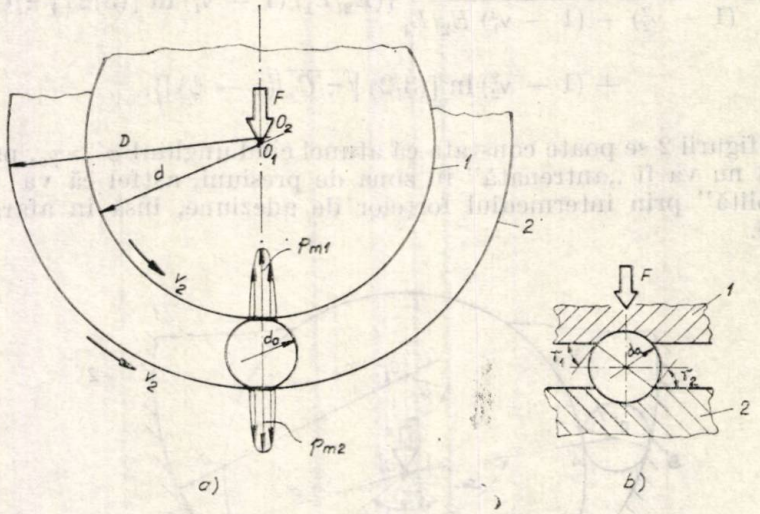


Fig. 3

A_r fiind aria reală de contact dintre particulă și bolț sau bucșă. Deoarece razele bolțului și bucșei sînt esențial mai mari decît raza medie a particulelor ($d/d_a \sim 10^3$) se poate considera contactul dintre particulă și bolț, respectiv bucșă ca fiind de tip sferă-plan, astfel că aria reală

$$A_r = \pi[r_a^2 - (r_a - \delta_{max})^2] \approx 2\pi r_a \, \delta_{max} = \pi d_a \, \delta_{max},$$

r_a fiind raza particulei, iar δ_{max} — deformația maximă suportată de particulă. Astfel că, din (7) rezultă deformația relativă maximă pe care o poate avea particula fără să se spargă,

$$(\delta/r_a)_{max} = 0{,}5(\sigma/HB). \tag{8}$$

Sub sarcina exterioară F, deformația relativă a particulei (δ/r_a) se consideră elastică atîta timp cît valoarea acestei deformații nu atinge valoarea (8). Pentru contactul elastic al particulei cu bolțul 1 și cu bucșa 2, deformația (δ/r_a) va avea expresia

$$(\delta/r_a)_{1,2} = 0{,}82 \, [F^2 k_{E_{1,2}}^2/(r_a^4 \, E^2)]^{1/3}, \tag{9}$$

cu $k_{E_{1,2}} = (1 - \nu^2) + (E/E_{1,2})(1 - \nu_{1,2}^2)$,

unde ν este coeficientul lui Poisson pentru materialul particulei; $\nu_{1,2}$ — coeficienții lui Poisson pentru materialul bolțului 1 și bucșei 2; E, $E_{1,2}$ —

modulele de elasticitate longitudinale ale materialelor particulei, bolțului, respectiv bucșei. Dacă condițiile de contact satisfac relația (8), atunci raza (r_{ai}) și numărul noilor particule (n), considerate tot sferice și identice, se determină din condițiile de constanță a volumului și de atingere a deformației relative maxime (8):

$$r_{ai}/r_a = (r_a^2\, E/Fk_{E_1})\,(0{,}6\ \sigma/HB)^{3/2},\quad n = (r_{ai}/r_a)^{-1/3}. \tag{10}$$

Ipoteza sfericității noilor particule formate după cîteva minute de funcționare este confirmată de unele încercări sistematice privind uzarea transmisiilor cu lanțuri. Deoarece mediul de lucru al articulațiilor (lubrifiant sau aer) conține mai multe particule abrazive, este necesar să se ia în considerație, în procesul transmiterii forței, numărul particulelor. Dacă concentrația procentuală, volumică, a particulelor este ε_a și se acceptă coeficientul de umplere cu noi particule egal cu doi, atunci, în unitatea de volum a interstițiului se vor găsi mereu

$$n_{\Delta V} = (\varepsilon_a/100)/(2\cdot 4\pi\, r_a^3/3) = 3\ \varepsilon_a/(800\ \pi r_a^3)\ \text{particule.}$$

Volumul interstițiului, corespunzător unghiului $2\varphi_0$, este $V_i = 4\mathrm{L}\ \varphi_0 r_a\,(r + r_a)$, astfel că numărul de particule n_p va fi

$$n_p = 3\varepsilon_a\ \varphi_0\, L(r + r_a)/(200\ \pi r_a^2). \tag{11}$$

Se consideră că forța exterioară este uniform preluată de cele n_p particule ($F_1 = F/n_p$).

Cazul cel mai obișnuit, și care prezintă interes pentru procesele tribologice, este cazul în care elementele articulației (fus sau bolț, cuzinet sau bucșă) se deformează elastic, plastic sau apar microașchieri și particula abrazivă se poate considera rigidă (deformația elastică a particulei fiind foarte mică).

Deformațiile elementelor articulațiilor (1,2) sînt elastice dacă se respectă restricția deformației critice $(\delta/r_a)_{cr}$ [5]:

$$(\delta/r_a)_{1,2} \leqslant (\delta/r_a)_{cr} = 5{,}56\ [c\sigma_{c_{1,2}}(1 - \nu_{1,2}^2)/E_{1,2}]^2, \tag{12}$$

în care $\sigma_{c_{1,2}}$ este tensiunea de curgere a materialului elementului 1, respectiv 2, iar c este coeficient, determinabil pe baza criteriului de plasticitate Huber-Hencky-Mises,

$$c = (\sqrt{3}/3)\ (\pi + 2 + 2\,\gamma_{1,2}),$$

cu unghiul de contact al particulei $\gamma_{1,2}$ (fig. 3*b*), determinabil din ecuația transcendentă

$$\sin\gamma_{1,2}[(\pi + 2)\sin\gamma_{1,2} + 2(1 - \cos\gamma_{1,2} - \gamma_{1,2}\sin\gamma_{1,2})] = 0{,}14\, F/(r_a^2\,\sigma_{c_{1,2}}). \tag{13}$$

Apariția microașchierii elementelor articulațiilor de către particula abrazivă are loc atunci cînd se depășește deformația relativă de microașchiere $(\delta/r_a)_m$ [6],

$$(\delta/r_a)_{1,2} \geqslant (\delta/r_a)_m. \tag{14}$$

Valorile $(\delta/r_a)_m$ sînt 0,1 pentru suprafeţe nelubrifiate şi 0,3 pentru suprafeţe lubrifiate. Pentru articulaţiile executate din oţeluri cu suprafeţele durificate ($HB = 2500 \ldots 4000$ N/mm^2) şi-n prezenţa abrazivilor de cuarţ (nisip) cu tensiunea critică $\sigma \approx 200 \ldots 600$ N/mm^2, deformaţiile sînt elastice sau elastoplastice, microaşchierile neputînd avea loc:

$$(\delta/r_a)_{max} = 0{,}5(200 \ldots 500)/(2500 \ldots 4000) = 0{,}025 \ldots 0{,}1 < (\delta/r_a)_m.$$

În acest caz real, volumul de material uzat depinde de numărul ciclurilor de solicitare la care apare particula de uzură, n_c, număr care se apreciază pe baza curbei de oboseală a materialului, $n_c \approx \varepsilon_0^t$, ε_0 fiind alungirea relativă a materialului la rupere, iar t coeficient de oboseală pentru deformaţii plastice.

3. CINEMATICA PARTICULEI ABRAZIVE ÎN INTERSTIŢIU

Pentru determinarea lungimii drumului de frecare, produs de particula abrazivă, este necesară cunoaşterea mişcării particulei în interstiţiul articulaţiei. Se consideră că viteza particulei este o combinaţie liniară a vitezelor v_1 şi v_2 ale suprafeţelor 1 şi 2 [6],

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2; \quad \alpha + \beta = 1, \tag{15}$$

şi coeficienţii α şi β sînt proporţionali cu durităţile suprafeţelor,

$$\alpha = HB_2/(HB_1 + HB_2); \quad \beta = HB_1/(HB_1 + HB_2). \tag{16}$$

Spaţiul parcurs de centrul O al particulei pînă într-un punct oarecare O_x se determină prin aproximarea $\widehat{OO}_x \approx \widehat{AC}_x \approx \widehat{BC}_x$ şi din asemănarea triunghiurilor curbilinii $AA_x\,C_x$, $AA_f\,C_f$, $BB_x\,C_x$ şi $BB_f\,C_f$

$$\widehat{OO}_x \approx (d/2)\,\varphi'\delta_{1x}/\delta_{1f} \approx (D/2)\,\varphi''\delta_{2x}/\delta_{2f}; \tag{17}$$

deformaţiile δ_{1x}, δ_{2x} dintr-un punct oarecare contribuie la oboseala materialului şi deci la apariţia particulelor de uzură, acceptînd că în zona interstiţiului minim (punctul C_f) deformaţiile δ_{1f} şi δ_{2f} sînt invers proporţionale cu durităţile respective,

$$\delta_{1f}/HB_1 = \delta_{2f}/HB_2. \tag{18}$$

În timp ce particula abrazivă parcurge distanţa unghiulară OO_x, există mişcare relativă atît între particulă şi fus, cît şi între particulă şi cuzinet. Vitezele relative ale particulei faţă de fus şi cuzinet sînt:

$$v_{a1} = v - v_1 = \beta(v_2 - v_1); \quad v_{a2} = v - v_2 = \alpha(v_1 - v_2). \tag{19}$$

Corespunzător acestor viteze, lungimile de frecare, produse de particula abrazivă pe cele două elemente ale articulației prin deplasarea din punctul O în O_x, sînt :

$$L_{f1} = v_{a1}\, t = (d/2d_a)\, \varphi'(HB_1/HB_2)\, (|v_1 - v_2|/v)\, \delta_{1x},$$
$$L_{f2} = v_{a2}\, t = (d/2d_a)\, \varphi'(HB_2/HB_1)\, (|v_1 - v_2|/v)\, \delta_{2x}, \tag{20}$$

t fiind timpul în care particula a parcurs distanța OO_x, iar φ' — unghiul de contact, în radiani, și care se determină cu (6).

4. INTENSITATEA DE UZARE PRODUSĂ DE PARTICULA ABRAZIVĂ

În timpul mișcării particulei în interstițiu, elementele articulației se deformează, volumele de material supus deformației (fig. 4*b*) putînd fi aproximate, prin calcul, cu relațiile :

$$V_{01x} = (1/3)\, S_{A_x ab}\, \widehat{AA}_x \approx (1/3)\, \delta_{1x}\, L_{f1}\, (d_a\, \delta_{1x})^{1/2},$$
$$V_{02x} = (1/3)\, S_{B_x cd}\, \widehat{BB}_x \approx (1/3)\, \delta_{2x}\, L_{f2}\, (d_a\, \delta_{2x})^{1/2}, \tag{21}$$

$S_{A_x ab}$, $S_{B_x cd}$ fiind suprafețele segmentelor de cerc delimitate de particulă (fig. 4*b*).

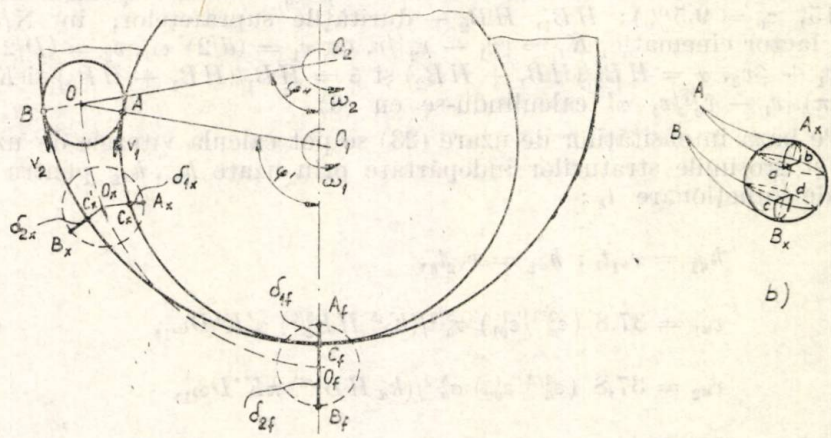


Fig. 4

Ținînd seama de (20), volumele de material deformat de o particulă abrazivă vor fi :

$$V_{01x} = (\sqrt{2}/12)\, (\delta_{1x}/r_a)^{5/2}\, (d/r_a)\, \varphi'(HB_1/HB_2)\, (|v_1 - v_2|/v)\, r_a^3,$$
$$V_{02x} = (\sqrt{2}/12)\, (\delta_{2x}/r_a)^{5/2}\, (d/r_a)\, \varphi'(HB_2/HB_1)\, (|v_1 - v_2|/v)\, r_a^3. \tag{22}$$

Se acceptă procesul de pătrundere a particulelor abrazive în interstiţiu ca un proces aleator [2], astfel că dacă în zona de intrare în interstiţiu se găseşte o particulă abrazivă mai mare, atunci fie că se „sparge" aceasta, fie că vor fi altele mai mici şi care vor pătrunde în interstiţiu. Potrivit [2], se poate considera că unei particule abrazive i se pot asocia, orientativ 7 alte particule ce amplifică procesul de uzare.

Dacă particulele abrazive sînt uniform distribuite în volumul de lubrifiant sau aer, atunci pe suprafaţa elementară de frecare ΔA_a se pot găsi

$$n_{A\Delta_a} = n_{\Delta V}^{2/3} = 1{,}16 \cdot 10^{-2}\, \varepsilon_a^{2/3}/r_a^2 \text{ particule.}$$

Definind intensitatea liniară adimensională de uzare, $I_u = \Delta h/L_f$, în care Δh este grosimea stratului uzat de N particule abrazive, într-un punct care a efectuat lungimea de frecare L_f într-un timp de funcţionare t, din (8), (20) şi (22) se deduc :

$$I_{u1} = 6{,}8(A/M_1)\, K_1;\ I_{u2} = 6{,}8\,(A/M_2)\, K_2, \tag{23}$$

în care A este factorul abrazivului, $A = \varepsilon_a^{2/3}\ \sigma_a^{5/2}$; ε_a fiind în % şi σ_a în N/m^2 ; $M_{1,2}$ — factorul materialului 1 sau 2, $M_1 = \varepsilon_{01}^t\, HB_1^{1,5}\, HB_2$, respectiv $M_2 = \varepsilon_{02}^t\, HB_1\, HB_2^{1,5}$, ε_{01}, ε_{02} sînt deformaţiile relative la rupere ale celor două materiale separate de particula abrazivă, în % ; t — exponent caracteristic materialului (pentru OLC $t = 3$, $\varepsilon_0 = 6{,}5\%$; pentru fontă $t = 4{,}15$, $\varepsilon_0 = 9{,}5\%$); HB_1, HB_2 — durităţile suprafeţelor, în N/m^2 ; $K_{1,2}$ — factor cinematic, $K_1 = |v_1 - v_2|/v$, cu $v_1 = (d/2)\ \omega_1$, $v_2 = (D/2)\omega_2$, $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, $\alpha = HB_2/(HB_1 + HB_2)$ şi $\beta = HB_1/(HB_1 + HB_2)$ şi $K_2 = (\varphi'/\pi)\ |v_1 - v_2|/v$, φ' calculîndu-se cu (6).

Pe baza intensităţilor de uzare (23) se pot calcula vitezele de uzare v_{u1}, v_{u2} şi grosimile straturilor îndepărtate prin uzare h_{u1}, h_{u2} pentru un timp de funcţionare t_h :

$$h_{u1} = v_{u1} t_h\ ;\ h_{u2} = v_{u2} t_h,$$

$$v_{u1} = 37{,}8\ (\varepsilon_a^{2/3}/\varepsilon_{01}^t)\ \sigma_a^{5/2}/(k_d^{1,5}\, HB_2^{5/2})\ \varphi' K' D\omega_1, \tag{24}$$

$$v_{u2} = 37{,}8\ (\varepsilon_a^{2/3}/\varepsilon_{02}^t)\ \sigma_a^{5/2}/(k_d\, HB_2^{5/2})\ \pi K' D\omega_1,$$

în care $k_d = HB_1/HB_2$ este coeficient de duritate, $K' = (1 + k_d)\,(1 - \psi - k_\omega)\,(1 - k_\omega)/(1 - \psi + k_d k_\omega)$ este un factor cinematic şi de duritate, iar $k_\omega = \omega_2/\omega_1$ este factor al vitezei unghiulare. Unităţile de măsură ale mărimilor ce intervin în (24) sînt : pentru timpul t_h — ore ; pentru vitezele de uzare — μm/h ; pentru ε_a şi $\varepsilon_{01,2}$ — % ; pentru σ_a şi $HB_{1,2}$ — N/m^2 ; pentru φ' — rad ; pentru D — mm ; pentru ω_1 — rad/s. Pentru cazul particular, frecvent întîlnit în industria construcţiilor de maşini, $\omega_2 = 0$ şi rezultă $k_\omega = 0$ şi $K' = 1 + k_d$.

Dacă se acceptă că particulele abrazive din mediul de funcţionare a cuplei (ulei, aer) sînt variabile aleatoare, ca rază r_a, concentraţie ε_a şi

tensiune de „spargere" σ_a, atunci grosimea stratului îndepărtat prin uzare are caracter aleator. Evaluînd caracteristicile statistice ale particulelor abrazive prin media variabilelor ($\bar{r}_a$, $\bar{\varepsilon}_a$, $\bar{\sigma}_a$) și prin coeficienții de variație (c_{vr}, $c_{v\varepsilon}$, $c_{v\sigma}$), se deduc caracteristicile statistice principale (media și coeficientul de variație) ale grosimii stratului îndepărtat prin uzare [7]. Pentru calculul acestor caracteristice se consideră funcția vitezei de uzare ca fiind continuă și derivabilă, de variabile r_a, ε_a, σ_a. Dezvoltînd această funcție în serii Taylor în vecinătatea punctului ($\bar{r}_a$, $\bar{\varepsilon}_a$, $\bar{\sigma}_a$), rezultă:

$$\begin{aligned} v_{u1} &= k_{u1}(\bar{\sigma}_a/HB_2)^{2,5}\,\bar{\varepsilon}_a^{2/3}\,\bar{\varphi}'[1 + 2{,}5(\sigma_a/HB_2 - \bar{\sigma}_a/HB_2)/(\bar{\sigma}_a/HB_2) + \\ &\quad + (2/3)\,(\varepsilon_a - \bar{\varepsilon}_a)/\bar{\varepsilon}_a + (\varphi' - \bar{\varphi}')/\bar{\varphi}'] + R_1(v_{u1}), \\ v_{u2} &= k_{u2}(\bar{\sigma}_a/HB_2)^{2,5}\,\bar{\varepsilon}_a^{2/3}[1 + 2{,}5(\sigma_a/HB_2 - \bar{\sigma}_a/HB_2)\,\bar{\sigma}_a/HB_2 + \\ &\quad + (2/3)\,(\varepsilon_a - \bar{\varepsilon}_a)/\bar{\varepsilon}_a] + R_2(v_{u2}), \end{aligned} \tag{25}$$

$R_1(v_{u1})$ și $R_2(v_{u2})$ fiind termeni de ordin egal sau superior lui doi și care se neglijează deoarece erorile $(\sigma_a/HB_2 - \bar{\sigma}_a/HB_2)$, $(\varepsilon_a - \bar{\varepsilon}_a)$ și $(\varphi' - \bar{\varphi}')$ sînt foarte mici;

$$k_{u1} = 37{,}8\,K'D\omega_1/(\varepsilon_{01}^t\,k_a^{1,5}) \text{ și } k_{u2} = 37{,}8\,\pi K'D\,\omega_1/(\varepsilon_{02}^t\,k_a) \text{ — constante.}$$

Cu aceste precizări se determină media și coeficientul de variație ale vitezei de uzare abrazivă:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{u1} &= k_{u1}(\bar{\sigma}_a/HB_2)^{2,5}\,\bar{\varepsilon}_a^{2/3}\,\bar{\varphi}', \\ \bar{v}_{u2} &= k_{u2}(\bar{\sigma}_a/HB_2)^{2,5}\,\bar{\varepsilon}_a^{2/3}, \\ c_{vu1} &= (6{,}25\,c_{v\sigma}^2 + 2{,}25\,c_{v\varepsilon}^2 + c_{v\varphi'}^2)^{1/2}, \\ c_{vu2} &= (6{,}25\,c_{v\sigma}^2 + 2{,}25\,c_{v\varepsilon}^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Media și coeficientul de variație ale unghiului φ' se determină pe baza relației (6), considerînd ca variabilă aleatoare diametrul particulei abrazive $d_a = 2r_a$, astfel că

$$\bar{\varphi}' = \arccos\{[\psi - 1)\,(\bar{d}_a/D) + \psi_4/[\psi_2(\bar{d}_a/D) + \psi_3]\} \tag{27}$$

și

$$c_{v\varphi'} = \{[(\psi - 1)\,\psi_3 - \psi_2\psi_4\,(\bar{d}_a/D)\,c_{vda}\}/\{\bar{\varphi}'[\psi_2(\bar{d}_a/D) + \psi_3]^2\,[1 - \cos(\bar{\varphi}')^2]^{1/2}\},$$

în care $\psi_2 = \psi - 2\delta/D$; $\psi_3 = (\psi - 2\delta/D)\,(1 - \psi)$; $\psi_4 = \psi(1 + 2\delta/D) - \psi^2 - 2\delta^2/D^2$. Pe baza acestor caracteristici statistice, se pot preciza funcția de fiabilitate și durabilitatea. Atunci cînd se impune timpul de funcționare și grosimea limită a stratului uzat se determină funcția de fiabilitate, iar atunci

cînd se impune grosimea stratului uzat și funcția de fiabilitate se determină durata reală de funcționare.

5. APLICAȚII

a) *Cazul particulelor abrazive deterministe.* Să se precizeze vitezele de uzare ale elementelor articulației unui lanț cu role, cunoscînd că bolțul are diametrul $d = 7{,}92$ mm, bucșa are jocul relativ $\psi = 3^0/_{00} = 0{,}003$ și lățimea $L = 22{,}61$ mm. Bolțul și bucșa sînt executate din OLC 45 STAS 880-82, pentru care $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 6{,}5\%$ și $t = 3$; duritatea suprafeței exterioare a bolțului $HB_1 = 2500$ MPa, iar a suprafeței interioare a bucșei $HB_2 = 1800$ MPa. Lanțul funcționează imersat în ulei cu ramura sa inferioară. În ulei se găsesc particule abrazive de rază $r_a = 0{,}006$ mm, tensiunea de spargere $\sigma_a = 750$ MPa, duritatea $HB_a = 2000$ MPa, modulul de elasticitate $E_a = 5 \cdot 10^5$ MPa, coeficientul Poisson $\nu = 0{,}2$ și concentrația volumică $\varepsilon_a = 1{,}6\%$. Cinematica transmisiei cu lanț implică $\omega_1 = 3$rad/s și $\omega_2 = 1{,}2$ rad/s și au același sens. Sarcina transmisă este $F = 2200$ N.

Pe baza parametrului de încărcare (1) $C_p = 0{,}068 < 0{,}092$, rezultă că deformațiile din zona de contact sînt elastice [semiunghiul hertzian de contact $\varphi_0 = 0{,}3$ rad, relația (2), deformația relativă $\delta/D = 1{,}35 \cdot 10^{-4}$, relația (5)]. Particula abrazivă nu poate pătrunde în interstițiu dacă forța exterioară este aplicată mereu și nu-și schimbă sensul ($\varphi' = 1{,}58$ rad), însă poate pătrunde atunci cînd nu există forță exterioară ($d_a = 0{,}0120 < j = 0{,}0124$ mm). Dacă particula pătrunde în interstițiu, atunci este sfărîmată, rezultînd circa 22 particule sferice cu raza $r_{ai}/r_a = 9{,}89 \cdot 10^{-5}$. Deoarece în lubrifiant concentrația procentuală volumică a abrazivului este $\varepsilon_a = 1{,}6\%$, din (11) rezultă că în zona de contact sînt circa 5697 particule, preluînd fiecare forța $F_1 = 0{,}38$ N. În acest caz $\delta/r_a = 0{,}16 < (\delta/r_a)_{max} = 0{,}18$ și deci particulele nu se vor sparge. Deformațiile elementelor articulațiilor în contactul cu particulele abrazive sînt plastice, deoarece $\delta/r_a = 0{,}16 > (\delta/r_a)_{cr} = 1{,}76 \cdot 10^{-4}$, însă nu apare microașchierea atunci cînd lanțul este lubrificat. Vitezele de uzare ale bolțului și bucșei sînt

$$v_{u1} = 0{,}27 \ \mu\text{m/h} \text{ și } v_{u2} = 0{,}64 \ \mu\text{m/h}.$$

b) *Cazul particulelor abrazive aleatoare.* Particulele abrazive sînt variabile aleatoare ca rază (r_a), tensiune de spargere (σ_a) și concentrație procentuală (ε_a). Elementele statistice ale acestora sînt mediile $\bar{r}_a = 0{,}006$ mm, $\bar{\sigma}_a = 750$ MPa, $\bar{\varepsilon}_a = 1{,}6\%$ și coeficienții de variație $c_{vr} = 0{,}12$, $c_{v\sigma} = 0{,}15$ și $c_{v\varepsilon} = 0{,}20$. Din (26) rezultă mediile vitezelor de uzare $\bar{v}_{u1} = 0{,}27$ μm/h, $\bar{v}_{u2} = 0{,}64$ μm/h și coeficienții de variație $c_{vu1} = 0{,}48$, $c_{vu2} = 0{,}48$. Dacă se acceptă că viteza de uzare are o lege de distribuție normală Gauss-Laplace, rezultă vitezele de uzare minime și maxime $v_{u1\,min} = \bar{v}_{u1}(1 - 3c_{vu1}) = 0$, $\bar{v}_{u2\,min} = 0$, $v_{u1\,max} = \bar{v}_{u1}(1 + 3c_{vu1}) = 0{,}65$ μm/h și $v_{u2\,max} = \bar{v}_{u2}(1 + 3c_{vu2}) = 1{,}56$ μm/h.

Primit la 15 ianuarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. H. PEEKEN, W. COENEN, *Einfluß der Schmierung auf das Verschleißverhalten von Rollenkelten*. Tribologie und Schmierungstechnik, 1 (1984).
2. G. I. IAMPOLSKII, I. V. KRAGHELSKII, *Issledovanie abrazivnogo iznosa elementov treniakacenia*, Nauka, Moskva, 1973.
3. I. V. IUJAKOV, *Analiz factorov, opredeliaiuscih intensivnosti iznașivania sopriajenia ghilzî țilindra-koliț avtomobilnîh dvigatelei*. Avtomobilinaia promîșlenosti, 10 (1976).
4. S. L. GAFIER, M. N. DOBÎCIN, *K rascetu ugla kontacta pri vnutreniem soprikosnovenii țilindriceskih tel, radiusi kotorih pociti ravni*, Mașinovedenie, 2 (1973).
5. A. TUDOR, *Contactul real al cuplelor de frecare*, Edit. Academiei (în curs de publicare).
6. I. V. KRAGHELSKII, *Trenie i iznos*, Mașinostroenie (1968).
7. A. TUDOR, GH. PRODAN, C. MUNTEAN, R. MOȚOIU, *Durabilitatea și fiabilitatea transmisiilor mecanice*, Edit. Tehnică, București, 1988.

D. S. ROSS (sub red.), *Machine Control Systems* (Sisteme de control automat al mașinilor), *Proceedings of the 2nd International Conference MACON 2, May 12—14, 1987, Birmingham, UK*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 312 p., numeroase figuri.

Volumul cuprinde 29 de comunicări prezentate la a doua conferință internațională dedicată sistemelor de control automat al mașinilor unelte, desfășurată la Birmingham în perioada 12—14 mai 1987.

Comunicările au un caracter unitar, abordînd sub diferite aspecte problema conducerii cu sisteme de calcul a proceselor industriale. Ele arată dezvoltarea automatizării acestor procese de la comanda numerică a mașinilor unelte și controlul lor cu ajutorul unui calculator central la automatizarea flexibilă realizată prin rețele de calculatoare care asigură o integrare computerizată a fabricației (CIM—computer integrated manufacturing). Automatizarea flexibilă este singura cale de creștere a productivității în condițiile unei producții diversificate. Dacă productivitatea putea fi asigurată în cazul seriilor mari prin conducerea cu calculatoare instalate la nivelul întreprinderii, descentralizarea prin conducerea distribuită a proceselor de producție poate asigura, prin incorporarea inteligenței artificiale, un randament al volumelor mici de producție comparabil cu cel atins în cazul seriilor mari.

Atenția este concentrată asupra celulelor formate din 2—6 utilaje controlate de calculator. O asemenea celulă este capabilă să realizeze un proces tehnologic în flux continuu în condițiile modificărilor la nivelul proiectului, dînd posibilitatea satisfacerii unor cereri diversificate din partea beneficiarilor. Integrarea utilajelor într-o celulă automată presupune realizarea unor calculatoare industriale, de înaltă fiabilitate, capabile să funcționeze în condiții ambientale diferite. De asemenea, este necesar să se rezolve problema interconectării acestor calculatoare într-o rețea care să permită informației să fie transferată prompt de la locul unde este produsă la locul unde trebuie utilizată.

Cele zece lucrări din secțiunea „Comunicații" dezvoltă protocolul de automatizare a fabricației (MAP) utilizat în vederea constituirii rețelei de comunicare pentru aplicații industriale (CNMA). Realizarea acestui protocol este bazată pe standardele elaborate în privința interconectării sistemelor deschise (OSI), care sînt aplicate de totalitatea corporațiilor care utilizează astfel de sisteme (COS).

Interconectarea mașinilor într-un sistem flexibil este o problemă logică, deci în mare măsură realizabilă prin software, astfel încît lucrările din secțiunea „Sisteme de control", în număr de șase, sînt orientate spre proiectarea fiabilă a soft-ului necesar unui sistem flexibil de producție (FMS). În aceeași secțiune se arată caracteristicile calculatoarelor industriale și modalitatea de alegere între automatizarea prin logică programată și cea prin calculatoare personale.

Secțiunea „Aplicații" cuprinde șapte lucrări care descriu celule automatizate din domeniul industriei constructoare de mașini. Cerința automatizării flexibile a apărut inițial în industria de automobile dar ea se generalizează rapid, astfel încît sînt prezentate realizări privind procese automatizate flexibile pentru realizarea elementelor turbinelor, a arcelor de oțel din galeriile de mină, a elementelor mașinilor Diesel etc. În general, aplicațiile se referă la acele domenii unde este necesară o diversificare a producției în condițiile unui randament ridicat.

Secțiunea „Perspective" cuprinde cinci lucrări care constituie contribuții privind realizarea în viitor a întreprinderii complet automatizate. Se arată posibilitatea realizării unui sistem automatizat flexibil de producție în industria de componente electronice și se examinează modificările pe care automatizarea flexibilă le impune la nivelul metodelor de proiectare.

Complexitatea sistemelor cu automatizare flexibilă impune o politică de mentenanță mai dezvoltată. Se argumentează necesitatea utilizării unui sistem expert privind diagnoza și mentenanța proceselor automatizate, acest sistem efectuînd și pregătirea eficientă a personalului de întreținere.

Prin caracterul practic al contribuțiilor, lucrarea este utilă tuturor celor interesați în creșterea productivității în industria constructoare de mașini prin utilizarea eficientă a celor mai noi principii și realizări din domeniul calculatoarelor electronice.

A. Mihalache

HARI KRISHNA, *Computational Complexity of Bilinear Forms. Algebraic Coding Theory and Applications to Digital Communication Systems* (Complexitatea de calcul a formelor biliniare. Teoria algebrică a codării și aplicații la sistemele de transmisiune digitală), în seria: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (sub red. M. Thoma și A. Wyner) vol. 94, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 166 p., 21 fig.

Lucrarea prezintă o nouă modalitate de obținere a codurilor liniare și aplicațiile acestora la sistemele de transmisiuni de date cu ARQ la care se realizează corecția adaptivă a erorilor.

Metoda are la bază corespondența între codurile liniare (n, k, d) și algoritmii de calcul pentru sisteme de k forme biliniare.

Lucrarea este structurată în două părți. Partea I (capitolele 2—5) este un studiu amănunțit al relației între codurile liniare și algoritmii de calcul al formelor biliniare iar partea a II-a (capitolele 6—8) prezintă aplicațiile acestor coduri la sistemele de transmisiuni de date cu corecția adaptivă a erorilor.

În capitolul 2 este definită noțiunea de complexitate multiplicativă a unui sistem de forme biliniare și prezentată legătura dintre aceasta și lungimea n a codului liniar asociat.

Sînt listate, de asemenea, rezultate utile din domeniul codurilor liniare corectoare de erori. Se arată astfel că, dat fiind un sistem $\psi = xy$ de forme biliniare liniar independente, pentru calculul fiecărui element al formei $\psi = C(Ax \times By)$, matricea C (de dimensiune $k \times n$) generează un cod liniar (n, k, d).

Capitolul 3 descrie algoritmi eficienți de calcul al convoluției aperiodice a două secvențe.

Capitolul 4 înglobează contribuțiile autorului la teoria codurilor liniare corectoare de erori: pornind de la convoluția aperiodică calculată ca $\Phi = P(Qx \times Ry)$, autorul demonstrează că matricea generatoare a codului (n, k, d) este $G = Q^T$.

Codul astfel generat are următoarele proprietăți importante:

a) $k + d - 1 =$ constant, ceea ce conduce la o metodă sistematică pentru creșterea (scăderea) lui k în scopul scăderii (creșterii) distanței d, pentru o lungime constantă n a codului;

b) pentru un număr fixat k de simboluri de informație, se poate varia distanța minimă d prin introducerea (ștergerea) de coloane în matricea generatoare, ceea ce conduce la o modificare corespunzătoare a lungimii codului. Proiectarea structurii codorului/decodorului nu este afectată substanțial de aceste modificări, fapt care permite încorporarea într-o singură structură a unei game largi de coduri.

Este prezentată în continuare metoda de codare folosind registre de deplasare cu reacție.

În capitolul următor este tratată problema corecției și detecției erorilor pentru codurile liniare generate de algoritmii de convoluție aperiodică. Se demonstrează că numărul de simboluri de informație și distanța (deci capabilitatea de corecție a codului) pot fi variate astfel încît lungimea codului să rămînă constantă, ceea ce atrage după sine o flexibilitate crescută a sistemului.

În capitolul 6 sînt prezentate cele trei metode de bază de realizare a sistemelor de transmisiuni ARQ (Automatic Repeat Request): ARQ cu așteptare, ARQ continuu și ARQ cu repetare selectivă, analizîndu-se performanțele acestora în funcție de calitățile canalului.

În cazul transmisiunilor pe canale proaste (cu parametri variabili în timp) sînt utile protocoalele hibride de comunicație și anume se recomandă combinarea codurilor corectoare de erori (transmisiuni FEC-Forward Error Control) cu condurile detectoare de erori (transmisiuni ARQ). Rezultă astfel protocoalele hibride ARQ de tip I și II.

În capitolul 7 este dezvoltată teoria ce stă la baza transmisiunilor GH—ARQ, o generalizare a metodei hibride ARQ de tipul II. Aceste transmisiuni utilizează codurile propuse de autor, deoarece lungimea și distanța minimă pot fi variate cu ușurință; aceste coduri pot asigura astfel corecția adaptivă de erori în cazul în care sînt multe cereri de retransmisie datorate proastei comportări a canalului.

Lucrarea se adresează cadrelor didactice, studenților, proiectanților și cercetătorilor din domeniul transmisiunii informației.

M. Beluri

R. BULIRSCH, A. MIELE, J. STOER, K. H. WELL (sub. red.), *Optimal Control* (Conducerea automată optimală) *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Edited by M. Thoma and A. Wyner*, (Note de lectură în teoria informației și a reglării, editate de M. Thoma și A. Wyner), vol. 95, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, XI + 330 p.

Volumul conține lucrările conferinței internaționale desfășurate la Oberwolfach, R. F. Germania, în perioada 15—21 iunie 1986, cu tema „Conducerea automată optimală și calculul variațional".

Cele 21 comunicări selectate pentru a fi publicate în volumul lucrărilor conferinței sînt grupate în șase secțiuni după cum urmează :

1. „Teorie și metode de calcul", cu nouă articole referitoare la metode de perturbații singulare, jocuri diferențiale deterministe, soluții numerice pentru probleme de comandă optimală și analiza de sensibilitate a structurilor elastice cu parametrii distribuiți etc.

2. „Comanda traiectoriei navelor aeriene", incluzînd în șase articole soluții pentru probleme de : ascensiune în timp minim, consum minim de carburant pe km sau pe oră, urmărire-fugă, optimizare în timp real a traiectoriilor de zbor care nu se pot planifica dinainte pentru navele aeriene militare, modelarea navei în spațiul 3D și optimizarea traiectoriei prin controlul curburii etc.

3. „Proiectarea sistemelor de comandă automată", cu două articole propunînd noi metode de sinteză și respectiv analiză.

4. „Comanda roboților" (două articole).

5. „Conducerea resurselor hidro", cu două articole legate de controlul calității apei și respectiv planificarea producției hidroenergetice.

6. „Conducerea automată în sistemele flexibile" (cu structură distribuită), cuprinzînd trei lucrări.

După cum se observă chiar din însăși gruparea comunicărilor precum și din conținutul majorității acestora, conferința a urmărit trecerea în revistă a unor rezultate teoretice și aplicative recente avînd în vedere, în primul rînd, utilizarea în probleme de mecanica zborului și înrudite. În plus, au fost incluse, în măsură mai redusă și rezultate în domenii deja tradiționale în literatură ca : proiectarea sistemelor de comandă automată, gospodărirea resurselor de apă și probleme economice.

Deși lucrările publicate acoperă o zonă de interes largă și diversificată, parcurgerea materialului permite extragerea unor concluzii comune, nelegate de un domeniu de aplicație sau altul, suficient de edificatoare pentru evaluarea stadiului și tendințelor din domeniu, după cum urmează :

a) În marea majoritate a lucrărilor se abordează probleme neliniare pentru care se propun în general soluții numerice și uneori analitice. Se propune chiar și o lege de reglare în articolul lui H. Bourdache (LSS-ESE, Franța) intitulat „On the synthesis of optimal nonlinear feedback control" (care, în treacăt fie spus, ar fi putut fi plasat mai degrabă în secțiunea 3 decît în secțiunea 2).

b) O serie de articole propun abordări integrate care combină tehnici de rezolvare, dezvoltate pînă acum, în general, în mod separat. În majoritatea cazurilor, aceste abordări sînt determinate de necesitatea găsirii unor căi pentru depășirea dificultăților de soluționare a problemelor complicate datorită prezenței neliniarităților, singularităților și incertitudinii. În acest sens se poate menționa construirea soluțiilor aproximative pentru o problemă de optimizare neliniară cu aplicații în mecanica zborului în straturile atmosferice, bazat pe metode de perturbare a ecuațiilor diferențiale ordinare împreună cu o tehnică de dezvoltare asimptotică ajustată, folosită în general pentru probleme de mecanica fluidelor descrise de modele cu derivate parțiale (H. Ardema de la Santa Clara Univ. în lucrarea „Singular perturbations and asimptotic extensions in nonlinear optimal control"). Un alt exemplu îl constituie lucrarea „Reduction of deterministic differential games to problems of optimization : the method of successive approximations" a lui C. Marchal, de la OMERA DES, Franța. În alte situații, combinarea unor tehnici diferite urmărește evitarea neajunsurilor fiecărei tehnici luată în parte, cum propune de exemplu R. Longman (Columbia Univ.), în articolul „Topics in fixed order controller design", utilizarea, într-o procedură cu patru etape, a metodelor de alocare a polilor și de optimizare linear-pătratică.

c) În condițiile disponibilităților unor programe de calculator pentru optimizare, o atenție sporită o recapătă problemele de alegere, construire și comparare a modelelor cele mai adecvate. Exemple semnificative în acest sens sînt lucrările „Aircraft minimum to climb model comparison" a lui B. Pierson și S. Ong (Jowa State Univ.) și „A new approach for optimizing hydropower system" a lui S. Soliman și G. Christinsen (Univ. of Alberta, Canada).

d) Multe lucrări, inclusiv cele din prima secțiune, prezintă rezultate numerice și fac referiri la programe pe calculator elaborate.

e) Unele articole prezintă versiuni prescurtate sau combinate ale unor rezultate prezentate în lucrări anterioare mai extinse, volumul fiind, din acest punct de vedere, un index util pentru orientarea bibliografică a specialiștilor care au posibilitatea să îl studieze.

Cartea este utilă specialiștilor care abordează probleme de conducere optimală cu aplicații legate, în primul rînd, de domeniul navigației aeriene, dar și din alte domenii. Ea poate fi utilă și altor cercetători din domeniul matematicii aplicate și domeniul analizei numerice, în automatică sau în conducerea economică, în special prin posibilitatea evidențierii unor noi moduri de abordare și tendințe de dezvoltare și aplicare.

F. G. Filip

H. J. ENGELBERT, W. SCHMIDT (sub red.) *Stochastic Differential Systems* (Sisteme diferențiale stohastice), *Proceedings of the IFIP-WG 7/1 Working Conference, Eisenach, GDR, April 6—13*, 1986 (Lucrările Conferinței IFIP ținută la Eisenach, RDG, 6—13 aprilie 1986), în seria : *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, (sub. red. M. Thoma and A. Wyner), Vol. 96, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986, XII + 381 p., 16 fig.

A V-a conferință IFIP consacrată sistemelor diferențiale stohastice s-a ținut la Eisenach (R. D. G.) între 6 și 13 aprilie 1986. Întîlnirea a fost organizată în spiritul precedentelor care s-au ținut la Kyoto, Vilnjus, Visegrad și Marseille-Luminy și a fost consacrată cercetărilor recente în domeniul sistemelor diferențiale stohastice. Au fost luate în considerare următoarele direcții din domeniul amintit : sisteme stohastice infinit dimensionale, ecuații cu derivate parțiale stohastice și difuzia cu precizarea metodelor numerice asociate filtrarea stohastică și sisteme automate stohastice. Au participat cercetători din diferite țări, printre care și România. Volumul de față cuprinde cea mai mare parte a lucrărilor prezentate la Conferință.

Redactorii volumului au împărțit lucrarea în patru părți :

1. Sisteme stohastice infinit dimensionale și cîmpuri aleatoare. Ecuații stohastice cu derivate parțiale (14 lucrări).
2. Ecuații stohastice în teoria difuziei. Aproximarea difuziei (11 lucrări).
3. Sisteme automate stohastice (8 lucrări).
4. Probleme speciale în teoria martingalelor și în calculul stohastic (6 lucrări).

Partea 1 cuprinde o serie de lucrări consacrate modelării mai exacte, prin sisteme stohastice, a sistemelor cu fluctuații sau cu derivații mari. Dintre acestea menționăm : fluctuații pe termen lung a difuziilor slab interactive (p. 3) ; deviații mari ale difuziei în potențialul infinit dimensional bistabil (p. 51). Un alt grup de lucrări este consacrat filtrării stohastice. Menționăm : calculul de zgomot alb pentru filtrarea cu doi parametri (p. 61). Alte lucrări sînt consacrate rezolvărilor aproximative, dintre acestea menționăm : eroarea estimării în metoda elementului finit aplicat ecuației lui Zakai (p. 33) ; aproximarea finit-dimensională a ecuației Navier-Stokes stohastică (p. 109).

Partea a 2-a este consacrată în întregime problemelor de difuzie. Unele lucrări au caracter teoretic, specific teoriei sistemelor stohastice. Dintre acestea menționăm : deviații mari pentru ecuații diferențiale stohastice liniare (p. 117) ; estimările deviațiilor mari pentru ecuații stohastice semiliniare (p. 218). Remarcăm articolul de la p. 187 consacrat metodelor numerice, fără derivate, aplicate ecuațiilor diferențiale stohastice.

Partea a 3-a este consacrată problemelor specifice reglării automate în cadrul stohastic. Dintre lucrări remarcăm : un principiu de maximum stohastic (p. 247) ; reglare parțial observabilă a difuziilor (p. 272). Remarcăm lucrarea de la p. 294 consacrată aproximării finit dimensionale a ecuațiilor stohastice cu derivate parțiale.

Partea a 4-a are caracter mai puțin aplicativ și este consacrată teoriei martingalelor, calculele cu martingale și diferite formule de evaluare a caracteristicilor nemerice.

Lucrarea conține cercetări recente în domeniul ecuațiilor stohastice astfel că ea este de interes imediat matematicienilor probabiliști care modelează procesele aleatoare în diferite situații. Remarcă prezența în acest domeniu, la prima vedere pur nenumeric, a unor articole de modelare numerică și de aproximare finit-dimensională. Este o cale care deschide largi perspective de simulare numerică a ecuațiilor diferențiale stohastice.

D. Stanomir

A. ALONEFTIS, *Stochastic adaptive control. Results and simulations* (Controlul adaptiv stohastic. Rezultate și simulări). Lecture Notes in Control and Information Sciences (sub red. M. Thoma and A. Wyner), vol. 98, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 120 p., 164 fig.

Lucrarea prezintă metoda controlului auto-adaptiv al parametrilor aplicată sistemelor liniare cu o singură intrare și o singură ieșire supuse unor perturbații aleatoare. Se consideră atît sistemele invariante în timp, cît și cele cu parametri variabili. Procesul adaptiv este văzut în relația cu algoritmii de învățare. Controlul adaptiv poate simula sistemul uman de învățare, realizîndu-se astfel legătura cu inteligența artificială. Adaptarea este estimarea informației care, dacă ar fi dată apriori, ar permite controlul prin reacție negativă. Controlul este adaptiv din cauza ignorării parametrilor modelului sistemului. Punctul de vedere adoptat în lucrare este non-bayesian, în sensul că parametrii necunoscuți nu sînt randomizați, ci au valori deterministe.

Rezultatele privind estimarea parametrilor și controlul auto-reglabil sînt obținute pe baza metodelor gradientului stohastic și a algoritmilor de tipul celor mai mici pătrate. Simulările pe calculator confirmă performanțele algoritmilor, relevînd superioritatea metodei celor mai mici pătrate modificată.

Comanda adaptivă cu dispersie minimă și verosimilitate maximă este descrisă pentru sisteme ale căror parametrii formează un lanț Markov omogen. În final se prezintă o nouă abordare a sistemelor ale căror stări formează un proces Markov cu probabilități de tranziție staționare.

Principalul rezultat al cercetării întreprinse în lucrare este că proprietățile de stabilizare și de urmărire asimptotic optimală a controlului adaptiv sînt verificare de experimentele simulate în concordanță cu ipotezele admise.

A. Mihalache

S. P. BHATTACHARYYA, *Robust Stabilization Against Structured Perturbations* (Stabilizarea robustă la perturbații structurate), în seria : *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, (sub. red. by M. Thoma and A. Wyner), vol. 99, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, IX + 172 p., 23 fig.

Lucrarea este dedicată analizei și proiectării sistemelor pentru controlul obiectelor ale căror parametri fizici sînt supuși perturbațiilor. Sînt luate în considerație situațiile în care structura obiectului controlat este determinată, iar parametrii acestuia sînt cunoscuți dar sînt puternic perturbați cînd variază condițiile de funcționare a sistemului de control. Clasa perturbațiilor este, în acest caz, structurată, spre deosebire de cazul perturbațiilor nestructurate considerate în cadrul teoriei clasice a controlului robust.

Se studiază problema stabilității în buclă închisă a sistemelor liniare invariante în timp, parametrii fizici supuși perturbațiilor fiind reprezentați printr-un vector real.

Principalele obiective urmărite sînt : analiza stabilității unui sistem pentru domenii determinate ale perturbațiilor ; b) estimarea regiunii de stabilitate și c) sinteza controlerelor care permit obținerea marginilor de stabilitate corespunzătoare.

După un prim capitol introductiv intitulat „Fundamente și preliminării", cel de al doilea capitol, „Hipersfera stabilității în spațiul parametrilor", tratează problema stabilității robuste în termenii hipersferei stabilității, atît în cazul liniar, cît și în cazul afin. Regiunea sferică a stabilității implică ipoteza că perturbațiile au aceeași mărime în toate direcțiile.

În următoarele două capitole sînt luate în considerație perturbații cu ponderi specifice fiecărei direcții. Astfel, în capitolul al treilea, „Elipsoizii stabilității și politopurile perturbațiilor", se definește, în acest caz, o regiune de stabilitate mai generală, numită elipsoidul stabilității, și se rezolvă problema sintezei controlerului adecvat. Capitolul al patrulea, intitulat „Stabilizarea robustă ; cazul general", prezintă metoda de robustificare și marginea de stabilitate în situația în care coeficienții funcției de transfer a obiectului supus controlului se caracterizează printr-o dependență funcțională arbitrară.

Capitolul al cincilea, „Perturbații structurate în spațiul stărilor", este dedicat studiului margnii stabilității și al robustificării în cazurile stărilor, model ce permite o rezolvare mai naturală a problemelor. Metodele de calcul efective în care obiectul controlat este descris cu ajutorul modelului spațiului sînt prezentate în următorul capitol intitulat „Stabilizarea cu controlere de ordin fix"

În capitolul al șaptelea, „Proiectarea cu ajutorul spațiului stărilor a regulatoarelor de ordin scăzut", se propune un algoritm iterativ de stabilizare, dedus pe baza spațiului stărilor, pentru proiectarea regulatoarelor de ordin scăzut. Metoda constă în creșterea succesivă, în fie-

care iterație, a ordinului controlerului pînă cînd se obține stabilizarea sistemului. Numeroase exemple ilustrează aplicarea agoritmului propus.

Ultimul capitol, „Rezumat și cercetări în perspectivă", sintetizează rezultatele prezentate în lucrare și enunță problemele deschise care pot face obiectul unor investigări viitoare.

O bibliografie bogată de 70 titluri este propusă cititorului.

Lucrarea, întocmită pe baza principalelor rezultate obținute de autor și de colaboratorii săi, este scrisă clar, concis, tratările fiind riguroase dar fără ostentație. Ilustrările prin figuri și considerații fizice intuitive precum și numeroasele exemple practice conferă o deosebită atractivitate lecturii acestei cărți, utile unui larg cerc de specialiști din cele mai variate domenii ale științei și tehnicii.

A. T. Murgan

G. DE ROECK, A. SAMARTIN QUIROGA, M. VAN LAETHEM, E. BACKX (sub. red.), *Shell and Spatial Structures : Computational Aspects* (Structuri din plăci curbe subțiri și structuri spațiale : aspecte de calcul), în seria : *Lecture Notes in Engineering* (sub. red. C. A. Brebbia și S. A. Orszag), vol. 26, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 485 p.

Editura Springer a avut buna idee de a edita o serie de volume pe teme tehnice (intitulată Lecture Notes in Engineering) care conține comunicări mai lungi decît articolele obișnuite de reviste sau mai scurte și mai puțin formale decît monografiile sau manualele. Ele sînt publicate rapid, într-o formă prezentabilă și totuși economică, bazîndu-se pe reproducerea foto a manuscriselor dactilografiate prezentate de autori.

Volumul 26 de care ne ocupăm conține memoriile Simpozionului internațional care a avut loc între 14—16 iulie 1986 la Leuven, Belgia, cu tematica menționată în titlu.

Inițiativa organizării simpozionului a aparținut Grupului de lucru nr. 13 al I.A.S.S. (Metode numerice pentru structurile din plăci curbe subțiri și structuri spațiale) și Departamentului de Construcții al Universității catolice din Leuven.

Comunicările au fost grupate în următoarele 5 secțiuni :

1° Structuri din plăci curbe subțiri (11 comunicări),
2° Structuri spațiale (6 comunicări),
3° Analiza dinamică (7 comunicări),
4° Analiza neliniară (12 comunicări),
5° Prezentarea și interpretarea rezultatelor (8 comunicări),

Vom menționa în mod special comunicările de sinteză,

W. C. Schnobrich : Metode de calcul pentru structurile din plăci curbe subțiri (p. 1—17),

M. Papadrakakis : Metode de calcul pentru structurile spațiale (p. 121—148).

În intenția organizatorilor, simpozionul a fost gîndit ca un forum pentru discuții și schimburi de vederi între cercetători și specialiști în calculul numeric de o parte și ingineri din proiectare și execuție de cealaltă parte.

Comunicările din volum reflectă progresele din cercetare și tehnica de calcul. Ele pot fi consultate cu mult folos de un cerc larg de cititori.

M. V. Soare

B. ASANCHEYEV, *Calcul des structures en BASIC* (Calculul structurilor prin folosirea limbajului de programare BASIC), Eyrolles, Paris, 1984, 177 p.

Volumul a fost publicat în colecția Dosarele construcțiilor — seria Informatică aplicată — a editurii Eyrolles—Paris, cu scopul mărturisit de a oferi celor interesați un program general de calcul automat al structurilor de rezistență folosite curent în construcții. Programul este scris în limbajul de programare BASIC, are la bază metoda deplasărilor și este alcătuit din subprograme independente de tipul structurilor precum și din subprograme specifice structurilor calculate.

Lucrarea cuprinde șase capitole și două anexe.

În primul capitol se prezintă succint bazele metodei deplasărilor, formulările folosite fiind cele specifice calculului automat al structurilor.

Capitolul al doilea are ca obiectiv prezentarea detaliată a subprogramelor care alcătuesc programul general.

Următoarele patru capitole tratează despre modul de folosire a programului general pentru :

— calculul structurilor plane sau spațiale, alcătuite din bare articulate la capete, solicitate de încărcări aplicate la noduri ;

— calculul grinzilor continue ;

— rezolvarea problemelor de elasticitate plană cu ajutorul elementelor finite triunghiulare ;

— stabilirea repartiției tensiunilor tangențiale și determinarea momentului de inerție la bara solicitată la torsiune.

Anexele lucrării conțin indicații referitoare la modul de introducere în calcul a condițiilor de rezemare, precum și la gradul de ocupare a memoriei calculatorului pentru diferitele probleme tratate.

Întreaga expunere este ilustrată prin organigrame de calcul, prin liste ale subprogramelor elaborate și prin rulări ale programului pentru exemple de calcul judicios alese.

Limbajul de programare BASIC este cel specfic microcalculatorului Hewlett-Packard 9845, dar adaptarea lui la alte variante folosite de microcalculatoarele de altă fabricație se poate face cu un efort minim.

Programul general de calcul prezentat în această carte are avantajul de a putea fi adaptat, fără mari dificultăți, pentru rezolvarea de probleme care depășesc domeniile abordate, cum sînt, de exemplu, calculul cadrelor plane sau spațiale, plăcile plane, plăcile curbe etc. Operația de adoptare constă în modificarea matricelor de rigiditate corespunzătoare.

În ansamblu, volumul prezintă un program general de calcul pentru rezolvarea pe microcalculator a unor probleme de mecanica construcțiilor întîlnite frecvent în practica inginerească, scris în limbajul de programare BASIC, cu scopul de a oferi utilizatorilor posibilitatea de a rezolva singuri problemele care îi interesează, ajungîndu-se pînă la crearea de biblioteci personale de programe specializate pe tipuri de structuri. De aceea, consultarea lui este recomandată inginerilor care se ocupă de proiectarea construcțiilor, precum și studenților din anii superiori ai învățămîntului tehnic de construcții.

M.V. Soare și V. Petcu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 4 **iulie—august 1988**

SUMAR

GH. SILAŞ, I. SMICALĂ, Studiul sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate 297

ELENA UNGUREANU-DAVID, O problemă de mişcare cu singularităţi a fluidelor prin medii poroase neomogene 307

L. BRÎNDEU, DOINA DRĂGULESCU, Consideraţii privind evaluarea reducerii prin vibraţii a tensiunilor remanente 317

I. SETEANU, M. ERHAN, Aplicarea metodei elementelor finite la studiul curgerii turbionare a fluidului perfect 325

D. BENA, Mişcări cu circulaţie ale fluidelor compresibile în jurul unui profil cu punct angulos 331

M. V. SOARE, D. IORDACHE, Contribuţii la calculul numeric al plăcilor subţiri cilindrice de grosime variabilă 345

O. S. CREŢU, Tracţiunea elastohidrodinamică în angrenaje cilindrice evolventice . . . 359

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra condiţiilor de intrare în filmele de lubrifiant la numere Reynolds mari 369

Z. MORARIU, D. PAVELESCU, Problema termică la grupurile de etanşare cu inele de alunecare de grosime mare 377

T. DEMIAN, C. NIŢU, Influenţa frecării dintre ace şi ghidaje asupra funcţionării capetelor de imprimare matriceale balistice 385

M. A. DUMBRAVĂ, Principii moderne de optimizare în calculul lagărelor cu alunecare . 393

M. GAFIŢANU, V. ATANASIU, Aspecte teoretice şi experimentale ale durabilităţii roţilor dinţate cilindrice 399

Recenzii 405

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **31**, 5 (1986).

Referire la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

STUDIUL SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

de GH. SILAȘ și I. SMICALĂ

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Pentru sinteza mecanismelor și a mașinilor mecanice cu acțiuni vibropercutante, în vederea realizării unor regimuri optime de funcționare, se prezintă metode matriceale noi de studiu a sistemelor vibropercutante generale, cu mai multe grade de libertate. Utilizînd un operator matriceal de derivare parțială și introducînd funcții matriceale definite adecvat, relațiile dintre parametrii ciocnirilor consecutive pentru mișcările vibropercutante periodice se exprimă sub o formă compactă, chiar și în cazul forțelor perturbatoare periodice oarecare, nearmonice. Utilizînd aceste relații matriceale, se rezolvă problemele condițiilor de existență și de stabilitate ale mișcărilor vibropercutante periodice, precum și problema optimizării acestor mișcări.

1. INTRODUCERE

Studiul teoretic, prin metode exacte, al sistemelor vibropercutante, cu excepția unor cazuri cu totul particulare, este imposibil, atît datorită caracterului profund neliniar al ciocnirilor reale, cît și datorită acțiunii forțelor cu caracteristici neliniare și a legăturilor neolonome în intervalele de timp dintre ciocniri. Ca urmare, este necesar să se liniarizeze unele caracteristici și să se neglijeze efectul unor forțe în intervalele de timp dintre ciocniri. Chiar și în aceste condiții, determinarea mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante depinde în mare măsură de caracterul ciocnirilor.

În general, intervalele de timp în care au loc ciocnirile sînt mult mai mici decît intervalele de timp dintre două ciocniri consecutive, respectiv decît perioada mișcărilor vibropercutante periodice. Dacă intervalele de timp în care au loc ciocnirile pot fi neglijate, ciocnirile se consideră instantanee și sînt caracterizate de coeficientul de restituire la ciocnire. Astfel, pe baza acestor ipoteze simplificatoare a căror valabilitate se verifică prin încercări experimentale, pentru sistemele vibropercutante reale, rezultă modele mecanice caracterizate de parametrii dinamici ce se determină experimental sau prin calcul. Se constată că marea majoritate a sistemelor vibropercutante întîlnite în aplicații pot fi reduse, cu o bună aproximație, la modele mecanice descrise de ecuații diferențiale liniare între ciocniri și cu ciocniri instantanee.

2. STABILIREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII ÎNTRE CIOCNIRI A SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

Pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate între două ciocniri consecutive metoda cea mai generală este dată de utilizarea ecuațiilor lui Lagrange cu multiplicatori sau de speța a II-a, care se pot exprima sub formă

matriceală. Pentru aceasta se folosește un operator matriceal de derivare parțială a unei funcții reale scalare F de mai multe variabile reale $q_1, q_2, \ldots, q_n$, definit prin

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = \left\| \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial F}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial F}{\partial q_n} \right\|^T, \tag{1}$$

unde $\bar{q}$ reprezintă matricea coloană cu elementele q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Se consideră un sistem vibropercutant cu n grade de libertate supus la legături olonome scleronome ideale și având caracteristici elastice și de amortizare liniare. Notînd matricea coloană a coordonatelor generalizate prin $\bar{q}$, ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a se exprimă matriceal sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}(t) - \frac{\partial E_p}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\bar{q}}}, \tag{2}$$

în care E_c este energia cinetică a sistemului; E_p — energia sa potențială; E_d — funcția de disipare a energiei, iar $\bar{Q}(t)$ reprezintă matricea coloană, avînd ca elemente forțele generalizate perturbatoare. Pentru sistemul considerat, se poate scrie:

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \underline{b}\,\dot{\bar{q}}; \quad E_p = \frac{1}{2}\bar{q}^T \underline{d}\,\bar{q}; \quad E_d = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \underline{c}\,\dot{\bar{q}}, \tag{3}$$

unde matricele $\underline{b}$, $\underline{c}$ și $\underline{d}$, de inerție, de amortizare și de rigiditate sînt pătrate, simetrice și cu elemente constante. De asemenea, se consideră că sistemul are amortizare vîscoasă uniformă [1], astfel încît matricea de amortizare se exprimă sub forma

$$\underline{c} = 2\alpha \underline{b} + 2\beta \underline{d}. \tag{4}$$

Înlocuind expresiile (3) în (2), se obțin ecuațiile diferențiale liniare ale mișcării sistemului vibropercutant între ciocniri,

$$\underline{b}\,\ddot{\bar{q}} + \underline{c}\,\dot{\bar{q}} + \underline{d}\,\bar{q} = \bar{Q}(t), \tag{5}$$

3. MODELAREA MATEMATICĂ A CIOCNIRILOR

În cazul ciocnirilor instantanee se ține seama de deformațiile corpurilor în zonele locale de contact în timpul ciocnirilor prin coeficientul de restituire la ciocnire R.

Pentru orice cuplă sau semicuplă percutantă se poate stabili o relație între parametrii de poziție ai corpurilor ce participă la ciocnire pe baza unei funcții corespunzătoare unei legături unilaterale [2]. În cazul cel mai general, legătura unilaterală corespunzătoare unei cuple percutante se exprimă printr-o relație de forma

$$f(q) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geqslant 0, \tag{6}$$

în care este valabilă inegalitatea în intervalele de timp dintre ciocniri și egalitatea în timpul ciocnirilor.

Pentru ca să aibă loc ciocnirea de ordinul k, la începutul ciocnirii, în momentul t_k^0, este necesar ca f să fie descrescătoare, deci va fi verificată relația

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k < 0, \tag{7}$$

unde indicele zero se referă la începutul ciocnirii, iar $(\dot{\bar{q}})_k$ reprezintă matricea coloană a vitezelor generalizate de la începutul ciocnirii. La sfîrșitul ciocnirii, în momentul t_k', este necesar ca funcția legăturii unilaterale să fie crescătoare, astfel încît rezultă

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k' > 0, \tag{8}$$

în care matricea coloană $(\dot{\bar{q}})_k'$, conține vitezele generalizate de la sfîrșitul ciocnirii. În momentul intermediar t_k'', care separă cele două faze ale ciocnirii, trebuie să fie îndeplinită relația

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k'' = 0, \tag{9}$$

în care matricea coloană $(\dot{\bar{q}})_k''$ are ca elemente vitezele generalizate corespunzătoare momentului t_k''.

Pentru studiul ciocnirii, în intervalul neglijabil de timp în care are loc ciocnirea se neglijează forțele nepercutante și se aplică ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatorul λ al legăturii unilaterale. Înmulțind cu dt ecuația matriceală care se obține și integrînd în intervalele de timp corespunzătoare celor două faze ale ciocnirii, rezultă

$$\begin{aligned}(\dot{\bar{q}})_k'' - (\dot{\bar{q}})_k &= \mu_{02}\underline{b}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0,\\ (\dot{\bar{q}})_k' - (\dot{\bar{q}})_k'' &= \mu_{21}\underline{b}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0,\end{aligned} \tag{10}$$

unde μ_{02} și μ_{21} sînt multiplicatorii de impuls din cele două faze ale ciocnirii. Eliminînd $(\dot{\bar{q}})_k''$ din relațiile (7), (8), (9), (10) și ținînd seama de expresia coeficientului de restituire la ciocnire

$$R = \frac{\mu_{21}}{\mu_{02}} = -\frac{\left(\frac{df}{dt}\right)_1}{\left(\frac{df}{dt}\right)_0}, \tag{11}$$

care se determină experimental, se obțin vitezele generalizate de la sfîrșitul ciocnirii în funcție de vitezele generalizate de la începutul ciocnirii sub

forma matriceală

$$(\dot{\bar{q}})'_k = (\dot{\bar{q}})_k - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k\right]\bar{A}_0, \tag{12}$$

$$\bar{A}_0 = \frac{\underline{b}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T \underline{b}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0}.$$

4. DETERMINAREA CONDIȚIILOR DE EXISTENȚĂ ALE MIȘCĂRILOR VIBROPERCUTANTE PERIODICE

În primul rînd este necesar să se integreze ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive. Pentru aceasta, cunoscînd pulsațiile proprii p_s și vectorii proprii normați $\bar{\mu}_s (s = 1, 2, \ldots, n)$ dacă sistemul ar fi fără amortizare vîscoasă, cu transformarea de coordonate :

$$\bar{q} = \underline{\mu}\bar{\xi}, \qquad \underline{\mu} = \| \bar{\mu}_1 \; \bar{\mu}_2 \ldots \bar{\mu}_s \ldots \bar{\mu}_n \|, \tag{13}$$

ecuațiile diferențiale ale mișcării (5) se decuplează, obținîndu-se ecuația diferențială matriceală în coordonate normale :

$$\ddot{\bar{\xi}} + 2\underline{E}\dot{\bar{\xi}} + \underline{P}^2\bar{\xi} = \underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\bar{Q}(t), \tag{14}$$

în care matricele $\underline{M} = \underline{\mu}^T\underline{b}\underline{\mu}$, $\underline{P}^2 = \underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\underline{d}\underline{\mu}$ și $\underline{E} = \alpha\underline{I} + \beta\underline{P}^2$, rezultă diagonale, I fiind matricea unitate de ordinul n.

Introducînd funcția matriceală

$$\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}t) = \begin{Vmatrix} e^{\varepsilon_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\varepsilon_2 t} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & e^{\varepsilon_n t} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

unde $\varepsilon_s = \alpha + \beta p_s^2$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ sînt elementele nenule ale matricei diagonale $\underline{E}$, se efectuează o nouă transformare de coordonate :

$$\bar{\xi} = \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}t)\bar{u}, \tag{16}$$

astfel încît ecuația matriceală (14) devine :

$$\ddot{\bar{u}} + (\underline{P}^2 - \underline{E}^2)\bar{u} = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}t)\underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\bar{Q}(t). \tag{17}$$

Deoarece și ecuațiile diferențiale (17) sînt decuplate, se poate exprima sub formă matriceală soluția generală. Notînd $\underline{H}^2 = \underline{P}^2 - \underline{E}^2$, unde

matricea diagonală $\underline{H}$ are elementele nenule, $h_s = \sqrt{p_s^2 - \varepsilon_s^2}$, în general reale și introducînd funcțiile matriceale:

$$\underline{COS}(\tilde{h}t) = \begin{Vmatrix} \cos h_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos h_2 t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cos h_n t \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

$$\underline{SIN}(\tilde{h}t) = \begin{Vmatrix} \sin h_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin h_2 t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sin h_n t \end{Vmatrix},$$

se poate scrie:

$$\bar{u} = \underline{COS}(\tilde{h}t)\bar{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\bar{C}_2 + \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_0^t \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\tau)\underline{SIN}[\tilde{h}(t-\tau)]\underline{\mu}^T\bar{Q}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

Apoi este necesar să se exprime relațiile între parametrii ciocnirilor consecutive din condițiile de periodicitate ale mișcărilor vibropercutante sau din anumite condiții de periodicitate și simetrie, în funcție de tipul mișcărilor vibropercutante periodice care prezintă interes pentru aplicații. Pentru a avea mișcări vibropercutante periodice, din (19) rezultă că forțele perturbatoare generalizate $\bar{Q}(t)$ trebuie să fie periodice.

Dacă sistemul vibropercutant considerat are o cuplă percutantă, caracterizată prin funcția legăturii unilaterale generală ce verifică relația (6) și prin coeficientul de restituire R, iar forțele generalizate perturbatoare sînt periodice cu perioada T, în majoritatea cazurilor prezintă interes pentru aplicații mișcările vibropercutante periodice avînd perioada egală cu un multiplu întreg r al perioadei forțelor perturbatoare și cu o singură ciocnire într-o perioadă a mișcării. Pentru a determina aceste mișcări, ținînd seama de soluția generală (19) și de transformările de coordonate (13) și (16), legea mișcării sistemului vibropercutant între ciocnirile de ordinul k și $k+1$ se exprimă sub forma

$$\bar{q} = \underline{\mu}\,\underline{EXP}[-\tilde{\varepsilon}(t-t_k)]\{\underline{COS}[\tilde{h}(t-t_k)]\bar{C}_1 + \underline{SIN}[\tilde{h}(t-t_k)]\bar{C}_2\} +$$

$$+ \underline{\mu}\,\underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_0^t \underline{EXP}[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)]\underline{SIN}[\tilde{h}(t-\tau)]\underline{\mu}^T\bar{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Constantele de integrare $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ se determină din condițiile inițiale corespunzătoare sfîrșitului ciocnirii de ordinul k:

$$t = t_k; \qquad \bar{q} = (\bar{q})_k; \qquad \dot{\bar{q}} = (\dot{\bar{q}})'_k, \tag{21}$$

iar elementele matricei $(\bar{q})_k$ trebuie să verifice egalitatea în relația (6) corespunzătoare legăturii unilaterale.

Parametrii ciocnirii următoare se determină din condițiile finale corespunzătoare începutului ciocnirii de ordinul $k+1$:

$$t = t_{k+1}; \qquad \bar{q} = (\bar{q})_{k+1}; \qquad \dot{\bar{q}} = (\dot{\bar{q}})_{k+1}, \tag{22}$$

unde elementele matricei $(\bar{q})_{k+1}$ trebuie să verifice egalitatea din relația (6). Pentru mișcările vibropercutante periodice de tipul considerat, condițiile de periodicitate ale mișcării sînt:

$$t_{k+1} = t_k + rT; \quad (\bar{q})_{k+1} = (\bar{q})_k = \bar{q}_c; \quad (\dot{\bar{q}})_{k+1} = (\dot{\bar{q}})_k = \dot{\bar{q}}_c. \tag{23}$$

Impunînd condițiile (21), (22), (23) și ținînd seama de relațiile (12) dintre vitezele generalizate de la începutul și sfîrșitul ciocnirii de ordinul k, relațiile dintre parametrii ciocnirilor pentru mișcările vibropercutante periodice se pot exprima sub forma:

$$2\underline{H}\{\underline{CH}(\tilde{r}T) - \underline{COS}(\tilde{h}rT)\}\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{q}}_c + (1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T \dot{\bar{q}}_c\right]\underline{L}_1\underline{\mu}^{-1}\bar{A}_0 =$$

$$= \underline{L}_1\bar{S}_3 + \underline{L}_2\bar{S}_4, \tag{24}$$

$$\underline{L}_1\underline{\mu}^{-1}\bar{q}_c = \underline{SIN}(\tilde{h}rT)\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{q}}_c - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}rT)\bar{S}_4, \tag{25}$$

$$f(\bar{q}_c) = 0, \tag{26}$$

în care s-au folosit notațiile:

$$\underline{CH}(\tilde{\varepsilon}rT) = \frac{1}{2}[\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}rT) + \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}rT)],$$

$$\underline{L}_1 = \underline{H}[\underline{COS}(\tilde{h}rT) - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}rT)] - \underline{E}\,\underline{SIN}(\tilde{h}rT),$$

$$\underline{L}_2 = \underline{H}\,\underline{SIN}(\tilde{h}rT) + \underline{E}[\underline{COS}(\tilde{h}rT) - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}rT)], \tag{27}$$

$$\bar{S}_3 = \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)]\,\underline{COS}[\tilde{h}(\tau - t_k)]\underline{\mu}^T\bar{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\bar{S}_4 = \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)]\,\underline{SIN}[\tilde{h}(\tau - t_k)]\underline{\mu}^T\bar{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Deoarece $\bar{S}_3$ și $\bar{S}_4$ depind de t_k, din (24) se determină $\dot{\bar{q}}_c$ în funcție de t_k, iar din (25), după înlocuirea vitezelor generalizate de la începutul ciocnirilor, rezultă $\bar{q}_c$ în funcție de t_k. Momentele t_k în care au loc ciocnirile se obțin din (26). Pentru parametrii ciocnirilor astfel determinați este necesar să se obțină valori reale și să fie verificată relația (7).

5. STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCĂRILOR VIBROPERCUTANTE PERIODICE

Pentru studiul stabilității mișcărilor vibropercutante periodice determinate, se aplică o metodă de studiu în primă aproximație, bazată pe relațiile dintre parametrii ciocnirilor corespunzători ciocnirilor consecutive de ordinul k și $k+1$. Impunînd condițiile inițiale (21) și finale (22) în legea de mișcare (20) și ținînd seama de egalitatea din relația (6), valabilă în timpul ciocnirilor, aceste relații rezultă de forma:

$$\begin{gathered}\bar{\psi}_1[(\bar{q})_{k+1},\ (\bar{q})_k,\ (\dot{\bar{q}}_k),\ t_k,\ t_{k+1}] = \bar{0},\\ \bar{\psi}_2[(\dot{\bar{q}})_{k+1},\ (\bar{q})_k,\ (\dot{\bar{q}})_k,\ t_k,\ t_{k+1}] = \bar{0},\\ f[(\bar{q})_k] = f[(\bar{q})_{k+1}] = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Parametrii ciocnirilor pentru mișcările vibropercutante periodice se pot determina din relațiile (28) impunînd condițiile de periodicitate (23), obținîndu-se astfel relațiile (24), (25) și (26).

Se consideră perturbații inițiale mici, infinitesimale, pentru parametrii ciocnirilor mișcărilor vibropercutante periodice și se presupune că și perturbațiile parametrilor ciocnirilor de ordinul k și $k+1$ sînt mici. Deoarece relațiile (28) trebuie să fie verificate și de mișcarea perturbată, se poate scrie:

$$\begin{gathered}\bar{\psi}_1(\bar{q}_c + \Delta\bar{q}_{k+1},\ \bar{q}_c + \Delta\bar{q}_k,\ \dot{\bar{q}}_c + \Delta\dot{\bar{q}}_k,\ t_k + \Delta t_k,\ t_k + rT + \Delta t_{k+1}) = \bar{0},\\ \bar{\psi}_2(\dot{\bar{q}}_c + \Delta\dot{\bar{q}}_{k+1},\ \bar{q}_c + \Delta\bar{q}_k,\ \dot{\bar{q}}_c + \Delta\dot{\bar{q}}_k,\ t_k + \Delta t_k,\ t_k + rT + \Delta t_{k+1}) = \bar{0},\\ f(\bar{q}_c + \Delta\bar{q}_k) = f(\bar{q}_c + \Delta\bar{q}_{k+1}) = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Perturbațiile fiind presupuse mici, relațiile (29) se pot liniariza în raport cu acestea, în jurul valorilor corespunzătoare mișcării neperturbate. Pentru aceasta, funcțiile din membrul stîng al relațiilor (29) se dezvoltă în serie de puteri în raport cu perturbațiile parametrilor ciocnirilor și se neglijează termenii de grad superior lui 1. Avînd în vedere că parametrii ciocnirilor corespunzători mișcării neperturbate verifică relațiile (28), ecuațiile algebrice liniarizate în perturbații pentru studiul stabilității mișcărilor vibropercutante periodice rezultă de forma

$$\begin{gathered}\Delta\bar{\psi}_1(\Delta\bar{q}_{k+1},\ \Delta\bar{q}_k,\ \Delta\dot{\bar{q}}_k,\ \Delta t_k,\ \Delta t_{k+1}) = \bar{0},\\ \Delta\bar{\psi}_2(\Delta\dot{\bar{q}}_{k+1},\ \Delta\bar{q}_k,\ \Delta\dot{\bar{q}}_k,\ \Delta t_k,\ \Delta t_{k+1}) = \bar{0},\\ \left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T \Delta\bar{q}_k = \left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T \Delta\bar{q}_{k+1} = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Pentru sistemul vibropercutant considerat, ecuațiile liniarizate în raport cu perturbațiile parametrilor ciocnirilor sînt:

$$[(\underline{E}\underline{L}_2 - \underline{H}\underline{L}_1)\underline{EXP}(\widetilde{\varepsilon}rT) + \underline{E}^2 - \underline{H}^2]\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{q}_{k+1} - (\underline{E}^2 - \underline{H}^2)\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{q}_k +$$

$$+ [\underline{L}_2\underline{EXP}(\widetilde{\varepsilon}rT) + \underline{E}]\underline{\mu}^{-1}\Delta\dot{\bar{q}}_{k+1} - E\mu^{-1}\left\{\Delta\dot{\bar{q}}_k - (1+R)\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T \Delta\dot{\bar{q}}_k\right]\bar{A}_0\right\} +$$

$$+\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\underline{\mu}^{-1}\bar{q}_c+\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{q}}_c+\bar{S}_3)-\underline{M}^{-1}[\underline{L}_2\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}rT)+$$

$$+\underline{E}]\underline{\mu}^T\bar{Q}(t_k)\}\Delta t_{k+1}-[(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\underline{\mu}^{-1}\bar{q}_c+\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{q}}_c)-$$

$$-\underline{M}^{-1}\underline{E}\underline{\mu}^T\bar{Q}(t_k)]\,\Delta t_k=\bar{0}, \tag{31}$$

$$[(\underline{EL}_1+\underline{HL}_2)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}rT)+2\underline{E}\,\underline{H}]\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{q}_{k+1}-2\underline{EH}\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{q}_k+$$

$$+[\underline{L}_1\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}rT)+\underline{H}]\underline{\mu}^{-1}\,\Delta\dot{\bar{q}}_{k+1}-\underline{H}\underline{\mu}^{-1}\Big\{\Delta\dot{\bar{q}}_k-$$

$$-(1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T\Delta\dot{\bar{q}}_k\right]\bar{A}_0\Big\}+\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{H}\underline{\mu}^{-1}\bar{q}_c+\bar{S}_4)-$$

$$-\underline{M}^{-1}[\underline{L}_1\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}rT)+\underline{H}]\underline{\mu}^T\bar{Q}(t_k)\}\,\Delta t_{k+1}-[\underline{H}(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\underline{\mu}^{-1}\bar{q}_c-$$

$$-\underline{M}^{-1}\underline{H}\underline{\mu}^T\,\bar{Q}(t_k)]\,\Delta t_k=\bar{0},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T\Delta\bar{q}_k=\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\right)_0^T\Delta\bar{q}_{k+1}=0.$$

Ecuațiile matriceale (31) corespund unui sistem de $2n+2$ ecuații algebrice, liniar și omogen în raport cu perturbațiile parametrilor cioc-nirilor. Pentru acest sistem de ecuații se caută soluții de forma :

$$\Delta\bar{q}=\bar{U}\beta^k;\qquad\Delta\dot{\bar{q}}=\bar{V}\beta^k;\qquad\Delta t_k=W\beta^k. \tag{32}$$

După înlocuirea soluțiilor (32) în (31) și după simplificarea cu $\beta_k\neq$ $\neq 0$, pentru a avea soluții diferite de soluția banală se pune condiția ca determinantul sistemului să fie nul, astfel încît se obține ecuația caracteristică de forma

$$P_{2n}(\beta)=0, \tag{33}$$

unde P_{2n} este un polinom de gradul $2\,n$ în β, avînd coeficienții cunoscuți. Ținînd seama de forma (32) a soluțiilor sistemului de ecuații (31), pentru ca mișcările vibropercutante periodice determinate să fie stabile, este necesar ca rădăcinile ecuației caracteristice (33) să fie în modul subunitare. Aplicînd criteriul lui Schur coeficienților ecuației caracteristice, rezultă condițiile de stabilitate ale mișcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat.

6. OPTIMIZAREA SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

Pentru sinteza mecanismelor și mașinilor cu acțiuni vibropercu-tante, criteriul de optimizare cel mai frecvent utilizat îl constituie efi-ciența maximă, pentru care pierderea de energie cinetică în timpul cioc-nirilor este maximă. După cum mecanismele de acționare ale sistemelor vibropercutante pot fi schimbate sau nu, se pot formula două probleme pentru optimizarea acestora :

a) Fiind cunoscute forțele perturbatoare periodice, să se determine valorile optime ale parametrilor dinamici reglabili, astfel încît pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor să fie maxime.

b) Să se determine forțele perturbatoare periodice optime, pentru care pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor sînt maxime. Desigur, și în acest caz, parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant vor avea anumite valori optime, care trebuie să fie determinate.

Pentru sistemul vibropercutant considerat, pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii de ordinul k se exprimă prin

$$(\Delta E_c)_k = \frac{1}{2}\,(\dot{\bar{q}})_k^T \underline{b}(\dot{\bar{q}})_k - \frac{1}{2}\,[(\dot{\bar{q}})_k']^T \underline{b}(\dot{\bar{q}})_k' =$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 - R^2)\,\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k\right]^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T \underline{b}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0}\,. \tag{34}$$

Se constată că pierderea de energie cinetică în timpul unei ciocniri depinde în mare măsură de coeficientul de restituire la ciocnire R și de expresia $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T (\dot{\bar{q}})_k = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0$, care, conform relației (7), este negativă. Ca urmare, în ambele probleme de optimizare, după determinarea parametrilor ciocnirilor corespunzători mișcărilor vibropercutante periodice și stabile, se calculează expresia $(1 - R^2)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_0$ în funcție de parametrii dinamici ai sistemului vibropercutant. Problema optimizării se reduce la o problemă de minim a expresiei date în raport cu parametrii dinamici reglabili.

Pentru rezolvarea celei de a doua probleme de optimizare, se aplică teorema energiei cinetice sub formă diferențială într-un moment dintre ciocnirile consecutive de ordinul k și $k + 1$ și se integrează de la momentul t_k' corespunzător sfîrșitului ciocnirii de ordinul k pînă la momentul t_{k+1}^0 de la începutul ciocnirii următoare. Dacă sistemul vibropercutant are mișcări periodice cu perioada rT, pierderea de energie cinetică în timpul unei ciocniri rezultă de forma

$$(\Delta E_c)_k = \int_{t_k}^{t_k + rT} \bar{Q}^T(t)\dot{\bar{q}}\,\mathrm{d}t - 2\int_{t_k}^{t_k + rT} E_d(t)\,\mathrm{d}t, \tag{35}$$

în care primul termen din membrul drept reprezintă lucrul mecanic pozitiv efectuat de forțele perturbatoare într-o perioadă a mișcării, iar al doilea termen este lucrul mecanic negativ efectuat de forțele de amortizare viscoasă. Pentru a avea pierderi de energie cinetică maxime în timpul ciocnirilor, este necesar ca lucrul mecanic efectuat de forțele perturbatoare într-o perioadă a mișcării să aibă valori maxime. Se știe că, dintre toate forțele perturbatoare periodice, avînd perioada T și valorile extreme

date de $\bar{Q}_0$ și $-\bar{Q}_0$, această condiție este îndeplinită de forțele perturbatoare optime cu o variație dreptunghiulară în timp, de forma

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}_0 \operatorname{sign}(\sin \omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{36}$$

În cazul particular al unui sistem vibropercutant fără amortizare vîscoasă ($\alpha = \beta = 0$), care are mișcări vibropercutante periodice stabile cu perioada egală cu perioada forțelor perturbatoare optime ($r = 1$) și la care ciocnirile au loc în semiperioada de variație a acestora în care $\operatorname{sign}(\sin \omega t) \geqslant b$, expresia $(1 - R^2)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_0$, de care depinde pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirilor, rezultă

$$(1 - R^2)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -2(1 + R)\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_0^T \underline{\mu}\, \underline{M}^{-1} \underline{P}^{-1} \underline{COS}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\tilde{p}}{\omega}\right)\underline{SIN} \cdot$$

$$\left[p\left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau\right)\right]\underline{\mu}^T \bar{Q}_0,$$

unde $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ determină momentul ciocnirii. Se constată că această expresie este minimă dacă $\tau = 0$ sau $\tau = \frac{\pi}{\omega}$, deci sistemul vibropercutant are mișcări periodice optime dacă ciocnirile au loc în momentele în care se schimbă sensul forțelor perturbatoare.

Primit în redacție la 26 ianuarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADEȘ, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei București, 1975.
2. GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, *Sisteme vibropercutante*. Edit. Tehnică, București, 1986.
3. GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, I. SMICALĂ, *Eine matrizielle Methode für das Stabilitätsstudium der periodischen Bewegungen der mechanischen Stossschwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden*, Proceedings of the 5th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timișoara, 1985.
4. GH. SILAȘ, I. SMICALĂ, *Der matrizielle Ausdruck der Beziehungen zwischen den Allgemeingeschwindigkeiten vom Anfang und vom Ende des Zusammenstosses im Falle der augenblicklichen Zusammenstosse eines mechanischen Systems mit mehreren Freiheitsgraden*, Proceedings of the 5th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timișoara, 1985.
5. GH. SILAȘ, I. SMICALĂ, *Die Bestimmung der periodischen Bewegungen der linearen Stossschwingungssystemen mit gleichförmiger zähflüssiger Dämpfung, mit einem Stosspaar und mit mehreren Freiheitsgraden*, Proceedings of the 5th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timișoara, 1985.
6. I. SMICALĂ, *Contribuții privind studiul sistemelor vibropercutante prin modelare electrică*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara, 1987.

O PROBLEMĂ DE MIȘCARE CU SINGULARITĂȚI A FLUIDELOR PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

de ELENA UNGUREANU-DAVID

Universitatea din București

În lucrarea de față se rezolvă o problemă de mișcare plană a unui fluid incompresibil într-un mediu poros cu coeficientul de filtrație diferit în exteriorul și respectiv interiorul unei elipse. Singularitățile mișcării sînt date de existența a două izvoare la distanță finită și a unui curent uniform la mari distanțe.

1. INTRODUCERE

Spre deosebire de problemele de mecanica fluidelor libere, în cazul mișcării fluidelor prin medii poroase, intervine un factor important, care implică elaborarea unor modele matematice proprii acestor categorii de mișcări. Acest factor îl constituie coeficientul de permeabilitate al mediului poros. El poate fi același în tot domeniul mișcării sau variabil după o anumită lege, ceea ce determină rezolvarea unor probleme la limită diferite pentru fiecare caz în parte.

În lucrarea de față se prezintă o metodă de rezolvare a unei probleme de hidrodinamica mediilor poroase pentru mișcări plane în medii neomogene de tipul al doilea. Neomogenitatea este datorită prezenței unei porțiuni situate în interiorul unei elipse, în care permeabilitatea este diferită de cea din restul domeniului de mișcare. Singularitățile mișcării sînt date de existența a două izvoare la distanță finită și de un curent uniform la mari distanțe. Problema la limită constă în găsirea potențialului complex al mișcării. Determinarea soluției se face cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă, utilizindu-se o reprezentare conformă, iar problema la limită la care se ajunge este de tip Riemann.

În literatura de specialitate există numeroase lucrări în care au fost studiate diferite probleme de acest tip (de exemplu în [1—7]). Cele mai multe probleme au fost considerate pentru neomogenitate circulară. Din punct de vedere matematic, ele au condus la interesante soluții, obținîndu-se printre alte rezultate, diferite generalizări ale teoremei cercului [4, 5]. Au fost considerate și probleme cu neomogenitate dată de o elipsă, dar acestea prezintă dificultăți mai mari în rezolvare [3], [5—7].

2. FORMULAREA PROBLEMEI

În planul xOy se consideră elipsa E de semiaxe a și b, avînd ecuația $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Folosind variabila complexă, ecuația ei se poate scrie și sub formă parametrică $z^* = z^*(s)$, z^* fiind afixa unui punct oarecare de pe elipsă, iar s este un parametru real, ce va fi precizat ulterior, i$s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Notăm cu D_1 și D_2 domeniile din exteriorul și respectiv nteriorul elipsei E. Mediul poros ocupă tot planul și este saturat cu un

fluid incompresibil. Coeficientul de filtrație este egal cu $k_1 = \text{const.}$ în D_1 și cu $k_2 = \text{const.}$ în D_2, $k_1 \neq k_2$. În punctele P_1 și P_2, situate pe axa Ox, în exteriorul elipsei, cu afixele $z_1 = l$ și $z_2 = -l$, l real și $l > a$, se află două izvoare de debite q și $-q$. La mari distanțe există un curent uniform având direcția și sensul axei Ox și modulul vitezei V_0.

Problema este de a determina potențialele complexe ale mișcării din cele două domenii D_1 și D_2, știind că din acestea pot fi aflate toate celelalte elemente ale mișcării: presiuni, viteze, linii de curent, debite.

Relațiile dintre presiunile p_j, vitezele de filtrație $\vec{v}_j$ și potențialele φ_j ale vitezelor de filtrație din domeniile D_j, $j = 1, 2$, sînt date de legea lui Darcy [1], [8],

$$\vec{v}_j = \operatorname{grad} \varphi_j, \qquad \varphi_j = -\frac{k_j}{\gamma} p_j, \tag{1}$$

γ fiind greutatea specifică a fluidului și am presupus absența forțelor masice. Din ecuația de continuitate $\operatorname{div} \vec{v}_j = 0$ rezultă că φ_j sînt funcții armonice și se pot introduce potențialele complexe ale mișcării în cele două domenii, $f_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\psi_j(x, y)$, ψ_j fiind funcțiile de curent.

Scriem potențialele complexe sub forma

$$f_j(z) = f_0(z) + \tilde{f}_j(z); \; f_0(z) = V_0 z + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - l}{z + l}, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Funcția $f_0(z)$, definită în tot planul, conține singularitățile mișcării, iar funcțiile $\tilde{f}_j(z)$, definite numai în $D_j \cup E$, reprezintă părțile regulate ale potențialelor complexe. Trecînd, prin derivare cu z, la vitezele complexe, acestea se scriu sub aceeași formă,

$$w_j(z) = w_0(z) + \tilde{w}_j(z); \quad w_0(z) = V_0 + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{z - l} - \frac{1}{z + l}\right), \; j = 1, 2 \tag{3}$$

și de asemenea $w_0(z)$ conține singularitățile mișcării, iar $\tilde{w}_j(z)$ sînt părțile regulate ale vitezelor complexe.

Pe elipsa E se pun două condiții de racordare a presiunilor și a componentelor normale ale vitezelor de filtrație din cele două domenii, anume $p_1 = p_2$, $v_{1n} = v_{2n}$. Având în vedere relațiile de mai sus, după o serie de transformări, ele se scriu în funcție de vitezele complexe astfel

$$k_2 \operatorname{Re}\left[w_1(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right] = k_1 \operatorname{Re}\left[w_2(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right],$$

$$\operatorname{Im}\left[w_1(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right] = \operatorname{Im}\left[w_2(z^*)\frac{dz^*}{ds}\right]$$

Acestea se pot restrînge într-o singură relație complexă și având în vedere (3), se obține pe E următoarea condiție:

$$(1 - K)\overline{\tilde{w}_1(z^*)}\frac{dz^*}{ds} = (1 + K)\tilde{w}_1(z^*)\frac{dz^*}{ds} - 2\tilde{w}_2(z^*)\frac{dz^*}{ds} +$$

$$+ (K - 1)\left[w_0(z^*)\frac{dz^*}{ds} + \overline{w_0(z^*)}\frac{\overline{dz^*}}{ds}\right], \quad K = \frac{k_2}{k_1} \tag{4}$$

În ceea ce privește comportarea la infinit a funcției $\widetilde{w}_1(z)$, ea este de forma

$$\widetilde{w}_1(z)|_\infty = 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{5}$$

care rezultă din faptul că $f_1(z)$ este regulată peste tot în domeniul D_1, deci și în punctul de la infinit.

Problema poate fi rezolvată determinînd mai întîi vitezele complexe, apoi prin integrare în raport cu z se găsesc și potențialele complexe. Pentru viteze problema se pune sub forma următoare : se cere să se determine funcțiile $\widetilde{w}_1(z)$ și $\widetilde{w}_2(z)$ olomorfe în D_1, respectiv D_2, cu condiția (4) pe frontiera comună E și cu condiția (5) la infinit, după aceea din (3) se găsesc vitezele complexe $w_1(z)$ și $w_2(z)$.

3. REZOLVAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ

Funcția $\widetilde{w}_2(z)$, olomorfă în domeniul din interiorul elipsei, se poate dezvolta în mod unic într-o serie de forma [9]

$$\widetilde{w}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z), \tag{6}$$

unde $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sînt constante ce urmează a fi determinate, iar $P_n(z)$ sînt polinoame de gradul n, numite polinoamele lui Faber, care au proprietatea că depind numai de forma domeniului în care se dezvoltă funcția olomorfă. În cazul nostru domeniul D_2 este mărginit de elipsa E și se arată că ele au expresiile [6], [9]

$$P_n(z) = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^n + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b}\right)^n, \quad n \geqslant 1, \tag{7}$$

iar pentru $n = 0$ luăm $P_0(z) = 1$.

Cu aceasta relația (4) se mai scrie

$$(1 - K)\,\overline{\widetilde{w}_1(z^*)}\,\overline{\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s}} = (1 + K)\,\widetilde{w}_1(z^*)\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s} - 2\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s}\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z^*) +$$

$$+ (K - 1)\left[w_0(z^*)\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s} + \overline{w_0(z^*)}\,\overline{\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}s}}\right]. \tag{8}$$

Aici, cu excepția constantelor A_n care vor fi determinate ulterior dintr-o altă condiție, singura funcție necunoscută este $\widetilde{w}_1(z)$, olomorfă în D_1 și avînd la infinit comportarea dată de (5). Totuși problema este mai complicată pentru că în (8) apare și conjugata ei.

Pentru aflarea funcției necunoscute se procedează în felul următor : se introduce un plan complex ajutător Z, în care notăm cercul unitate $|Z| = 1$ cu C, domeniul din exteriorul său cu $\mathcal{D}_1$ și cel din interior

cu $\mathcal{D}_2$. Se reprezintă conform domeniul $\mathcal{D}_1$ din planul complex z pe domeniul $\mathcal{D}_1$ din acest plan, cu ajutorul funcției

$$z = h_1(Z) = \frac{a+b}{2} Z + \frac{a-b}{2} \frac{1}{Z}, \tag{9}$$

iar funcția inversă este

$$Z = \tilde{h}_1(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}, \tag{10}$$

unde radicalul este luat cu determinația reală pozitivă pentru z real și mai mare ca $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Între elipsa E și cercul C se realizează o corespondență biunivocă. Notăm cu $t = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, afixa punctului de pe C care corespunde punctului de afixă z^* de pe E. Relația dintre z^* și t este dată de funcția $z^* = h_1(t) = h_1(e^{i\theta})$, ceea ce înseamnă că parametrul real s din ecuația $z^* = z^*(s)$ a elipsei E se poate lua egal cu θ. Atunci derivata dz^*/ds care apare în (8) este egală cu

$$\frac{dz^*}{ds} = i\left(\frac{a+b}{2} t - \frac{a-b}{2} \frac{1}{t}\right).$$

Punctele de la infinit din cele două plane se corespund și ele, iar punctelor $P_1(l, 0)$ și $P_2(-l, 0)$ le vor corespunde punctele $N_1(L, 0)$ și $N_2(-L, 0)$ din exteriorul cercului C, unde $L = h_1(l)$, L real și $L > 1$.

Funcțiile $\tilde{w}_1(z)$ și $w_0(z)$, reprezentînd viteze complexe, se transformă după formulele [10]

$$\tilde{W}_1(Z) = \tilde{w}_1(z) \frac{dh_1}{dZ}, \qquad W_0(Z) = w_0(z) \frac{dh_1}{dZ}. \tag{11}$$

Facem observația că spre deosebire de funcția $w_0(z)$, care este definită în tot planul complex z, funcția transformată $W_0(Z)$ este definită numai în domeniul $\mathcal{D}_1$ din exteriorul cercului C, datorită reprezentării conforme care se realizează numai pentru domeniul exterior. Funcția $\tilde{W}_1(Z)$ este olomorfă în $\mathcal{D}_1$, iar $W_0(Z)$ are singularități de același tip ca și $w_0(z)$. Avînd în vedere (3), (9), (11), obținem

$$W_0(Z) = \left[V_0 + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{h_1(Z) - l} - \frac{1}{h_1(Z) + l}\right)\right] \frac{dh_1}{dZ} =$$

$$= V_0 \frac{a+b}{2}\left(1 - \frac{h}{Z^2}\right) +$$

$$+ \frac{q}{2\pi}\left(1 - \frac{h}{Z^2}\right)\left[\frac{ZL}{(Z-L)(ZL-h)} - \frac{ZL}{(Z+L)(ZL+h)}\right],$$

unde

$$h = \frac{a-b}{a+b}, \quad 0 \leqslant h < 1.$$

Avînd în vedere (11), condiția (8) se scrie pe cercul C sub forma

$$(K-1)\overline{\widetilde{W}_1(t)} = (K+1)\,t^2\widetilde{W}_1(t) - 2H(t) + (K-1)\,g_0(t), \tag{12}$$

unde

$$H(t) = \frac{a+b}{2}(t^2-h)\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n^*(t)\right); \quad P_n^*(t) = t^n + \frac{h^n}{t^n}, \tag{13}$$

$P_n^*(t)$ fiind transformatele polinoamelor din (7), iar funcția $g_0(t)$ are expresia

$$g_0(t) = t^2 W_0(t) - \overline{W_0(t)} = V_0\frac{a+b}{2}(1+h)(t^2-1) +$$

$$+\frac{q}{2\pi}\left[2\left(L+\frac{1}{L}+\frac{L}{h}+\frac{h}{L}\right)+L^2\left(\frac{1}{t-L}-\frac{1}{t+L}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{L^2}\left(\frac{1}{t-L^{-1}}-\frac{1}{t+L^{-1}}\right)+\left(\frac{h}{L}\right)^2\left(\frac{1}{t-hL^{-1}}-\frac{1}{t+hL^{-1}}\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{L}{h}\right)^2\left(\frac{1}{t-h^{-1}L}-\frac{1}{t+h^{-1}L}\right)\right]. \tag{14}$$

Aici am ținut cont de faptul că $\bar{t} = t^{-1}$, deoarece t este afixa unui punct de pe cercul unitate.

Condiția (5) de la infinit devine în noul plan

$$\widetilde{W}_1(Z)|_\infty = 0(Z^{-2}). \tag{15}$$

Problema la limită este acum de a determina funcția $\widetilde{W}_1(Z)$, olomorfă în $\mathcal{D}_1$, cu condiția (12) pe cercul C și condiția (15) la infinit.

Pentru rezolvarea acestei probleme se introduce o funcție definită în tot planul complex Z, olomorfă pe porțiuni, astfel,

$$\Phi(Z) = \begin{cases} \widetilde{W}_1(Z) & \text{în } \mathcal{D}_1, \\ \dfrac{}{\widetilde{W}_1\left(\dfrac{1}{\bar{Z}}\right)} & \text{în } \mathcal{D}_2. \end{cases} \tag{16}$$

Atunci condiția la limită (12) se scrie

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{17}$$

unde $\Phi^+(t)$ și $\Phi^-(t)$ sînt valorile pe cercul C ale funcției $\Phi(Z)$ din domeniul interior $\mathcal{D}_2$, respectiv cel exterior $\mathcal{D}_1$, iar

$$G(t) = \frac{K+1}{K-1}t^2, \quad g(t) = -\frac{2}{K-1}H(t) + g_0(t). \tag{18}$$

Condiția la infinit este

$$\Phi(Z)|_\infty = 0(Z^{-2}) \tag{19}$$

și în plus pe C mai avem condiția

$$\Phi^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}, \tag{20}$$

care rezultă din însăși definiția (16) a funcției $\Phi(Z)$.

Am ajuns la o problemă la limită de tip Riemann pentru funcția $\Phi(Z)$, olomorfă pe porțiuni, cu condiția (17) pe cercul C și condiția (19) la infinit [11].

Existența soluției acestei probleme poate fi studiată ușor. Se observă imediat că indicele problemei este 2, deci pozitiv, astfel încît soluția generală a problemei neomogene există pentru orice termen liber $g(t)$. Avînd în vedere comportarea la infinit, soluția generală va fi obținută abstracție făcînd de o constantă complexă C_0, care va fi determinată ulterior, împreună cu constantele $A_0, A_1, A_2, \ldots$, din condiția suplimentară (20).

Vom scrie direct soluția generală a problemei neomogene

$$\Phi(Z) = \begin{cases} -\dfrac{2}{K+1}\dfrac{M(Z)}{Z^2} + \dfrac{K-1}{K+1}\dfrac{N(Z)}{Z^2} + \dfrac{C_0}{Z^2}, & Z \text{ în } \mathcal{D}_1, \\ -\dfrac{2}{K-1}M(Z) + N(Z) + \dfrac{K+1}{K-1}C_0, & Z \text{ în } \mathcal{D}_2, \end{cases} \tag{21}$$

unde

$$M(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{H(\tau)}{\tau - Z}\,d\tau, \quad N(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C g_0(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau - Z}. \tag{22}$$

Avînd în vedere (13) și calculînd integralele lui Cauchy respective, se obține

$$M(Z) = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\,h\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n - hA_{n+2})\left(\dfrac{h}{Z}\right)^n & \text{în } \mathcal{D}_1, \\ \dfrac{a+b}{2}\left[A_1 hZ + A_2 h^2 + (Z^2 - h)\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n Z^n\right] & \text{în } \mathcal{D}_2. \end{cases} \tag{23}$$

Pentru calculul integralei din $N(Z)$ ținem cont de faptul că $h < 1$ și $L > 1$, deci funcțiile $1/(Z \pm L)$, $1/(Z \pm Lh^{-1})$ au singularități în domeniul exterior cercului, iar funcțiile $1/(Z \pm L^{-1})$, $1/(Z \pm hL^{-1})$ au singularități în domeniul interior. După calcularea integralelor lui Cauchy, rezultă

$$N(Z) = \begin{cases} -\dfrac{q}{2\pi}\left[\dfrac{1}{L^2}\left(\dfrac{1}{Z - L^{-1}} - \dfrac{1}{Z + L^{-1}}\right) + \left(\dfrac{h}{L}\right)^2\left(\dfrac{1}{Z - hL^{-1}} - \dfrac{1}{Z + hL^{-1}}\right)\right] & \text{în } \mathcal{D}_1, \\ V_0\,\dfrac{a+b}{2}(1+h)(Z^2 - 1) + \dfrac{q}{2\pi}\left[2(L + L^{-1} + Lh^{-1} + L^{-1}h) + \right. & \\ \left. + L^2\left(\dfrac{1}{Z - L} - \dfrac{1}{Z + L}\right) + \left(\dfrac{L}{h}\right)^2\left(\dfrac{1}{Z - Lh^{-1}} - \dfrac{1}{Z + Lh^{-1}}\right)\right] & \text{în } \mathcal{D}_2. \end{cases} \tag{24}$$

Înlocuim expresia din (21) în condiția (20) și obținem relația

$$2(K+1)\,M^+(t) - 2(K-1)t^2\,\overline{M^-(t)} - (K+1)^2\,C_0 + (K^2-1)t^2\bar{C}_0 =$$
$$= (K^2-1)N^+(t) - (K-1)^2t^2\overline{N^-(t)}, \tag{25}$$

unde $M^+(t)$ și $N^+(t)$, respectiv $M^-(t)$ și $N^-(t)$ sînt valorile la limită pe cercul C ale funcțiilor $M(Z)$ și $N(Z)$ din domeniul interior $\mathcal{D}_2$, respectiv cel exterior $\mathcal{D}_1$. Aceste valori la limită se calculează din (23), (24). Deoarece $\bar{t} = t^{-1}$, membrul stîng al relației (25) va fi o serie de puteri ale lui t. Atunci este de preferat ca și membrul drept să fie dezvoltat în serie după puterile lui t. Ținînd cont de faptul că $h < 1$, $L > 1$ și $|t| = 1$, funcțiile $N^+(t)$ și $\overline{N^-(t)}$ se dezvoltă în serie după t^n și în final egalitatea (25) se scrie

$$(K+1)(a+b)\left[-h(A_0 - hA_2) + \sum_{n=2}^{\infty}(A_{n-2} - hA_n)t^n\right] -$$
$$-(K-1)(a+b)\sum_{n=3}^{\infty}(\bar{A}_{n-2} - h\bar{A}_n)\,h^{n-1}\,t^n - (K+1)^2\,C_0 + (K^2-1)\bar{C}_0t^2 =$$
$$= (K^2-1)\,V_0\,\frac{a+b}{2}(1+h)(t^2-1) + \frac{q}{\pi}(K^2-1)\left[\frac{1+h}{L} -\right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+h^{2n-1}}{L^{2n-1}}t^{2n}\right] + \frac{q}{\pi}(K-1)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+h^{2n-1}}{L^{2n-1}}t^{2n}. \tag{26}$$

Se observă că atît în membrul stîng, cît și în cel drept nu avem termeni care să-l conțină pe t. Prin identificarea termenilor liberi și a coeficienților lui t^n, $n \geqslant 2$, din cei doi membri, obținem un sistem infinit de ecuații algebrice din care se determină constantele C_0 și A_n, $n \geqslant 0$,

$$C_0 = \frac{(K-1)(1-h^2)}{2L[K+1-h(K-1)]}\left[V_0L(a+b) - \frac{2q}{\pi}\right],$$
$$A_0 - hA_2 = \frac{2C_0}{(a+b)(1-h)},$$
$$A_{2n} - hA_{2n+2} = \frac{q}{\pi}\,\frac{(1-K)(1+h^{2n+1})}{(a+b)L^{2n+1}[K+1-(K-1)h^{2n+1}]},\quad n \geqslant 1, \tag{27}$$
$$A_{2n-1} - hA_{2n+1} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

Înlocuim aceste expresii în (23) și din (16,) (21) pentru Z în $\mathcal{D}_1$, se găsește funcția $\widetilde{W}_1(Z)$. Trecem apoi la planul z, înlocuind Z din (10) și folosind (11). Rezultă

$$\tilde{w}_1(z) = \frac{(K-1)(a+b)}{\sqrt{z^2-a^2+b^2}\,(z+\sqrt{z^2-a^2+b^2})}\left[\frac{(1-h^2)\left((V_0L(a+b) - \frac{2q}{\pi}\right)}{2L[K+1-h(K-1)]} -\right.$$
$$\left. - \frac{q}{\pi}\,\frac{1}{K+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n+1})(K+1-Kh^{2n+1})}{K+1-(K-1)h^{2n+1}}\left(\frac{a+b}{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}}\right)^{2n}\right].$$

Prin integrare în raport cu z se obține

$$\tilde{f}_1(z) = \frac{(1-K)(1-h^2)}{2L[K+1-h(K-1)]}\left[V_0 L(a+b) - \frac{2q}{\pi}\right]\frac{a+b}{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}} + \\ + \frac{q}{\pi}\frac{K-1}{K+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n+1})(K+1-Kh^{2n+1})}{(2n+1)[K+1-(K-1)h^{2n+1}]}\left(\frac{a+b}{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}}\right)^{2n+1}. \tag{28}$$

Pentru aflarea funcției $\tilde{f}_2(z)$ se integrează (6) în raport cu z și se are în vedere că

$$\int P_n(z)\,dz = \frac{a+b}{2}\left(\frac{P_{n+1}(z)}{n+1} - h\frac{P_{n-1}(z)}{n-1}\right).$$

Se regrupează termenii și se înlocuiesc constantele din (27). În final rezultă

$$\tilde{f}_2(z) = \frac{(K-1)(1+h)}{K+1-(K-1)h}\left[V_0 - \frac{q}{\pi}\frac{1}{L(a+b)}\right]z + \\ + (1-K)\frac{q}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n+1})[L(a+b)]^{-(2n+1)}}{(2n+1)[K+1-(K-1)h^{2n+1}]}[(z+\sqrt{z^2-a^2+b^2})^{2n+1} + \\ + (z-\sqrt{z^2-a^2+b^2})^{2n+1}]. \tag{29}$$

Funcțiile din (28) și (29) se înlocuiesc în (2) și se obțin potențialele complexe ale mișcării din cele două domenii. Astfel problema enunțată la începutul lucrării este rezolvată.

4. CAZURI PARTICULARE

a. Dacă în soluția de mai sus facem $k_1 = k_2$, deci $K = 1$, rezultă $\tilde{f}_1 = 0$, $\tilde{f}_2 = 0$, prin urmare $f_1(z) = f_2(z) = f_0(z)$, ceea ce corespunde mediului poros omogen.

b. Dacă se face $a = b$, deci $h = 0$, se obține soluția pentru neomogenitatea circulară.

c. Făcînd $k_2 = 0$, deci $K = 0$, se obține pentru $f_1(z)$ o expresie smplificată, iar $f_2(z) = 0$. Aceasta corespunde cazului unei incluziuni impermeabile situate în interiorul elipsei.

Primit în redacție la 7 martie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
2. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei, București, 1963.

3. G. V. GOLUBEV, P. G. DANILAEV, G. G. TUMAȘEV, *Opredelenie ghidroprovodnosti neodnorodnih neftianih plastov nelocalnimi metodami*, Kazan, 1978.

4. C. IACOB, *Asupra unei extinderi a teoremei cercului*, Comunicările Academiei R.P. România, **IX**, 8 (1959).

5. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Asupra mișcării apelor arteziene*, Analele Univ. București, Seria șt. nat., mat.-fiz., **15** (1957).

6. ELENA UNGUREANU-DAVID, *Probleme la limită în mișcarea fluidelor prin medii poroase neomogene*, St. și cerc. mat., **23**, 6 (1971).

7. ELENA UNGUREANU-DAVID, *Determinarea mișcării unui fluid într-un mediu poros cu neomogenitate eliptică*, St. și cerc. mat., **38**, 2 (1986).

8. H. I. ENE, S. GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973-

9. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, tome **II**, Paris, 1982.

10. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei — Gauthier-Villars, Bucharest—Paris, 1959.

11. F. D. GAHOV, *Kraevie zadaci*, Editura Fizmatghiz, Moscova, 1963.

CONSIDERAȚII PRIVIND EVALUAREA REDUCERII PRIN VIBRAȚII A TENSIUNILOR REMANENTE

de L. BRÎNDEU și DOINA DRĂGULESCU

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Se evaluează posibilitățile de reducere a tensiunilor remanente pornind de la curba caracteristică tensiune-deformație a materialului. Prin aplicarea vibrațiilor se presupune că materialul ajunge în domeniul plastic, astfel că în continuare se modifică numai componenta elastică a deformării, iar pentru poziția medie de vibrație va corespunde o tensiune situată sub cea inițială. Apoi, această diferență ce reprezintă reducerea tensiunii datorită vibrațiilor se evaluează pe baza mecanismului de producere a tensiunilor în domeniul plastic, folosind o reprezentare analitică a curbei tensiune-deformație pentru materialele cu consolidare liniară și în primă aproximație pentru mai multe materiale ce nu prezintă limită de curgere evidentă.

1. INTRODUCERE

Încercări de a reduce tensiunile remanente dintr-un corp prin utilizarea vibrațiilor există de peste o jumătate de secol. Cercetări sistematice privind clarificarea diferitelor aspecte ale acțiunii vibrațiilor asupra stării de tensiune a corpului sînt însă de dată mult mai recentă și au în general numai caracter experimental. Concluziile acestor cercetări, de multe ori contradictorii în ceea ce privește eficiența, nu au permis să se cristalizeze o opinie unică privind posibilitățile de utilizare a procedeului.

Cu toate acestea, față de detensionarea termică mult răspîndită în practică, utilizarea vibrațiilor prezintă multe avantaje. Astfel, se elimină unele urmări negative datorită încălzirii, ca deformații suplimentare, apariția de fisuri, oxizi sau chiar modificări ale structurii. În plus, nu mai sînt necesare utilaje speciale de încălzire și de tratament ceea ce micșorează simțitor cheltuielile de producție și consumul de energie.

În lucrare se evaluează posibilitățile de reducere a tensiunilor remanente pornind de la dependența tensiune-deformație caracteristică materialului. Pentru aceasta se presupune că prin aplicarea vibrațiilor se ajunge în domeniul plastic, iar pentru situația medie de vibrație va corespunde o tensiune situată sub cea inițială. Apoi, diferența obținută ce corespunde reducerii tensiunii prin aplicarea vibrațiilor se determină pe baza mecanismului de formare a tensiunilor în domeniul plastic, considerînd diferite posibilități de comportare a corpului în domeniul plastic.

2. PRINCIPIUL DETENSIONĂRII PRIN VIBRAȚII

Efectul produs de vibrații asupra tensiunilor existente în corp depinde în primul rînd de modul de acționare.

Este posibil ca sistemul de acționare să fie conceput încît să imprime corpului o tensiune oscilantă. Aceasta ar putea fi generată, spre exemplu, de un pulsator. Pentru o serie de probe supuse la acțiunea unei tensiuni

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 317–323

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

oscilante s-au obținut rezultate care arată condițiile în care apar reduceri ale tensiunilor remanente [1]—[4]. Pentru ca reducerea să fie substanțială, s-a arătat că nivelul tensiunilor trebuie să fie ridicat, existînd pericolul de oboseală sau chiar de rupere a materialului.

Din acest motiv, tot mai mult se folosesc surse de vibrații obișnuite inerțiale sau cinematice care acționînd asupra corpului produc deformații. Eficiența maximă a unei astfel de acționări se obține prin acordarea generatorului de vibrații încît să lucreze la rezonanță. Desigur, chiar în condițiile rezonanței, ceea ce de altfel nu se obține ușor, trebuie analizată măsura realizării detensionării.

Pentru ușurință se vor dezvolta raționamentele în cazul unui corp simplu, supus la întindere. Se consideră starea inițială de solicitare definită de tensiunea σ_0 corespunzătoare deformației ε_0 care în cazul corpului dat este împiedicată să-și revină. Deoarece deformația ε_0 este impusă corpului, rezultă că σ_0 va fi tensiunea ce se înmagazinează în corp.

Notînd prin $\Delta\varepsilon$ amplitudinea deformației în punctul considerat, produsă de generatorul de vibrații, deformația rezultantă se poate scrie:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \sin \omega t, \tag{1}$$

unde ω este pulsația vibrațiilor produse de generator. Evident, pulsația ω în condițiile realizării rezonanței trebuie să coincidă cu pulsația proprie a corpului pentru a obține amplitudinea maximă $\Delta\varepsilon$.

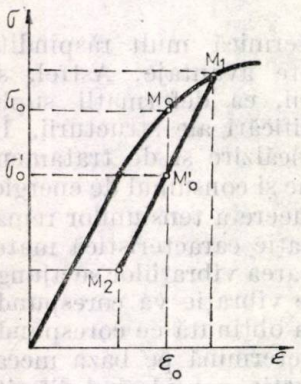


Fig. 1

Efectul produs asupra stării de tensiune a corpului se va urmări în diagrama tensiune-deformație ($\sigma - \varepsilon$) a corpului supus la întindere (fig. 1). De fapt se ține seama de dependența $\sigma - \varepsilon$ existentă la un anumit moment și nu de evoluția ei în timp. Desigur, este o primă aproximare care exprimă cantitativ aspectul staționar al fenomenului față de care mai pot să apară efecte suplimentare de relaxare.

Explicarea detensionării se bazează pe apariția ecruisării materialului ceea ce presupune că se ajunge la acționarea prin vibrații peste limita de curgere [5].

În esență, prin aplicarea vibrațiilor, materialul ajunge în stare plastică cel puțin pentru deformația maximă datorită vibrației, după care urmează descărcarea. Conform relației (1) deformația maximă este $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ și îi corespunde tensiunea σ_1, iar deformația minimă $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 - \Delta\varepsilon$ cu tensiunea asociată σ_2.

După mai multe cicluri de încărcare-descărcare parcurse datorită vibrării, tensiunea se stabilizează în poziția medie de vibrație. Prin urmare, deformației inițiale ε_0 la sfîrșitul procesului de vibrație îi va corespunde tensiunea

$$\sigma_0' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

În consecință, ca urmare a aplicării deformației (1) se realizează o reducere a tensiunii remanente dată de expresia

$$\Delta\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \tag{2}$$

Variația tensiunii în funcție de deformația aplicată (1) se poate ușor urmări pe diagrama din figura 1. Într-adevăr, pornind din punctul $M_0(\varepsilon_0, \sigma_0)$ se ajunge în $M_1(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1\sigma_1)$, după care pe o paralelă la porțiunea rectilinie corespunzătoare domeniului elastic are loc descărcarea pînă în $M_2(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon, \sigma_2)$. Urmează mai multe treceri înainte și înapoi (încărcare—descărcare) între punctele M_2 și M_1, pînă la oprirea ce va corespunde mijlocului M_0 al segmentului M_1M_2.

Pe baza observației că panta dreptei M_1M_2 trebuie să fie modulul de elasticitate E, se poate scrie

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon - (\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon)} = E$$

și deci

$$\sigma_2 = \sigma_1 - 2E\cdot\Delta\varepsilon. \tag{3}$$

Dacă în relația (2) se introduce expresia (3), rezultă formula

$$\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 + E\Delta\varepsilon. \tag{4}$$

Ținînd seama de datele concrete privind comportarea materialului, se poate calcula σ_1 și apoi raportul $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}$, care, procentual, dă o măsură a efectului detensionării prin vibrații.

3. DETENSIONAREA ÎN MATERIALE CU CONSOLIDARE LINIARĂ

În multe cazuri de materiale cu limita de curgere evidentă, diagrama $\sigma - \varepsilon$ se poate presupune în domeniul plastic cu consolidare liniară. Aceasta revine la a considera porțiuni rectilinii atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic cu panta modulului de elasticitate E, cît și în domeniul plastic cu panta modul de plasticitate E_p (fig. 2).

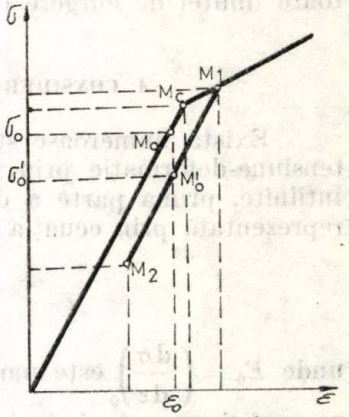


Fig. 2

Presupunînd tensiunea remanentă σ_0 în domeniul elastic ($\varepsilon_0 < \varepsilon_c$), este necesar ca în urma aplicării vibrațiilor să se ajungă în domeniul plastic, adică $\Delta\varepsilon > \varepsilon_c - \varepsilon_0$.

Analitic, dependența $\sigma - \varepsilon$ în domeniul elastic se va scrie :

$$\sigma = E\cdot\varepsilon \quad \text{pentru} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_c, \tag{5}$$

iar în domeniul plastic

$$\sigma = E_p \cdot \varepsilon + \frac{E - E_p}{E} \sigma_c, \text{ pentru } \varepsilon \geqslant \varepsilon_c, \tag{6}$$

unde ε_c și σ_c sînt deformația și tensiunea la limită de curgere.

Tensiunea σ_1 corespunzătoare deformației maxime $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, materialul fiind în domeniul plastic, se obține din ecuația (6) și are expresia

$$\sigma_1 = E_p(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) + \frac{E - E_p}{E} \sigma_c. \tag{7}$$

Dacă expresia (7) pentru σ_1 se introduce în formula (4) stabilită anterior, se deduce

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{E - E_p}{E} \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_0} + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\right). \tag{8}$$

Aceasta este pentru corpul cu consolidare liniară în domeniul plastic, măsura reducerii tensiunilor remanente din corp.

În particular, pentru corpul plastic ideal ($E_p = 0$), se obține

$$\frac{\Delta\sigma_i'}{\sigma_0} = 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_0} + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}. \tag{9}$$

Pentru simplificare se va considera tensiunea inițială la limita de curgere ($\sigma_0 = \sigma_c$) astfel că formula (9) devine :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}. \tag{10}$$

După cum se constată, reducerea tensiunilor remanente este proporțională cu amplitudinea vibrațiilor aplicate.

Relația (10) permite stabilirea eficacității aplicării vibrațiilor asupra reducerii tensiunilor remanente. Aceasta se face ușor dacă amplitudinile se determină experimental, iar deformația ε_0 se aproximează prin valoarea $\varepsilon_c = 0{,}2$, care reprezintă deformația specifică procentuală corespunzătoare limitei de curgere convențională.

4. CONSIDERAREA COMPORTĂRII COMPLET NELINIARE

Există numeroase studii privind exprimarea dependenței neliniare tensiune-deformație prin relații analitice [6]. În majoritatea situațiilor întîlnite, prima parte a dependenței $\sigma - \varepsilon$ s-a arătat că poate fi bine reprezentată prin ecuația

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + k\left(\frac{\sigma}{E_0}\right)^2, \tag{11}$$

unde $E_0 = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_0$ este modulul de elasticitate în origine, iar $k = 5 \div 7$ un coeficient ce depinde de material. Această relație stabilită de G. Jensch

[7] are valabilitate suficient de generală încît să poată fi acceptată pentru multe materiale.

Pe baza raționamentelor făcute anterior pentru materiale care se supun dependenței $\sigma - \varepsilon$ dată de ecuația (11), se va evalua efectul de reducere al tensiunilor produs de vibrații.

Deoarece punctele $M_0(\varepsilon_0, \sigma_0)$ și $M_1(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \sigma_1)$ se află pe diagrama $\sigma - \varepsilon$, sînt satisfăcute condițiile :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} + k\left(\frac{\sigma_0}{E_0}\right)^2 \tag{11'}$$

și

$$\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E_0} + k\left(\frac{\sigma_1}{E_0}\right)^2. \tag{11''}$$

Dacă între condițiile (11') și (11'') se elimină ε_0, se obține

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{E_0} + k\frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{E_0^2},$$

care se mai poate pune sub forma

$$k\sigma_1^2 + E_0\sigma_1 - E_0\sigma_0 - k\sigma_0^2 - E_0^2\Delta\varepsilon = 0. \tag{12}$$

Considerînd σ_1 ca necunoscută, din ecuația (12) rezultă

$$\sigma_1 = \frac{-E_0 + \sqrt{(E_0 + 2k\sigma_0)^2 + 4kE_0^2\Delta\varepsilon}}{2k}. \tag{13}$$

Cu ajutorul inegalității evidente, $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, se deduce

$$\sqrt{1 + \frac{4kE_0^2 \cdot \Delta\varepsilon}{(E_0 + 2k\sigma_0)^2}} < 1 + \frac{2kE_0^2\Delta\varepsilon}{(E_0 + 2k\sigma_0)^2}.$$

Conform acestei inegalități și a expresiei (13), pentru soluția σ_1 se poate scrie

$$\sigma_1 < \sigma_0 + \frac{E_0^2\Delta\varepsilon}{E_0 + 2k\sigma_0}. \tag{14}$$

Astfel, pe baza inegalității (14), din formula (3) rezultă

$$\Delta\sigma > \frac{2kE_0\sigma_0\Delta\varepsilon}{E_0 + 2k\sigma_0}. \tag{15}$$

Prin urmare, relativ, efectul de reducere prin vibrații al tensiunilor remanente va avea ca mărime cel puțin expresia

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{2kE_0\Delta\varepsilon}{E_0 + 2k\sigma_0}, \tag{16}$$

care, în condițiile $\sigma_0 \ll E_0$, devine

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 2k\Delta\varepsilon. \tag{17}$$

Este evident și aici că eficiența aplicării vibrațiilor va fi determinată de mărimea amplitudinii vibrațiilor transmise corpului. Formula (17) permite o evaluare a reducerii tensiunilor. Se observă ușor că această reducere este destul de mică chiar dacă amplitudinea deformațiilor are mărimea deformației de la limita de curgere, ceea ce este, însă, aproape imposibil de realizat.

5. CONCLUZII

În scopul micșorării efectului tensiunilor remanente, în ultima vreme se folosesc pe scară largă vibrațiile. Deși au mari avantaje față de procedeul termic, eficiența lor nu este încă complet lămurită.

Trebuie subliniat însă că datorită simplității aplicării vibrațiilor, acest procedeu este foarte util chiar dacă nu are efectul scontat.

Este recomandabil să se folosească sursele de vibrații, care, aplicate corpului, produc deformații vibratorii și care există în număr mare construite atît în străinătate, dar în ultima vreme și în țară. Efectul vibrațiilor asupra tensiunilor are la bază depășirea limitei de curgere și apariția ecruisării. Mecanismul de apariție a tensiunilor în domeniul plastic pentru cicluri de încărcare-descărcare succesive explică reducerea tensiunii.

Față de evaluările prezentate, care în cazuri concrete se estimează a fi destul de reduse, micșorarea tensiunilor este mai substanțială datorită unor efecte suplimentare de natură reologică, cum ar fi fenomenul de relaxare.

Concluziile stabilite se referă în mod direct la reducerea tensiunilor ce acționează în tot corpul (tensiuni de ordin I) care chiar dacă nu a rezultat suficient de importantă, nu trebuie să ducă la minimalizarea considerării efectului vibrațiilor. Mai trebuie subliniat că vibrațiile acționează simultan și asupra tensiunilor care apar la nivelul rețelei cristaline, în special cele de ordinul al III-lea și sînt responsabile de unele deformări ce apar la prelucrări ulterioare.

În esență, obiectivul principal al aplicării vibrațiilor este nu numai reducerea tensiunilor remanente, ci în special realizarea stabilizării dimensionale.

Primit în redacție la 1 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. GH. SILAȘ, H. KLEPP, L. BRÎNDEU, I. ORGOVICI, T. CIOARĂ, A. HEGEDÜS, *Asupra detensionării prin vibrații a unor piese turnate și subansambluri sudate*, Lucrări tehnico-științifice. Vibrații mecanice. „Cîntarea României". Timișoara, 13—15 mai 1977.

2. H. KLEPP, GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, *Influența coeficientului de asimetrie asupra eficacității detensionării prin solicitări oscilante a pieselor sudate*, Lucrări tehnico-științifice. Vibrații mecanice. „Cîntarea României". Timișoara, 13—15 mai 1977.

3. GH. SILAȘ, H. KLEPP, L. BRÎNDEU, *Asupra stabilizării formei la piese sudate sub acțiunea unor solicitări oscilante*, Bul. St. și Tehnic al I.P. Timișoara, Seria Mecanică, **23(37)**, 1(1978).

4. GH. SILAȘ, T. CIOARĂ, L. BRÎNDEU, C. NICOLESCU, *Metodă și instalație pentru stabilizarea dimensională a structurilor sudate cu ajutorul vibrațiilor mecanice*, Lucrările celei de-a II-a Conferințe de „Vibrații în construcția de mașini". Timișoara, 24—25 noiembrie 1978.

5. G. P. WOZNEY, G. R. CRAWMER, *An Investigation of Vibrational Stress Relief in Steel*, Welding Research Supplement, Sept.(1968).

6. P. A. LUCAȘ, *Osnovi nelineinoi stroitelnoi mehaniki*, Stroizdat., Moskva, 1978.

7. I. A. ODING, *Dopuskaemie napriajenia v masinostroenii i țikliceskaia procinoste metalov*, Mașghiz., Moskva, 1962.

APLICAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE LA STUDIUL CURGERII TURBIONARE A FLUIDULUI PERFECT

de I. SETEANU și M. ERHAN

Institutul Politehnic, București

Se analizează mișcarea turbionară a fluidului perfect incompresibil folosind metoda elementelor finite (varianta energetică). Distribuția spațială a vîrtejurilor se alege în conformitate cu observațiile experimentale. Se obține un sistem neliniar rezolvabil prin metoda Newton generalizată. Se prezintă rezultatele numerice, obținute cu un program de calcul în limbaj PASCAL, pentru curgerea în jurul unui sistem de bare cilindrice.

1. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Mișcarea plană a fluidului perfect incompresibil în domeniul limitat de frontiere solide se poate descrie complet cu ajutorul funcției de curent ψ care, în cazul general, este soluție a ecuației lui Helmholtz,

$$\frac{D(\Delta\psi, \psi)}{D(x, y)} = 0. \tag{1}$$

Această relație este echivalentă cu următoarea egalitate:

$$\Delta\psi = F(\psi), \tag{2}$$

adică orice soluție ψ a mișcării plane a fluidului perfect trebuie să verifice o ecuație de tip Poisson, cu membrul drept funcție de această soluție. Funcția F este dependentă atît de tipul mișcării (condițiile la limită și la mare distanță), dar și de distribuția spațială a intensității turbionare în domeniul de curgere. În acest fel, studiul mișcării plane turbionare se reduce la analiza relației (2), forma concretă a membrului drept se poate alege adecvat, eventual prin tatonări predictor-corector, în conformitate cu observațiile experimentale a unei mișcări date. Invers, pentru o distribuție impusă a intensității turbionare, soluția obținută este unică, dar semnificația fizică a acestei distribuții este mai puțin evidentă. De exemplu, se poate admite pentru funcția F o reprezentare polinomială cu coeficienți arbitrari, determinarea acestora constituind un element component al algoritmului de calcul,

$$F(\psi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi^i. \tag{3}$$

În particular, dacă polinomul este identic nul mișcarea este potențială, dacă gradul polinomului este egal cu unitatea mișcarea este cvasielicoidală etc.

Deși aplicarea metodei elementelor finite în schema energetică [1] este de obicei limitată la studiul ecuațiilor liniare cu derivate parțiale, prezintă interes extinderea acestei metode (mai plauzibilă fizic decît procedeul lui Galerkin al produselor generalizate) la ecuații generale de tipul (2).

Alegînd funcționala energetică, al cărui minim îl căutăm, de forma

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \left(k_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - G(\psi) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{4}$$

se obține un echivalent al problemei integrării ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = F(\psi), \tag{5}$$

dacă funcția $G(\psi)$ reprezintă primitiva în variabila ψ a membrului drept al ecuației (2),

$$G(\psi) = \int F(\psi) \, \mathrm{d}\psi + \text{const.} \tag{6}$$

Într-adevăr, considerînd separat contribuția în funcționala U doar a ultimului termen,

$$F_D = - \iint G(\psi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{7}$$

se obține expresia variației acestuia de forma

$$\delta F_D = - \iint G'(\psi) \, \delta\psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{8}$$

Ținînd seamă de expresia (4) a funcției G, relația (8) devine

$$\delta F_D = - \iint F(\psi) \, \delta\psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{9}$$

în conformitate cu relația (5) obținută cu metodele calculului variațional [2].

În cazul particular în care

$$G(\psi) = \frac{1}{2} k^2 \psi^2, \tag{10}$$

échivalentul problemei variaționale îl constituie ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = k^2 \psi, \tag{11}$$

care este o generalizare a problemei mișcării cvasielicoidale.

Aplicînd procedeul de minimizare funcționalei (4) se poate obține un sistem liniar de ecuații pentru domeniul elementelor finite triunghiulare, avînd ca necunoscute valorile ψ_i ale funcției de curent, discretizată în

nodurile rețelei triunghiulare. Contribuția funcționalei F_D pentru unul dintre elementele triunghiulare se poate aproxima pentru nucleul (10) sub forma

$$I_\psi = \iint_{R_j} k^2\psi^2 \, dx \, dy \simeq \bar{\psi}^2 \frac{|\Delta|}{2} \; k^2 \simeq \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}{6} |\Delta|, \tag{12}$$

unde $|\Delta|/2$ este aria elementului triunghiular.

În cazul general al nucleului $G(\psi)$ contribuția la funcționala F_D a unui element finit triunghiular are expresia aproximată

$$I_\psi = \iint G(\psi) \, dx \, dy \simeq \frac{G_1 + G_2 + G_3}{3} \frac{|\Delta|}{2}, \tag{13}$$

iar variația corespunzătoare se scrie

$$\delta I_\psi \simeq \frac{\Delta}{6} (F_1 + F_2 + F_3) \, \delta\psi. \tag{14}$$

În cazul general, ca urmare a procesului variațional de minimizare, se obține un sistem de ecuații neliniare, definite în nodurile rețelei triunghiulare de elemente finite. Problema are un caracter liniar doar în cazul în care nucleul $G(\psi)$ este un polinom de gradul 2 în ψ, fiind neliniară în general, neliniaritatea concentrîndu-se în expresia lui $G(\psi)$. Pentru rezolvarea sistemului neliniar obținut este convenabil să se folosească metoda lui Newton generalizată, alegînd adecvat un factor de suprarelaxare.

2. CURGEREA TURBIONARĂ PRINTR-O REȚEA DE BARE

S-a utilizat procedeul propus pentru a studia mișcarea cvasielicoidală plană în cazul în care

$$G(\psi) = 2\lambda\psi^2, \tag{15}$$

unde parametrul λ are o valoare relativ mică. Ultimul termen reprezintă abaterea mișcării de la caracterul potențial, corecția turbionară fiind suficient de redusă.

Funcționala (4) relativ la elementul finit R_j se scrie

$$U_j = \frac{1}{2} \iint_{R_j} \left(k_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 - 4\lambda\psi^2 \right) dx \, dy. \tag{16}$$

Se admite că elementul triunghiular este atît de puțin extins încît variația funcției ψ să poată fi admisă liniară pe R_j,

$$\psi = a_1 x + a_2 y + a_3, \tag{17}$$

cu condiţiile de vîrf :

$$\psi(x_1, y_1) = \psi_1, \quad \psi(x_2, y_2) = \psi_2, \quad \psi(x_3, y_3) = \psi_3. \tag{18}$$

Coeficienţii a_i $(i = 1 \ldots 3)$ din ecuaţia (17) au expresiile :

$$\begin{aligned} a_1 &= (b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + b_3\psi_3)/\Delta, \\ a_2 &= (c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3)/\Delta, \\ a_3 &= (d_1\psi_1 + d_2\psi_2 + d_3\psi_3)/\Delta, \end{aligned} \tag{19}$$

unde $b_1 = y_2 - y_3$; $c_1 = x_3 - x_2$; $d_1 = x_2y_3 - x_3y_2$ etc., iar $\Delta = (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1)$.

Rezultă

$$U_j = \frac{1}{2}(k_1a_1^2 + k_2a_2^2)\frac{|\Delta|}{2} - \frac{2\lambda}{3}(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)\frac{|\Delta|}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left(P_{km}^{(j)} + \frac{2}{3}\delta_{km}I_k\right)\psi_k\psi_m, \tag{20}$$

unde

$$I_k = -\lambda|\Delta|. \tag{21}$$

Coeficienţii $P_{km}^{(j)}$ se obţin după înlocuirea parametrilor a_i $(i = 1, 2, 3)$ cu expresiile (19) regrupate relativ la valorile necunoscute ψ_i ale funcţiei de curent în nodurile domeniului triunghiular.

În cazul mai general în care

$$G(\psi) = a_0 + a_1\psi + \varepsilon\psi^2, \tag{22}$$

procedeul se aplică analog, putîndu-se neglija puterile de ordin superior unităţii ale parametrului de corecţie turbionar ε.

Sistemul de ecuaţii obţinut pentru problema concretă analizată (15) s-a rezolvat prin metoda Gauss-Seidel cu număr de iteraţii impus (circa 200), interpolîndu-se în etapa finală coordonatele liniilor de curent, $\psi = \text{const.}$ în nodurile unei reţele rectangulare care acoperă domeniul de curgere.

S-a analizat, folosind un program de calcul în limbaj PASCAL HISOFT, curgerea turbionară produsă de o mişcare plan-paralelă, de translaţie la mare distanţă, între barele cilindrice ale unei reţele infinite, cu incidenţă frontală pe axa reţelei (fig. 1).

Datorită periodicităţii spaţiale evidente a spectrului hidrodinamic (perioada fiind egală cu pasul reţelei) şi ca urmare a simetriei curgerii faţă de mediatoarea segmentului determinat de două centre succesive ale barelor, este suficient să se limiteze analiza la domeniul din figura 2, limitat amonte şi aval de secţiuni normale pe direcţia curgerii. Deoarece ecuaţiile curgerii (2), (15) sînt invariante la schimbarea semnului coordonatelor, spectrul hidrodinamic în domeniu este simetric faţă de axa reţelei

de bare, întrucît condiția de curgere paralelă la mare distanță este aceeași, atît în secțiunea amonte, cît și în cea aval. În acest fel se poate restrînge studiul la zona amonte a curgerii, limitată de secțiunea normală pe direcția

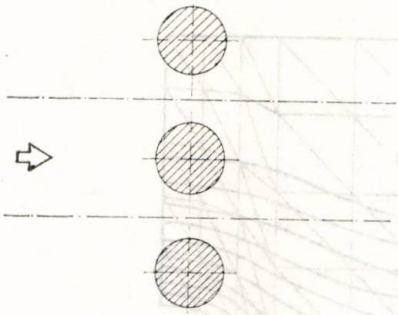


Fig. 1

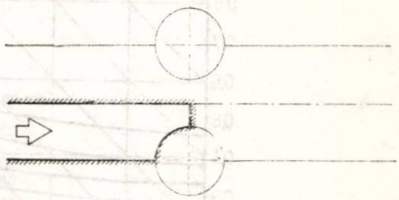


Fig. 2

de curgere la mare distanță și o secțiune după linia centrelor sistemului de bare care este normală pe liniile de curent ale curgerii (condiția la limită constă din anularea derivatei normale a funcției de curent).

S-au analizat cazurile $\lambda = 0$ (mișcarea potențială), $\lambda = 0{,}1$; 0,5 ; 1.1. În tabelul 1 se prezintă valorile funcției de curent și coordonatele nodu-

Tabelul 1

i	x	y	ψ	i	x	y	ψ
1	0.000	0.000	0.000	2	0.000	0.200	0.445
3	0.000	0.400	0.822	4	0.000	0.600	1.068
5	0.000	0.800	1.138	6	0.000	1.000	1.000
7	0.200	0.000	0.000	8	0.200	0.200	0.441
9	0.200	0.400	0.815	10	0.200	0.600	1.063
11	0.200	0.800	1.141	12	0.200	1.000	1.000
13	0.400	0.000	0.000	14	0.400	0.200	0.425
15	0.400	0.400	0.790	16	0.400	0.600	1.040
17	0.400	0.800	1.126	18	0.400	1.000	1.000
19	0.600	0.000	0.000	20	0.600	0.200	0.392
21	0.600	0.400	0.744	22	0.600	0.600	0.996
23	0.600	0.800	1.096	24	0.600	1.000	1.000
25	0.800	0.000	0.000	26	0.800	0.200	0.332
27	0.800	0.400	0.666	28	0.800	0.600	0.930
29	0.800	0.800	1.052	30	0.800	1.000	1.000
31	1.000	0.000	0.000	32	1.000	0.200	0.211
33	1.000	0.400	0.540	34	1.000	0.600	0.841
35	1.000	0.800	1.003	36	1.000	1.000	1.000
37	1.100	0.224	0.000	38	1.100	0.379	0.364
39	1.100	0.534	0.705	40	1.100	0.689	0.931
41	1.100	0.845	1.023	42	1.100	1.000	1.000
43	1.200	0.283	0.000	44	1.200	0.426	0.425
45	1.200	0.570	0.742	46	1.200	0.713	0.940
47	1.200	0.857	1.020	48	1.200	1.000	1.000
49	1.300	0.300	0.000	50	1.300	0.440	0.443
51	1.300	0.580	0.751	52	1.300	0.720	0.941
53	1.300	0.860	1.017	54	1.300	1.000	1.000

rilor de discretizare a domeniului. Se constată prezența unor valori supraunitare ale funcției de curent în cîteva puncte interioare, datorită efectelor turbionare. Spectrul hidrodinamic al mișcării pentru acest caz ($\lambda = 1{,}1$) este prezentat în figura 3.

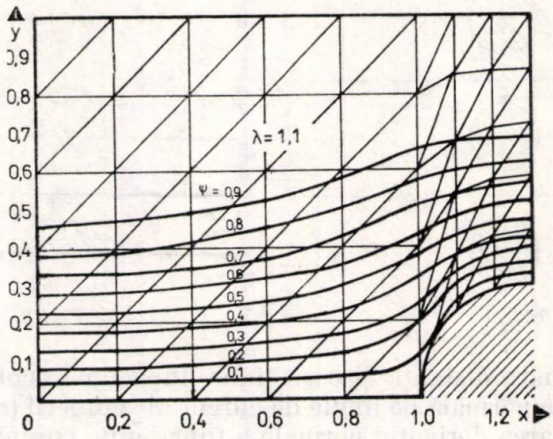


Fig. 3

Algoritmul propus se aplică, cu unele restricții relativ la convergența procedeului, pentru o gamă largă de mișcări turbionare și poate fi folosit la precizarea tipului de efect turbionar (alegerea concretă a funcției G) prin compararea soluției numerice cu observațiile experimentale concrete, în particular pentru a preciza caracterul turbionar al curgerii în rețelele de profile ale mașinilor hidraulice axiale pentru care ipoteza curgerii pan-paralele în rotor este în general admisă.

Primit în redacție la 19 februarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc. Graw-Hill, London, 1971.
2. L. V. KANTOROVICI, V. I. KRÎLOV, *Priblijennîie metodî vîsşego analiza*, Fizmatghiz., Moskva, 1972.

MIȘCĂRI CU CIRCULAȚIE ALE FLUIDELOR COMPRESIBILE ÎN JURUL UNUI PROFIL CU PUNCT ANGULOS

de D. BENA

Institutul de Construcții, București

În lucrare se studiază mișcarea plană, irotațională cu circulație, a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol prezentînd un punct angulos. După o prezentare a problemei, se extind rezultate cunoscute în cazul mișcărilor fără circulație la mișcări cu circulație.

1. METODA DE APROXIMAȚIE HODOGRAFICĂ

Vom considera mișcarea plană, permanentă, irotațională a unui fluid nevîscos în jurul unui obstacol C.

Vom nota cu ρ și p densitatea, respectiv presiunea, cu u și v componentele vitezei, iar cu φ și ψ potențialul vitezei, respectiv funcția de curent. Avem relațiile:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{1.1}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Vom considera mișcarea izentropică, adică presiunea și densitatea fluidului satisfac relația

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{1.3}$$

unde cu p_0 și ρ_0 am notat mărimile corespunzătoare gazului neperturbat, iar γ este raportul căldurilor specifice, $\gamma = c_p/c_v$.

Vom nota cu c viteza locală a sunetului, $c^2 = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$, iar cu M numărul lui Mach, $M = \dfrac{V}{c}$, unde $V = |u - iv|$. Ecuația pe care o satisface potențialul vitezei este

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{u \cdot v}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{1.4}$$

Problema fundamentală a aerodinamicii este descrierea mișcării în jurul unui profil C, adică aflarea unei funcții $\varphi(x, y)$, soluție a ecuației (1.4) cu condițiile la limită:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n} = 0 \quad \text{pe } C, \tag{1.5}$$

$$\lim_{z \to \infty} (u - iv) = \lim_{z \to \infty} (\varphi_x - i\varphi_y) = V_\infty e^{-i\alpha}. \tag{1.6}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 331–343

Ecuația (1.4) este de tip eliptic pentru mișcări subsonice, adică pentru $M < 1$.

Din ecuația lui Bernoulli,

$$V\,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0, \tag{1.7}$$

observăm că p, ρ, M și V sînt uniforme și monotone una față de alta.

Ecuația (1.4) se poate liniariza luînd ca variabile independente componentele vitezei. Vom nota cu $w = u - iv$ viteza complexă:

$$w = u - \mathrm{i}v = V\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \tag{1.8}$$

unde $V = |w|$ și $\theta = \arg(u + \mathrm{i}v)$.

Din (1.8), (1.1), (1.2) vom obține

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{V}\left(\mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\frac{\rho_0}{\rho}\,\mathrm{d}\psi\right). \tag{1.9}$$

Punînd condiția ca $\mathrm{d}z$ să fie o diferențială totală exactă, din (1.9) se obține sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \frac{\rho_0 V}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial V} &= -\frac{\rho_0}{\rho V}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

O simplificare radicală a sistemului (1.10) se poate obține luînd $\rho = \rho_0$, deci aproximînd fluidul real cu un fluid incompresibil.

O altă simplificare, care ține seama de compresibilitate, mai satisfăcătoare pentru aerodinamică, se obține modificînd ecuația de stare (1.3). Este de așteptat ca mici modificări în ecuația de stare să conducă la mici modificări în soluția problemei amintite. Modificarea ecuației de stare este făcută astfel încît $p = p(\rho)$ să aproximeze curba izentropică reală, ecuația (1.10) să se simplifice, iar p, ρ, V să rămînă monotone una față de alta în același sens ca în fluidul real.

Deci, în locul mișcării compresibile a fluidului real, vom considera mișcarea compresibilă a unui fluid fictiv, în jurul aceluiași obstacol C, mișcarea fluidului fictiv aproximînd mișcarea reală.

Legea caracteristică a lui Ciaplîghin revine la a considera presiunea ca funcție liniară de $1/\rho$. Fie deci

$$p = A - \frac{k^2}{\rho} \tag{1.11}$$

ecuația curbei care înlocuiește curba izentropică a gazului real. Deoarece $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = c^2$ (c fiind viteza sunetului în fluidul fictiv), avem din relația (1.11)

$$c^2 = \frac{k^2}{\rho^2}. \tag{1.12}$$

Din ecuaţia lui Bernoulli, pentru fluidul fictiv deducem

$$\frac{V^2}{2} - \frac{k}{2\rho^2} = B. \tag{1.13}$$

Notînd cu $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{c}_0$, $\tilde{p}_0$, densitatea, viteza sunetului şi presiunea pentru $V = 0$ în fluidul fictiv, din relaţiile (1.13) şi (1.12) vom obţine

$$B = -\frac{k^2}{2\tilde{\rho}_0^2}, \tag{1.14}$$

$$k^2 = \rho_0^2 c_0^2, \tag{1.15}$$

deci din relaţiile (1.13) şi (1.11) obţinem pentru fluidul fictiv :

$$p - \tilde{p}_0 = -\tilde{\rho}_0^2 \tilde{c}_0^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0}\right), \tag{1.11'}$$

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{\tilde{c}_0^2}}}, \tag{1.13'}$$

$$c^2 = \frac{k^2}{\rho^2} = c_0^2 + V^2.$$

În planul $\left(\frac{1}{\rho}, p\right)$, ecuaţia (1.11) defineşte o dreaptă. Cele mai utilizate alegeri ale dreptei, care să aproximeze curba izentropică reală sînt [1] :

a) *Varianta Ciaplîghin-Demtchenko*, în care dreapta este tangentă la curba izentropică în punctul $\left(\frac{1}{\rho_0}, p_0\right)$. Atunci vom avea

$$\tilde{p}_0 = p_0; \quad \tilde{\rho}_0 = \rho_0; \quad \tilde{c}_0 = c_0; \quad \tilde{V}_0 = V_0,$$

iar relaţiile (1.11') şi (1.13') devin :

$$p - p_0 = -\rho_0 c_0^2 \left\{\sqrt{1 + \frac{V^2}{c_0^2}} - 1\right\}, \tag{1.11'a}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{c_0^2}}}. \tag{1.13'a}$$

b) *Varianta Kármán-Tsien*, în care dreapta este tangentă la curba izentropică în punctul $\left(\frac{1}{\rho_\infty}, p_\infty\right)$.

Avem

$$\tilde{p}_\infty = p; \quad \tilde{\rho}_\infty = \rho_\infty; \quad \tilde{c}_\infty = c_\infty; \quad \tilde{V}_\infty = V_\infty$$

și vom avea pentru fluidul fictiv relațiile :

$$\rho = \frac{\rho_\infty}{\sqrt{1 + \dfrac{V^2 - V_\infty^2}{c_\infty^2}}}, \tag{1.11'b}$$

$$p - p_\infty = -\rho_\infty c_\infty^2 \left(\sqrt{1 + \frac{V^2 - V^2}{c^2}} - 1 \right). \tag{1.13'b}$$

c) *Varianta C. Iacob,* în care dreapta care aproximează curba izentropică reală este chiar coarda care unește două puncte situate pe curbă. Dacă se consideră pe curba izentropică punctele $\left(\frac{1}{\rho_0}, p_0\right)$ și $\left(\frac{1}{\rho_\infty}, p_\infty\right)$ atunci avem

$$\tilde{p}_0 = p_0 ; \quad \tilde{\rho}_0 = \rho_0 ; \quad \tilde{\rho}_\infty = \rho_\infty ; \quad \tilde{p}_\infty = p_\infty \text{ și}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\rho_0}{\rho_\infty} \dfrac{\rho_0 - \rho_\infty}{p_0 - p_\infty} V^2}}, \tag{1.11'c}$$

$$p = p_0 - \rho_\infty \frac{p_0 - p_\infty}{\rho_0 - \rho_\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \cdot \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p_0 - p_\infty} V^2} - 1 \right). \tag{1.13'c}$$

Între cele trei variante nu există o variantă privilegiată, alegerea variantei depinzînd de natura mișcării. Dacă notăm

$$\sigma = \sigma_\infty + \int_{V_\infty}^{V} \frac{\rho}{\tilde{\rho}_0 V} \, \mathrm{d}V, \tag{1.16}$$

obținem din relațiile (1.10)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \text{ și } \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{1.17}$$

adică $f = \varphi + \mathrm{i}\psi$ este funcție analitică de $\omega = \theta + \mathrm{i}\sigma$.

Din (1.15), ținînd seama de (1.13'), obținem

$$\sigma = \sigma_\infty + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\rho}_0 - \rho}{\tilde{\rho}_0 + \rho} - \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_\infty}{\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_\infty}. \tag{1.18}$$

Dacă notăm

$$\sigma_1 = \sigma_\infty + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_\infty}{\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_\infty} \tag{1.19}$$

obținem

$$\rho = \rho_0 \mathrm{th}(\sigma_1 - \sigma) \tag{1.20}$$

și

$$\frac{1}{V} = \frac{\operatorname{sh}(\sigma_1 - \sigma)}{\tilde{c}_0}, \tag{1.21}$$

$$\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho V} = \frac{\operatorname{ch}(\sigma_1 - \sigma)}{\tilde{c}_0}, \tag{1.22}$$

unde domeniul de mișcare corespunde pentru $\sigma < \sigma_1$.

Trecerea la planul fizic se face cu relația (1.9),

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{V}\left(\mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\frac{\rho_0}{\rho}\mathrm{d}\psi\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\tilde{c}_0}(\mathrm{e}^{\sigma_1}\cdot\mathrm{e}^{-\sigma}\,\mathrm{d}f - \mathrm{e}^{-\sigma_1}\cdot\mathrm{e}^{\sigma}\,\mathrm{d}f). \tag{1.23}$$

Notînd

$$C_1 = \frac{\mathrm{e}^{\sigma_1}}{2\tilde{c}_0} \text{ și } C_2 = -\frac{\mathrm{e}^{-\sigma_1}}{2\tilde{c}_0},$$

vom avea

$$\mathrm{d}z = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}f + C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\omega}}\,\mathrm{d}\bar{f}. \tag{1.23'}$$

Se verifică imediat că dacă luăm

$$\sigma_\infty = \ln V_\infty, \text{ atunci}$$

$$C_1 = \frac{\tilde{\rho}_\infty + \tilde{\rho}_0}{2\tilde{\rho}_\infty}; \quad C_2 = \frac{\tilde{\rho}_\infty - \tilde{\rho}_0}{2\tilde{\rho}V_\infty^2}, \tag{1.24}$$

iar formulele (1.21) și (1.22) devin:

$$\frac{1}{V} = C_1\mathrm{e}^{-\sigma} + C_2\mathrm{e}^{\sigma}, \tag{1.21'}$$

$$\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho V} = C_1\mathrm{e}^{-\sigma} - C_2\mathrm{e}^{\sigma}. \tag{1.22'}$$

Formulele (1.21'), (1.22') ne permit să construim mișcări fără circulație pentru fluidul fictiv, plecînd de la o funcție analitică $\omega = \omega(f)$ și construind aposteriori obstacolul.

2. TRECEREA LA PLANUL FIZIC

Vom considera în continuare mișcarea fluidului lui Ciaplîghin, fluid care înlocuiește fluidul real, în prezența unui obstacol C, care poate avea forma unui profil de aripă.

Vom nota cu Z_0 punctul angulos al profilului. Vom presupune că mișcarea este peste tot subsonică, iar la mari distanțe viteza, de mărime V_∞, formează un unghi α cu axa Ox. Vom lua ca sens de parcurs pe C

acela care lasă la dreapta mișcarea fluidă; fie $\mu\pi$ unghiul semitangentelor la profil în Z_0 în sensul de parcurs.

Fie $f = f(\zeta)$ și $\omega = \omega(\zeta)$ două funcții analitice în exteriorul cercului unitate $|\zeta| > 1$.

Prin mijlocirea lui ζ avem pe ω ca funcție de f. Vom nota

$$\frac{df}{d\zeta} = W_0(\zeta) = e^{-i\omega_0(\zeta)}. \tag{2.1}$$

În cele ce urmează vom considera că $f(\zeta)$ este potențialul complex al unei mișcări incompresibile în exteriorul cercului unitate, iar $\omega_0(\zeta)$ va fi funcția Levi-Civita corespunzătoare,

$$\omega_0(\zeta) = \theta_0 + i\sigma_0 = i \log \frac{df}{d\zeta}. \tag{2.2}$$

Cu $\omega_0(\zeta)$ am notat viteza complexă din planul ζ. Să punem [5]

$$W(\zeta) = e^{-i\omega)\xi)} = e^{\sigma - i\theta} = \frac{W_0(\zeta)}{h(\zeta)}. \tag{2.3}$$

Din relația (1.23′) obținem

$$dz = \frac{C_1}{W(\zeta)}\, df + C_2 \overline{W(\zeta)\, df} = C_1 h(\zeta)\, d\zeta + C_2 \overline{\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{h(\zeta)}} \tag{2.4}$$

sau

$$z = C_1 \int h(\zeta)\, d\zeta + C_2 \int \overline{\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{h(\zeta)}}. \tag{2.4′}$$

Dacă vom nota cu $V^{(0)}$ modulul vitezei mișcării din planul ζ; $V^{(0)} = \left|\frac{df}{d\zeta}\right|$, atunci din relațiile (1.21′) și (1.22′) avem

$$\frac{1}{V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} |h(\zeta)| + C_2 \frac{V^{(0)}}{|h(\zeta)|}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho V} = \frac{C_1}{V^{(0)}} |h(\zeta)| - C_2 \frac{V^{(0)}}{|h(\zeta)|}, \tag{2.6}$$

$$\theta = \theta_0 + \arg h(\zeta).$$

Relațiile (2.6) ne dau viteza și densitatea în fluidul lui Ciaplîghin, în jurul unui obstacol construit plecînd de la relația (2.5) și punînd $\zeta = e^{i\sigma}$, $\sigma \in [0, 2\pi]$.

Fie $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ punctul de pe cercul $|\zeta| = 1$, care corespunde lui Z_0, vom lua

$$h(\zeta) = \lambda \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^{\mu} \cdot e^{i\alpha} h_1(\zeta), \tag{2.7}$$

unde $h_1(\zeta_0) \neq 0$, $h_1(\infty) = 1$.

Pentru ca viteza să rămînă finită în punctul Z_0, va trebui să alegem circulația după regula lui Jukovski, adică să impunem ca viteza să rămînă finită la bordul de fugă, deci

$$\left| \frac{df}{d\zeta} \right|_{\zeta_0 = e^{i\sigma_0}} = 0. \tag{2.8}$$

Vom lua

$$f(\zeta) = \lambda V_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \zeta. \tag{2.9}$$

Din relația (2.8) vom obține că

$$\Gamma = 4\pi\lambda V_\infty \sin \sigma_0. \tag{2.10}$$

În planul ζ distribuția de viteze este dată de

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{\lambda V_\infty}{\zeta^2} (\zeta^2 - 2i\,\zeta \sin \sigma_0 - 1) =$$

$$= \frac{\lambda V_\infty}{\zeta^2} (\zeta - e^{i\sigma_0})(\zeta - e^{i(\pi - \sigma_0)}). \tag{2.11}$$

Verificăm că mișcarea fluidului lui Ciaplîghin are caracteristicile dorite.

Se observă că

$V^0|_{\zeta=\infty} = \lambda V_\infty$; $|h(\zeta)|_{\zeta=\infty} = \lambda$, iar din relația (1.22) se deduce că $C_1 + C_2 V_\infty^2 = 1$, deci din (2.6) avem $\left.\frac{1}{V}\right|_{\zeta=\infty} = \frac{1}{V}$, deci în fluidul lui Ciaplîghin viteza are mărimea asimptotică dorită.

Dacă ne deplasăm pe o linie de curent avem din (2.4)

$$dz = dS_\varphi\, e^{i\theta} = \frac{C_1}{W(\zeta)} d\varphi + C_2 \overline{W(\zeta)}\, d\varphi.$$

Din $\arg \frac{1}{W(\zeta)} = \arg \overline{W(\zeta)}$, iar $C_1 + C_2 |W(\zeta)|^2 > 0$, deci

$$\theta = \theta_0 + \arg h(\zeta),$$

cu m la mari distanțe avem

$$\arg h(\zeta)|_{\zeta=\infty} = \alpha;\ \arg \left(\frac{df}{d\zeta} \right)\Big|_{\zeta=\infty} = 0,$$

va rezulta că viteza are direcția asimptotică dorită.

În fine, obstacolul C fiind linie de curent, avem

$$\theta = \arg \frac{1}{W(\zeta)} = \theta_0 + \arg h(\zeta).$$

Dacă considerăm funcția $f_1(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^{\mu}$, în planul cu tăietura care unește punctele ζ_0 și ∞, observăm că

$$[\arg f_1(\zeta)]^+ - [\arg f_1(\zeta_0)]^- =$$

$$= \mu[\arg(\zeta - \zeta_0)^+ - \arg(\zeta - \zeta_0)^-] = \mu\pi,$$

deci θ are saltul dorit, adică în Z_0 semitangentele la contur formează unghiul $\mu\pi$.

Funcția $h(\zeta)$ trebuie aleasă astfel ca pentru orice contur simplu închis care înconjură pe Γ să avem (din 2.5)

$$C_1 \oint h(\zeta)\mathrm{d}\zeta + C_2 \overline{\oint \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}} = 0. \tag{2.12}$$

Pentru a ne asigura că transformarea $z = z(\zeta)$ va fi efectiv biunivocă, vom calcula iacobianul transformării

$$J = \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2 = C_1^2|h^2(\zeta)| - C_2^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)\frac{1}{h^2(\zeta)}\right|. \tag{2.13}$$

Pentru a ne asigura de validitatea vitezelor, date prin relația (2.6), este necesar că luăm $J > 0$, deci [9]

$$\left|\frac{1}{h(\zeta)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right| < \sqrt{\frac{C_1}{|C_2|}}. \tag{2.14}$$

Este suficient să satisfacem relația (2.14) pe cercul $|\zeta| = 1$, adică pe frontiera domeniului.

Deci problema construirii unei mișcări a fluidului lui Ciaplîghin în jurul unui profil, prezentînd un punct angulos Z_0 la bordul de fugă, este redusă la determinarea unei funcții analitice, regulate $h_1(\zeta)$, definită în exteriorul cercului

$$|\zeta| = 1.$$

Dezvoltarea funcției $h_1(\zeta)$ la mari distanțe este de forma

$$h_1(\zeta) = 1 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \ldots. \tag{2.15}$$

Dacă considerăm două curbe simple, închise Γ_1 și Γ_2 care înconjură cercul $|\zeta| = 1$ (curba Γ_2 fiind situată în exteriorul curbei Γ_1), și aplicăm

formula Stokes-Pompeiu domeniului D situat între curbele Γ_1 și Γ_2, obținem

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} (P\mathrm{d}\zeta + Q\mathrm{d}\bar{\zeta}) = \frac{2}{\mathrm{i}} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta} - \frac{\partial P}{\partial \bar{\zeta}} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{2.16}$$

pentru $P(\zeta) = C_1 h(\zeta)$; $Q(\zeta) = C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \frac{1}{h(\zeta)}}$.

Se obține

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} C_1 h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}} = 0, \tag{2.17}$$

deci

$$\int_{\Gamma_1} C_1 h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}} = \int_{\Gamma_2} C_1 h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + C_2 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}}, \tag{2.18}$$

În relația (2.17), contururile Γ_1 și Γ_2 sînt parcurse astfel ca domeniul D să rămînă la stînga, iar în (2.13) contururile sînt parcurse în același sens, de exemplu cel trigonometric. Deci este suficient să satisfacem relația (2.12) pe un cerc de rază foarte mare, cu centrul în origine.

Dezvoltările lui $h(\zeta)$ și $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \cdot \frac{1}{h(\zeta)}$ sînt de forma

$$h(\zeta) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left[1 + \frac{1}{\zeta} (A_1 - \mu\zeta_0) + \frac{1}{\zeta^2} \times \right.$$
$$\left. \times \left[A_2 - \mu A_1 \zeta_0 + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \zeta_0 + \ldots \right] \right. \tag{2.19}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} \right)^2 \frac{1}{h(\zeta)} = \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} \left\{ \lambda V_\infty^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{\zeta} \left[\frac{\lambda \Gamma V_\infty}{\pi \mathrm{i}} - \lambda^2 V_\infty^2 (A_1 - \mu\zeta_0) \right] +$$
$$+ \frac{1}{\zeta^2} \left\{ \lambda^2 V_\infty^2 (A_1 - \mu\zeta_0)^2 - \lambda^2 V_\infty^2 \left[A_2 - A_1 \mu \zeta_0 + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \zeta_0^2 \right] + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\lambda V_\infty \Gamma_i}{\pi} (A_1 - \mu\zeta_0) + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2\lambda^2 V_\infty^2 \right\} + \ldots \right\}. \tag{2.20}$$

Ținînd seama de (2.19) și (2.20), din relația (2.12) obținem

$$C_1 (A_1 - \mu\zeta_0) + C_2 V_\infty^2 (A_1 - \mu\zeta_0) = \mathrm{i} \frac{C_2 V_\infty \Gamma}{\pi\lambda}, \tag{2.21}$$

adică

$$A_1 - \mu\zeta_0 = \frac{iC_2V_\infty\Gamma}{\pi\lambda(C_1 - C_2V_\infty^2)} = i\frac{C_2V_\infty\Gamma}{\pi\lambda\tilde{\rho}_0}. \tag{2.22}$$

Relația (2.22) ne dă reziduul lui $h_1(\zeta)$ la infinit.

Condiția (2.14) atrage după sine

$$|h_1(e^{i\sigma})| \geqslant \sqrt{\frac{|C_2|}{C_1}}V_\infty \left|2\sin\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right|^{1-\mu} \cdot \left|\cos\frac{\sigma + \sigma_0}{2}\right|. \tag{2.23}$$

În fine, avem, din relația (2.9),

$$z = ie^{i\alpha}\frac{C_1C_2\tilde{\rho}_\infty V_\infty\Gamma}{\pi\tilde{\rho}_0}\log|\zeta| + C_1\lambda e^{i\alpha}\zeta + \\ + C_2\lambda V_\infty^2 e^{i\alpha}\bar{\zeta} + F_1(\zeta) + F_2(\bar{\zeta}), \tag{2.24}$$

unde F_1 și F_2 sînt funcții analitice care se pot determina cu ajutorul lui $h_1(\zeta)$.

Dezvoltările asimptotice ale lui $F_1(\zeta)$ și $F_2(\zeta)$ sînt de forma

$$F_1(\zeta) = \sum_{k=1}\frac{m_k}{\zeta^k}, \\ F_2(\zeta) = \sum_{k=1}\frac{n_k}{\zeta^k}. \tag{2.25}$$

Deci problema determinării unei mișcări a fluidului lui Ciaplîghin a fost redusă la determinarea unei funcții $h_1(\zeta)$ analitică și regulată în $|\zeta| > 1$, satisfăcînd condițiile arătate.

Problema reversibilității transformării (2.24) a fost pusă și rezolvată de C. Iacob, condiții suficiente de reversibilitate fiind (2.14) și (2.22).

3. ACȚIUNEA AERODINAMICĂ ASUPRA OBSTACOLULUI

Vom nota cu $\tilde{p}_\infty$ presiunea la mari distanțe în fluidul lui Ciaplîghin. Rezultanta acțiunilor aerodinamice asupra obstacolului va fi

$$R_x - iR_y = -i\int_c p\,d\bar{z} = -i\int_c (p - \tilde{p}_\infty)\,d\bar{z}. \tag{3.1}$$

Din relația (1.11′) se deduce că

$$p - \tilde{p}_\infty = -\tilde{\rho}_0^2\tilde{c}_0^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}_\infty}\right). \tag{3.2}$$

Ținînd seama de relațiile (1.13′) și (2.4), avem

$$(p - \tilde{p}_\infty)\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\rho_0 V^2}{2}\,\overline{h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} - \frac{\tilde{\rho}_0}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}, \tag{3.3}$$

deci

$$R_x - \mathrm{i}R_y = -\,\mathrm{i}\,\frac{\rho_0 V_\infty^2}{2}\,\overline{\int_{|\xi|=1} h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} + \frac{\mathrm{i}\tilde{\rho}_0}{2}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}\,. \tag{3.4}$$

Calculul integralelor se face înlocuind cercul unitate, cu un cerc de rază foarte mare și utilizînd dezvoltările din (2.19) și (2.20) .Se obține în final

$$R_x - \mathrm{i}R_y = 2\pi\tilde{\rho}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\lambda V_\infty^2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(A_1 - \mu\zeta_0) + \mathrm{i}\tilde{\rho}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} V_\infty \Gamma. \tag{3.5}$$

Ținînd seama de relația (2.22), se obține

$$R_x - \mathrm{i}R_y = \mathrm{i}\tilde{\rho}_\infty \Gamma V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}. \tag{3.6}$$

Observăm că teorema lui Jukovski se păstrează, iar

$$R_x = \tilde{\rho}_\infty \Gamma V_\infty \sin\alpha,$$

$$R_y = -\,\tilde{\rho}_\infty \Gamma V_\infty \cos\alpha \tag{3.7}$$

sau, dacă ținem seama de valoarea circulației impuse cu (2.10), avem

$$R_x = 4\tilde{\rho}_\infty \lambda V_\infty^2 \sin\alpha \sin\sigma_0,$$

$$R_y = -\,4\tilde{\rho}_\infty \lambda V_\infty^2 \cos\alpha \sin\sigma_0. \tag{3.8}$$

În continuare vom calcula momentul rezultant al acțiunilor hidrodinamice asupra obstacolului, în raport cu originea coordonatelor. Vom pleca de la formula

$$\mathcal{M} = \mathrm{Re}\left\{\int_C (p - \tilde{p}_\infty) z\,\mathrm{d}\bar{z}\right\}. \tag{3.9}$$

Dacă vom ține seama de relația (3.2), expresia momentului rezultant devine

$$\mathcal{M} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\tilde{\rho}_0 V_\infty^2}{2}\int_\Gamma z\,\overline{h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta} - \frac{\rho_0}{2} z \int_\Gamma \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{h(\zeta)}\right\}. \tag{3.10}$$

Aplicînd formula Stookes-Pompeiu domeniului D, situat între Γ_1 și un cerc Γ_2, de rază foarte mare, pentru funcțiile

$$P(\zeta) = -\frac{\tilde{\rho}_0}{2} z\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{1}{h(\zeta)}, \tag{3.11}$$

$$Q(\zeta) = \frac{\tilde{\rho}_0}{2} V_\infty^2 \, z h(\zeta),$$

vom avea

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} -\frac{\tilde{\rho}_0}{2} z\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta + \frac{\tilde{\rho}_0 V_\infty^2}{2} z\overline{h(\zeta)}\,\overline{d\zeta} =$$

$$= \frac{2}{i}\iint_D \left[C_1 \frac{\tilde{\rho}_0 V^2}{2} h(\zeta)\,\overline{h(\zeta)} + \right.$$

$$\left. + C_2 \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \left(\frac{\overline{df}}{d\zeta}\right)^2 \cdot \frac{1}{h(\zeta)} \cdot \frac{1}{\overline{h(\zeta)}} \right] d\xi\, d\eta. \tag{3.12}$$

Observînd că în integrala dublă integrantul este real, deci avem relația

$$\mathrm{Re}\left\{ \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} -\frac{\tilde{\rho}_0}{2} z\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{\rho}_0 V_\infty^2}{2} z\overline{h(\zeta)}\,\overline{d\zeta} \right\} = 0, \tag{3.13}$$

sensul de parcurs pe contururile Γ_1 și Γ_2 fiind acela care lasă domeniul D la stînga, deci avem pentru momentul rezultant formula:

$$\mathcal{M} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\tilde{\rho}_0 V_\infty^2}{2} \int_{\Gamma_2} z\overline{h(\zeta)}\,\overline{d\zeta} - \frac{\rho_0}{2} \int_{\Gamma} z\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{h(\zeta)} \right\}. \tag{3.14}$$

Folosind dezvoltările din (2.19), (2.20), (2.24), obținem valoarea momentului rezultant,

$$\mathcal{M} = -\tilde{\rho}_0 \pi \,\mathrm{Im}\left[2A_2 \lambda^2 V_\infty^2 - \lambda^2 V_\infty^2 \mu(\mu+1)\zeta_0^2 - \right.$$

$$\left. - i\lambda\mu \frac{\zeta_0 \Gamma V_\infty}{\pi \tilde{\rho}_0} (\tilde{\rho}_\infty - \tilde{\rho}_0) \right] = -2\pi\tilde{\rho}_0 \lambda^2 V_\infty^2 \,\mathrm{Im}\, A_2 +$$

$$+ \pi\tilde{\rho}_0 \lambda^2 V_\infty^2 \mu(\mu+1)\sin 2\sigma_0 + \mu\lambda\cos\sigma_0 \Gamma V_\infty (\tilde{\rho}_\infty - \tilde{\rho}_0). \tag{3.15}$$

Dacă vom considera valoarea circulației date de (2.10), avem

$$\mathcal{M} = \pi\lambda^2 V_\infty^2 [-2\rho_0 \mathrm{Im} A_2 + \rho_0 \mu(\mu+1)\sin 2\sigma_0 + 2(\tilde{\rho}_\infty - \tilde{\rho}_0)\sin 2\sigma_0]. \tag{3.16}$$

Observăm că pentru aflarea momentului rezultant este suficientă cunoașterea celui de al doilea termen.

Pentru $\mu = 0$ și $\sigma_0 = 0$ obținem formulele obținute de J. Leray [5].

Primit în redacție la 8 martie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei — Gauthier Villars, București—Paris, 1959.
2. C. IACOB, *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles*, Pertugalise Mathematica, 1 (1939).
3. H. S. TSIEN, *Two-Dimensional Subsonic Flow of a Compressible Fluid*, J. of the Aeronautical Science, **7** (1939).
4. C. IACOB, *Sur l'écoulement lent d'un fluid parfait compressible autour d'un cylindre circulaire* Mathematica, **XVII** (1941).
5. J. LERAY, *Fluides compressibles. Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode approchée de Tchapliguine*, Journal de Math. pures et appl., 9-e Série, **28** (1947).
6. I. FILIMON, *Sur le mouvement plan, subsonique, autour d'un obstacle donné*, C.R. Acad. Sci. Paris, **244** (1957).
7. I. FILIMON, *Asupra corecțiilor de compresibilitate la mișcări continue subsonice. Cazul obstacolului eliptic*, St. și cerc. matem., 3—4 (1957).
8. I. FILIMON, *Mișcări circulatorii în jurul unui profil dat. Metoda corectă a lui Ciaplighin*, St. și cerc. matem., **16** (1967).
9. C. IACOB, *Asupra reversibilității transformării lui Ciaplighin*, Comunicările Acad. R.S. România, **XI**, 23 (1961).
10. L. BERS, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, John Wiley & sons, inc., New York, 1958.
11. S. POPP, *Modele matematice în teoria cavitației*, Edit. Tehnică, București, 1985.

Observation où peuvent affaires prononcé ultérieurement cette suffisante
[illegible] cette de al dollia [illegible].

Pour [illegible] $\sigma_n = 0$ si $\sigma_n = 0$ obtient formule obtenue de A. Lichnerowicz [15].

BIBLIOGRAPHIE

1. C. JACOB, Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Edit. Académie — Gauthier-Villars, Bucarest-Paris, 1959.
2. C. JACOB, Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles, Portugaliae Mathematica, I (1939).
3. H. S. TSIEN, Two-Dimensional Subsonic Flow of a Compressible Fluid, J. of the Aeronautical Sciences, 7 (1939).
4. C. JACOB, Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait compressible autour d'un ellipsoïde, Portugaliae Mathematica, XVII (1958).
5. M. LUBRAN, Fluides compressibles. Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode hodographe de Tchaplyguine, Journal de Math. pures et appl., 9e Série, 28 (1949).
6. L. FRANZONI, Sur le mouvement plan, subsonique, autour d'un obstacle donné, C.R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957).
7. L. FRANZONI, Intégration de l'équation de compressibilité du régime continu subsonique, Centre aérodynamique algérie, Alger, si cette [illegible], 3 — 1 (1957).
8. A. J. FRANZONI, Adversity circulation [illegible] Journal de Mécanique rationnelle et [illegible] Chaplygin, Sc. si cons. mathém., 18 (1957).
9. C. JACOB, Leçons [illegible] [illegible] Chaplygin, Compositio Math. Vol. II, S. Hollande, 22 (1951).
10. L. PRIM, Mathematical aspects of mixture and formation gas dynamics, John Wiley & sons, Inc., New York, 1958.
11. S. GOFIS, Modèle mathématique [illegible], Edit. Dunod, Bucarest, 1965.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL NUMERIC AL PLĂCILOR SUBȚIRI CILINDRICE DE GROSIME VARIABILĂ *)

de M. V. SOARE și D. IORDACHE

Institutul de Construcții, București

Ținînd seama de avantajele pe care le prezintă calculul automat, se expune o abordare nouă a studiului plăcilor subțiri cilindrice de grosime variabilă, bazată pe utilizarea metodei plurilocale și a considerării concomitente ca necunoscute a săgeților w și a momentelor încovoietoare longitudinale M_x. Un exemplu de calcul ilustrează teoria dezvoltată.

1. INTRODUCERE

Calculul plăcilor curbe subțiri în teoria încovoierii implică scrierea unor ecuații de echilibru și a unor ecuații de deformații, la care se asociază relațiile de elasticitate. Atunci cînd este posibilă o rezolvare analitică se elimină succesiv funcțiile necunoscute, ajungîndu-se la o ecuație diferențială (ordinară sau cu derivate parțiale) în raport cu o funcție necunoscută de bază.

Atunci cînd această ecuație este cunoscută însă soluția ei nu poate fi obținută cu ajutorul funcțiilor elementare, aplicarea metodei diferențelor finite conduce la rezultatele numerice căutate. Asemeni calculului analitic, se aplică diferențele finite ecuației diferențiale în raport cu necunoscuta de bază, care este o ecuație de ordin ridicat (patru sau opt), după care celelalte necunoscute sînt obținute din relațiile diferențiale, transcrise în diferențe finite, care le definesc în funcție de necunoscuta de bază.

Această metodă are avantajul că numărul de necunoscute din sistemul de ecuații cu diferențe finite este practic egal cu numărul nodurilor din rețeaua aleasă. În schimb sînt necesare operații suplimentare pentru determinarea celorlalte necunoscute, iar erorile sînt proporționale cu $(\Delta x)^2$ (în care Δx reprezintă pasul rețelei, la intervale egale dacă se aplică metoda parabolei.

Apariția și răspîndirea calculatoarelor electronice a modificat în mare măsură optica abordării problemei. Va fi mai avantajos ca, pentru aceeași rețea de noduri adoptată, să se considere simultan mai multe necunoscute. În felul acesta numărul de ecuații crește, în schimb se obțin direct mai multe necunoscute.

Dacă, în plus, este posibilă utilizarea unei variante ameliorate a metodei diferențelor finite, anume *metoda plurilocală*, ordinul de mărime al erorilor poate fi redus, acestea fiind de ordinul $(\Delta x)^4$ sau la o putere mai mare.

În studiul de față ne-am propus să aplicăm ideile expuse precedent la calculul unui rezervor cilindric circular, la care starea de eforturi și de deformații este simetrică în raport cu axa de rotație și avînd gro-

*) Lucrare prezentată de al doilea dintre autori la a XII-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Pitești, 3—4 iunie 1988.

simea peretului variabilă. Ca aplicație va fi considerată variația liniară a peretului, pentru care există și o soluție analitică, cu ajutorul funcțiilor Bessel, cu care pot fi comparate rezultatele [2], [3], [7].

2. ECUAȚIILE GENERALE

Sînt cunoscute ecuațiile de echilibru, de deformații și de elasticitate pentru cilindrul circular de grosime variabilă, solicitat simetric în raport cu axa [1], [2], [6], [7]. Aceste ecuații sînt:

$$\frac{N_\varphi}{a} + \frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}x} = -Z, \tag{1a}$$

$$Q_x = \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}, \tag{1b}$$

$$N_\varphi = -\frac{E\delta_x}{a} w, \tag{1c}$$

$$M_x = -K_x \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}, \tag{1d}$$

în care N_φ reprezintă efortul inelar; Q_x — forța tăietoare longitudinală; M_x — momentul încovoietor longitudinal; w — săgeata; Z — componenta normală a încărcării exterioare, a — raza cercului median; δ_x — grosimea plăcii (variabilă în lungul generatoarelor); $K_x = \frac{E\delta_x^3}{12(1-\mu^2)}$ rigiditatea la încovoiere a plăcii, E — modulul de elasticitate al materialului; μ — coeficientul de contracție transversală al materialului.

Convenția de semne este următoarea: N_φ este pozitiv cînd este efort de întindere, Q_x și M_x sînt pozitivi după convenția pentru bara dreaptă, w este pozitiv cînd se produce spre interior, iar Z este pozitiv cînd este dirijat spre axa de rotație.

Obișnuit se elimină treptat necunoscutele N_φ, Q_x, M_x și se ajunge, în metoda deplasărilor, la ecuația diferențială a săgeților w:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(K_x \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right) + \frac{E\delta_x}{a^2} w = Z. \tag{2}$$

O soluție simplă bazată pe aplicarea diferențelor finite ecuației (2), în metoda parabolei, a fost dată în [6]; erorile sînt proporționale cu $(\Delta x)^2$ în care Δx reprezintă pasul rețelei. Necunoscute sînt doar valorile săgeților în nodurile fixate inițial, în schimb condițiile la limită se scriu relativ mai complicat și, după determinarea săgeților w, rămîn de determinat și celelalte necunoscute N_φ, Q_x, M_x.

În cele ce urmează se propune aplicarea metodei mixte, alegînd ca necunoscute săgețile w și momentele încovoietoare M_x. Aceasta permite o deducere mult mai ușoară a celorlalte două necunoscute N_φ și Q_x, conform relațiilor (1c) și (1b).

Vom începe prin a scrie relația (1d) sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{K_x} M_x. \tag{3}$$

Apoi, din eliminarea lui N_φ și Q_x între relațiile (1a), (1b), (1c) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{E\delta_x}{a^2} w - Z. \tag{4}$$

Sistemul de ecuații (3), (4) determină necunoscutele w și M_x. Celelalte două necunoscute Q_x și N_φ vor rezulta apoi din (1b), respectiv (1c). Panta tangentei la generatoarea deformată va fi dată de prima derivată a săgeții, fie

$$\chi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

3. APLICAREA METODEI PLURILOCALE

Metoda plurilocală reprezintă o îmbunătățire considerabilă a metodei diferențelor finite obișnuite. Ea se bazează pe o asociere intimă între dezvoltarea în serie Taylor a funcției necunoscute și ecuația diferențială de integrat.

În [6] se arată că între valorile funcției în trei noduri consecutive, $m-1$, m, $m+1$, subzistă relația

$$\frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{w''_{m-1} + 10w''_m + w''_{m+1}}{12} - \\ - \frac{(\Delta x)^4}{240} w_m^{\mathrm{VI}} + \dots . \tag{6}$$

Neglijarea ultimului termen arată că erorile sînt de ordinul $(\Delta x)^4$. Derivatele secunde din relația (6) pot fi însă eliminate ținînd seama de relația diferențială, scrisă sub forma

$$w''_m = -\frac{M_m}{K_m}. \tag{7}$$

și încă două relații similare pentru punctele $m-1$ și $m+1$. Precedent și în continuare, se suprimă indicele x acolo unde se face referire la nodurile rețelei, pentru simplificarea scrierii.

Cu ajutorul relațiilor de forma (7), ecuația (6) se scrie, după ordonarea convenabilă a termenilor și neglijarea restului,

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}) + \frac{M_{m-1}}{K_{m-1}} + 10\frac{M_m}{K_m} + \frac{M_{m+1}}{K_{m+1}} = 0. \tag{8}$$

Pe o cale absolut asemănătoare ecuația diferențială (4) este transcrisă în diferențe finite, sub forma următoare :

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{m-1}w_{m-1}+10\delta_m w_m+\delta_{m+1}w_{m+1})+M_{m-1}-2M_m+M_{m+1}=$$

$$=-\frac{(\Delta x)^2}{12}(Z_{m-1}+10Z_m+Z_{m+1}). \tag{9}$$

Pentru încărcări precizate, ecuațiile cu diferențe finite (8) și (9) vor putea fi simplificate, în ceea ce privește coeficienții lor, prin introducerea unor necunoscute adimensionale (vezi mai departe § 5).

Presupunînd determinate toate valorile w_m și M_m, celelalte necunoscute vor fi determinate cu ajutorul următoarelor relații :

$$N_{\varphi,m}=-\frac{E\delta_m}{a}w_m, \tag{10a}$$

$$Q_{x,m}=\frac{M_{m+1}-M_{m-1}}{2\Delta x}, \tag{10b}$$

$$\chi_m=\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}x}=\frac{w_{m+1}-w_{m-1}}{2\Delta x}. \tag{10c}$$

Relațiile (10b), (10c), implicînd transcrierea în diferențe finite a unor derivate de ordinul întîi (și mai general impare), au fost scrise cu ajutorul metodei parabolei, deci implicînd erori de ordinul $(\Delta x)^2$.

În continuare vom trece la stabilirea condițiilor la limită pentru diferite scheme de încărcare. Numerotarea nodurilor începe de la bază ($m=0$) și fie n nodul de la marginea superioară, ceea ce presupune împărțirea lungimii generatoarei în n intervale egale (pasul rețelei), adică

$$\Delta x=\frac{l}{n}. \tag{11}$$

4. CONDIȚII LA LIMITĂ

În continuare sînt examinate patru cazuri de încărcare și de condiții la limită.

4.1. *Marginea inferioară încastrată perfect* implică condițiile $w_0=0$ și $\chi_0=0$; a doua condiție, transcrisă în diferențe finite, permite eliminarea necunoscutei din nodul exterior $m=-1$, fie

$$w_{-1}=w_1 \tag{12}$$

Cu aceste observații, ecuațiile (8) și (9) iau forma

— *pentru nodul* $m=0$;

$$\frac{24}{(\Delta x)^2}w_1+\frac{M_{-1}}{K_{-1}}+10\frac{M_0}{K_0}+\frac{M_1}{K_1}=0, \tag{13a}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{-1}+\delta_1)w_1 + M_{-1} - 2M_0 + M_1 =$$

$$= -\frac{(\Delta x)^2}{12}(Z_{-1}+10Z_0+Z_1), \tag{13b}$$

— *pentru nodul* $m = 1$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(-2w_1+w_2) + \frac{M_0}{K_0} + 10\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} = 0, \tag{13c}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(10\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) + M_0 - 2M_1 + M_2 =$$

$$= -\frac{(\Delta x)^2}{12}(Z_0+10Z_1+Z_2). \tag{13d}$$

Pentru celelalte noduri interioare ($m \geqslant 2$) vor fi aplicate ecuațiile (8) și (9).

Se observă că în ecuațiile (13a), (13b) intervine valoarea M_{-1} relativă la nodul exterior $m = -1$; ea va fi necesară pentru determinarea forței tăietoare la bază,

$$Q_{x,0} = \frac{M_1 - M_{-1}}{2\Delta x}.$$

4.2. *Acțiunea unor eforturi radiale* R *la marginea inferioară* presupusă liberă.

Încărcarea exterioară este nulă, $Z(x) = 0$, iar condițiile marginale se scriu $M_0 = 0$ și $Q_0 = R$; a doua condiție, transcrisă în diferențe finite, devine

$$M_{-1} = M_1 - 2R\Delta x. \tag{14}$$

Ecuațiile (8) și (9), scrise pentru nodurile 0 și 1, iau forma :

— *pentru nodul* $m = 0$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_{-1} - 2w_0 + w_1) + \left(\frac{1}{K_{-1}} + \frac{1}{K_1}\right)M_1 = \frac{2R\Delta x}{K_{-1}}, \tag{15a}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{-1}w_{-1} + 10\delta_0 w_0 + \delta_1 w_1) + 2M_1 = 2R\Delta x; \tag{15b}$$

— *pentru nodul* $m = 1$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) + 10\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} = 0, \tag{15c}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_0 w_0 + 10\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) - 2M_1 + M_2 = 0. \tag{15d}$$

Se observă că în ecuațiile (15a), (15b) intervine valoarea w_{-1} relativă la nodul exterior $m = -1$; ea va fi necesară pentru determinarea pantei tangentei la bază

$$\chi_0 = \frac{w_1 - w_{-1}}{2\Delta x}.$$

4.3. *Acțiunea unor momente M la marginea inferioară presupusă liberă.*

Ca și în cazul precedent, încărcarea exterioară este nulă, adică $Z(x) \equiv 0$. Condițiile la limită se scriu $M_0 = M$ și $Q_0 = 0$; a doua condiție, transcrisă în diferențe finite, devine:

$$M_{-1} = M_1. \tag{16}$$

Ecuațiile (8) și (9), scrise pentru nodurile 0 și 1, iau forma

— *pentru nodul* $m = 0$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_{-1} - 2w_0 + w_1) + \left(\frac{1}{K_{-1}} + \frac{1}{K_1}\right) M_1 = -10\frac{M}{K_0}, \tag{17a}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{-1}w_{-1} + 10\delta_0 w_0 + \delta_1 w_1) + 2M_1 = 2M; \tag{17b}$$

— *pentru nodul* $m = 1$

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) + 10\frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{K_2} = -\frac{M}{K_0}, \tag{17c}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_0 w_0 + 10\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) - 2M_1 + M_2 = -M. \tag{17d}$$

Pentru w_{-1} este valabilă aceeași observație ca la cazul de încărcare precedent.

4.4. *Marginea superioară liberă*

Dacă n este nodul de la marginea superioară a cilindrului, condițiile la limită ce trebuie să fie satisfăcute sînt $M_n = 0$ și $Q_n = 0$, sau încă

$$M_{n+1} = M_{n-1} \quad \text{și} \quad M_n = 0.$$

Valoarea momentului M_{n+1} în nodul exterior poate fi eliminată, în schimb va interveni necunoscuta w_{n+1}. Ecuațiile (8) și (9) scrise pentru nodurile $n-1$ și n iau forma finală:

— *pentru nodul* $m = n - 1$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_{n-2} - 2w_{n-1} + w_n) +$$

$$+\frac{M_{n-2}}{K_{n-2}} + 10\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} = 0, \tag{18a}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{n-2}w_{n-2}+10\delta_{n-1}w_{n-1}+\delta_n w_n)+M_{n-2}-2M_{n-1}=$$

$$=-\frac{(\Delta x)^2}{12}(Z_{n-2}+10Z_{n-1}+Z_n); \tag{18b}$$

— *pentru nodul* $m=n$:

$$\frac{12}{(\Delta x)^2}(w_{n-1}-2w_n+w_{n+1})+\left(\frac{1}{K_{n-1}}+\frac{1}{K_{n+1}}\right)M_{n-1}=0, \tag{18c}$$

$$-\frac{E(\Delta x)^2}{12a^2}(\delta_{n-1}w_{n-1}+10\delta_n w_n+\delta_{n+1}w_{n+1})+2M_{n-1}=$$

$$=-\frac{(\Delta x)^2}{12a^2}(Z_{n-1}+10Z_n+Z_{n+1}). \tag{18d}$$

Din combinarea a cîte două condiții la marginile inferioară și superioară va rezulta un sistem de $2(n+2)$ ecuații cu tot atîtea necunoscute.

Relațiile (18) presupun că există încărcarea exterioară $Z(x)$. În cazul unor încărcări omogene (aplicate pe contur) se va considera $Z(x)\equiv 0$, iar membrii secunzi din (18b) și (18d) dispar.

În privința rezolvării sistemului de ecuații avînd ca necunoscute valorile săgeților și momentelor încovoietoare în nodurile alese, sînt posibile două variante și anume :

a) *se introduc* condițiile la limită în ecuațiile generale (8) și (9), scrise pentru nodurile 0, 1, $n-1$ și n; acestea vor căpăta o formă particulară reprezentată, de exemplu, de ecuațiile (13) și (18); ecuațiile (8) și (9) vor fi scrise pentru $m=2, 3, \ldots, n-2$. Simetria coeficienților față de diagonala principală va fi respectată ;

b) condițiile la limită *sînt asociate* sistemului de ecuații (8) și (9) scris pentru $m=0, 1, 2, \ldots, n-1, n$. Rezultă un sistem mai mare decît în primul caz, la care nu mai este respectată integral simetria coeficienților față de diagonala principală (vezi de exemplu [6], p. 397—402).

Atunci cînd rezolvarea numerică se face pe calculator, diferența între cele două variante este neînsemnată.

5. RELAȚII ADIMENSIONALE

Pentru calculele numerice este recomandabil să se facă adimensionalizarea sistemului de ecuații; de exemplu, în cazul încărcării exterioare se pot face substituțiile :

$$M_m=Z_0(\Delta x)^2\,\bar{M}_m, \tag{19a}$$

$$w_m=\frac{Z_0(\Delta x)^4}{K_0}W_m, \tag{19b}$$

după care celelalte mărimi rezultă din relațiile

$$N_{\varphi,m} = -\frac{Z_0(\Delta x)^4 E\delta_\theta}{K_0 a}\,\xi_m W_m, \tag{19c}$$

$$Q_{x,m} = \frac{Z_0\Delta x}{2}\,(\bar{M}_{m+1} - \bar{M}_{m-1}), \tag{19d}$$

$$\chi_m = \frac{Z_0(\Delta x)^3}{2K_0}\,(W_{m+1} - W_{m-1}), \tag{19e}$$

unde s-au introdus notațiile

$$\delta_m = \delta_0\xi_m, \tag{20a}$$

$$K_0 = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\mu^2)}, \tag{20b}$$

$$K_m = K_0\xi_m^3 \tag{20c}$$

(indicele zero caracterizează valoarea mărimii respective la bază $m = 0$).

Notînd încă

$$Z_m = Z_0\eta_m \tag{21a}$$

și introducînd parametrul plăcii,

$$\lambda = \frac{1-\mu^2}{n^4}\cdot\frac{l^4}{a^2\delta_0^2}, \tag{21b}$$

ecuațiile (8) și (9) se scriu :

$$12(W_{m-1} - 2W_m + W_{m+1}) + \frac{\bar{M}_{m-1}}{\xi_{m-1}^3} + 10\frac{\bar{M}_m}{\xi_m^3} + \frac{\bar{M}_{m+1}}{\xi_{m+1}^3} = 0, \tag{22a}$$

$$-\lambda(\xi_{m-1}W_{m-1} + 10\xi_m W_m + \xi_{m+1}W_{m+1}) + \bar{M}_{m-1} - 2\bar{M}_m + \bar{M}_{m+1} =$$

$$= -\frac{1}{12}(\eta_{m-1} + 10\eta_m + \eta_{m+1})\ (m = 2, 3, 4, \ldots, n-2). \tag{22b}$$

Condițiile la limită detaliate precedent sînt scrise sub forme similare.

Este de observat că sistemul de ecuații precedent este valabil pentru toți cilindrii care au aceeași lege de variație a grosimii peretelui $\xi(x)$, aceeași lege de variație a încărcării $\eta(x)$, același parametru λ și, bine-înțeles, împărțirea peretelui în același număr de intervale n.

Pentru acțiunea unor eforturi radiale R se fac substituțiile

$$M_m = R\Delta x\bar{M}_m, \tag{23a}$$

$$w_m = \frac{12\lambda a^2}{E\delta_0\Delta x}\,RW_m, \tag{23b}$$

ecuațiile (8) și (9) devenind

$$12(W_{m-1} - 2W_m + W_{m+1}) + \frac{\bar{M}_{m-1}}{\xi^3_{m-1}} + 10\,\frac{\bar{M}_m}{\xi^3_m} + \frac{\bar{M}_{m+1}}{\xi^3_{m+1}} = 0, \quad (24a)$$

$$-(\xi_{m-1}W_{m-1} + 10\xi_m W_m + \xi_{m+1}W_{m+1}) + \bar{M}_{m-1} - 2\bar{M}_m + \bar{M}_{m+1} = 0. \quad (24b)$$

Termeni liberi apar doar în condițiile marginale (relative la nodul 0):

$$\bar{M}_{-1} = \bar{M}_1 - 2,$$

$$\frac{12}{\lambda}(W_{-1} - 2W_0 + W_1) + \left(\frac{1}{\xi^3_{-1}} + \frac{1}{\xi^3_1}\right)\bar{M}_1 = \frac{1}{\xi^3_1}, \quad (25)$$

$$-(\xi_{-1}W_{-1} + 10\xi_0 W_0 + \xi_1 W_1) + 2\bar{M}_1 = 1.$$

Pentru acțiunea unor momente M se fac substituțiile

$$M_m = M\,\bar{M}_m \quad (26a)$$

$$w_m = \frac{(1-\mu^2)(\Delta x)^2}{E\delta_0^3}\,MW_m, \quad (26b)$$

ecuațiile (8) și (9) devenind

$$W_{m-1} - 2W_m + W_{m+1} + \frac{\bar{M}_{m-1}}{\xi^3_{m-1}} + 10\,\frac{\bar{M}_m}{\xi^3_m} + \frac{\bar{M}_{m+1}}{\xi^3_{m+1}} = 0,$$

$$-\frac{\lambda}{12}(\xi_{m-1}W_{m-1} + 10\xi_m W_m + \xi_{m+1}W_{m+1}) + \quad (27)$$

$$+\bar{M}_{m-1} - 2\bar{M}_m + \bar{M}_{m+1} = 0.$$

Termeni liberi apar doar în condițiile marginale (relative la nodurile 0 și 1):

$$W_{-1} - 2W_0 + W_1 + \left(\frac{1}{\xi^3_{-1}} + \frac{1}{\xi^3_1}\right)\bar{M}_1 = -10,$$

$$-\frac{\lambda}{24}(\xi_{-1}W_{-1} + 10\xi_0 W_0 + \xi_1 W_1) + \bar{M}_1 = 1, \quad (28)$$

$$W_0 - 2W_1 + W_2 + 10\,\frac{\bar{M}_1}{\xi^3_1} + \frac{\bar{M}_2}{\xi^3_2} = -1,$$

$$-\frac{\lambda}{12}(\xi_0 W_0 + 10\xi_1 W_1 + \xi_2 W_2) - 2\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = -1.$$

6. EXEMPLU DE CALCUL

Fie de determinat eforturile și deformațiile în peretele unui rezervor cilindric circular în următoarele trei situații:

a) rezervorul este încastrat perfect la bază, fiind umplut cu un lichid de greutate specifică γ;

b) rezervorul este acționat la bază de eforturi radiale R;

c) rezervorul este acționat la bază de momente M.

În toate cazurile marginea superioară este liberă. Grosimea peretelui variază liniar pe înălțime avînd valoarea δ_0 la bază și δ_s la marginea superioară.

Date numerice: — înălțimea rezervorului $l = 9{,}0$ m,

— raza cilindrului $a = 9{,}0$ m,

— grosimea peretelui la bază $\delta_0 = 0{,}4$ m,

— idem la marginea liberă $\delta_s = 0{,}2$ m,

— coeficientul de contracție transversală $\mu = \frac{1}{6}$.

Vom împărți înălțimea peretelui în $n = 25$ intervale egale, deci

$$\Delta x = \frac{l}{n} = 0{,}36 \text{ m}.$$

Se formează astfel o serie de rosturi pe care le numerotăm de la bază $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, 24, 25$ (rostul $m = n = 25$ va reprezenta marginea superioară); vor mai interveni și rosturile exterioare $m = -1$ și $m = 26$).

Grosimea peretelui poate fi exprimată prin relația

$$\delta_x = \delta_0 + (\delta_s - \delta_0)\frac{x}{l} = \delta_0\left[1 + \left(\frac{\delta_s}{\delta_0} - 1\right)\frac{x}{l}\right],$$

de unde

$$\xi_m = \frac{\delta_m}{\delta_0} = 1 + \left(\frac{\delta_s}{\delta_0} - 1\right)\frac{x}{l} = 1 - 0{,}5\frac{x}{l}.$$

Presiunea lichidului variază după legea

$$Z(x) = -\gamma(l - x) = -\gamma l\left(1 - \frac{x}{l}\right) = -Z_0\eta(x)$$

cu

$$Z_0 = \gamma l \quad \text{și} \quad \eta_m = 1 - \frac{x_m}{l}.$$

Tabelul 1

$m =$	Metoda plurilocală				Metoda diferențelor finite			
	w	N_φ	M_x	Q_x	w	N_φ	M_x	Q_x
0	0	0	+11,3118	−0,1499	0	0	+10,8745	−0,1442
1	− 3,5606	0,05276	6,1426	−0,1104	− 3,3983	0,05035	5,9072	−0,1060
2	−11,2557	0,16338	2,4813	−0,0756	−10,7192	0,15559	2,3954	−0,0725
3	−20,7572	0,29502	0,0918	−0,0472	−19,7323	0,28045	0,1066	−0,0452
4	−30,3756	0,42254	−1,2972	−0,0255	−28,8256	0,40098	−1,2229	−0,0245
5	−38,9927	0,53061	−1,9516	−0,0101	−36,9373	0,50264	−1,8500	−0,0097
6	−45,9676	0,61163	−2,1074	−0,0001	−43,4630	0,57830	−2,0012	−0,00014
7	−51,0321	0,66358	−1,9580	+0,0057	−48,1534	0,62615	−1,8618	+0,0054
8	−54,1871	0,68822	−1,6506	0,0084	−51,0143	0,64792	−1,5722	0,0077
9	−55,6096	0,68947	−1,2893	0,0089	−52,2173	0,64741	−1,2313	0,0084
10	−55,5734	0,67222	−0,9407	0,0081	−52,0247	0,62929	−0,9022	0,0076
11	−54,3881	0,64143	−0,6418	0,0067	−50,7307	0,59830	−0,6200	0,0063
12	−52,3544	0,60161	−0,4079	0,0050	−48,6203	0,55871	−0,3990	0,0048
13	−49,7353	0,55648	−0,2400	0,0035	−45,9418	0,51403	−0,2399	0,0033
14	−46,7413	0,50884	−0,1301	0,0022	−42,8932	0,46695	−0,1354	0,0021
15	−43,5248	0,46067	−0,0662	0,0012	−39,6180	0,41932	−0,0739	0,0012
16	−40,1838	0,41315	−0,0356	0,0005	−36,2081	0,37228	−0,0433	0,0005
17	−36,7690	0,36693	−0,0261	0,0001	−32,7123	0,32644	−0,0341	0,0001
18	−33,2955	0,32219	−0,0279	−0,00009	−29,1423	0,28100	−0,0352	−0,00007
19	−29,7546	0,27893	−0,0334	−0,00012	−25,4884	0,23894	−0,0395	−0,00009
20	−26,1261	0,23702	−0,0374	−0,00004	−21,7307	0,19714	−0,0421	−0,00001
21	−22,3902	0,19635	−0,0368	+0,00009	−17,8512	0,15655	−0,0402	+0,00012
22	−18,5381	0,15697	−0,0305	+0,00022	−13,8430	0,11721	−0,0327	0,00019
23	−14,5791	0,11904	−0,0196	0,00029	− 9,7184	0,07935	−0,0207	0,00031
24	−10,5437	0,08290	−0,0073	0,00025	− 5,5117	0,04334	−0,0077	0,00032
25	− 6,4746	0,04895	0	0	− 1,2708	0,00010	0	0
Multiplicator	$\frac{\gamma a^2 l}{E\delta_0}$	$\gamma a l$	$\gamma l^3 \cdot 10^{-3}$	γl^2	$\frac{\gamma a^2 l}{E\delta_0}$	$\gamma a l$	$\gamma l^3 \cdot 10^{-3}$	γl^2

Coeficientul λ are valoarea

$$\lambda = \frac{1}{25^4}\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\frac{9^4}{9^2 \cdot 0{,}4^2} = 0{,}00126.$$

Datorită faptului că $\eta(x)$ are o variație liniară, membrul drept al ecuației (22b) ia forma simplă (cu $x_{m-1} = x_m - \Delta x$ și $x_{m+1} = x_m + \Delta x$),

$$\frac{1}{12}(\eta_{m-1} + 10\eta_m + \eta_{m+1}) = 1 - \frac{x_m}{l} = \eta_m.$$

Rezolvarea pentru cele trei cazuri de încărcare și rezemare o fost făcută în baza unui program de calcul.

Pentru rezervorul încastrat perfect la bază, umplut cu lichid, valorile lui w, N_φ, M_x și O_x în diferitele rosturi au fost trecute în tabelul 1, comparativ cu valorile obținute prin metoda diferențelor finite obișnuită [6].

Se constată o bună concordanță între cele două variante de diferențe finite (explicabil prin numărul mare de intervale considerat), cu abateri

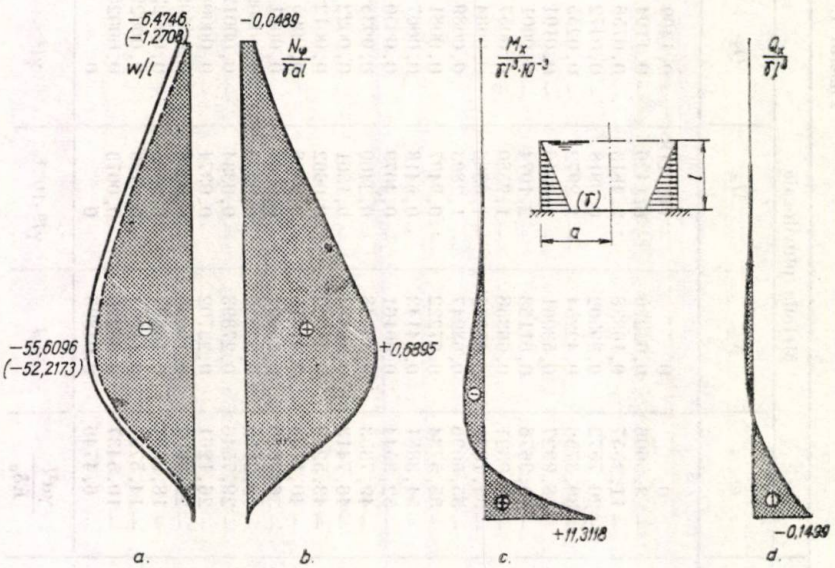


Fig. 1

mai mari către marginea superioară; din cauza valorilor mici pe care le iau mărimile căutate, diferențele sînt însă nesemnificative.

Variația mărimilor precedente pe înălțimea peretelui a fost reprezentată în figura 1.

Pentru rezervorul acționat la bază de eforturi radiale R, variațiile lui w, N_φ, M_x și O_x pe înălțimea peretelui au fost reprezentate în figura 2.

Pentru rezervorul acționat la bază de momente M, variațiile lui w, N_φ, M_x și Q_x pe înălțimea peretelui au fost reprezentate în figura 3.

Primit în redacție la 25 martie 1988

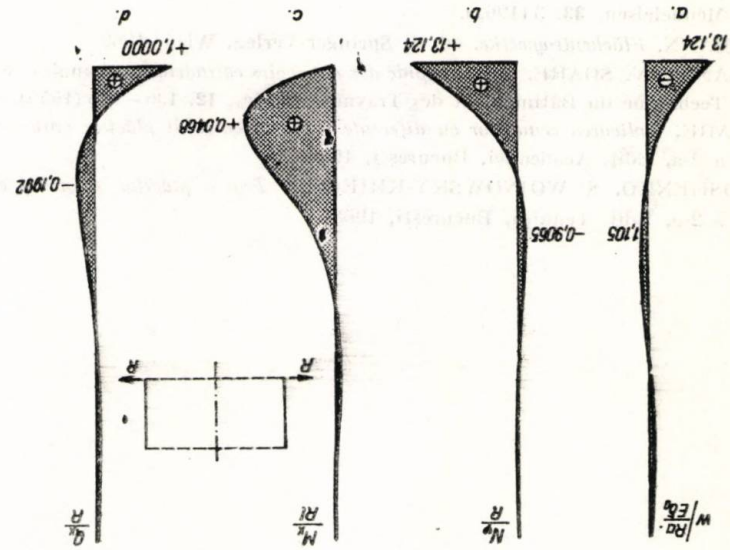


Fig. 2

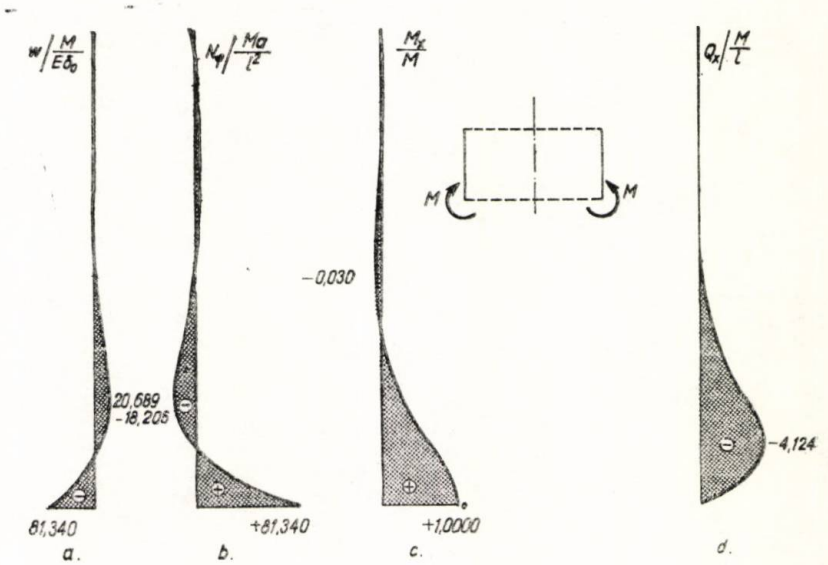


Fig. 3

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEȘ, M. V. SOARE, *Calculul plăcilor curbe subțiri*, Edit. Tehnică, București, 1969.
2. T. BRØNDUM-NIELSEN, *Axisymmetric Bending of Shells*, Danish Technical Press, Copenhagen, 1962.
3. T. BRØNDUM-NIELSEN, *Axisymmetric Bending of Concrete Shells*, Bygningsstatiske Meddelelsen, **33**, 3 (1962).
4. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*. ed. 6, Springer-Verlag, Wien, 1963.
5. M. HANGAN, M. V. SOARE, *Calcul rapide des réservoirs cylindriques*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, **12**, 135—136 (1959).
6. M. V. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri*. ed. a 2-a, Edit. Academiei, București, 1968.
7. ST. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*. ed. a 2-a, Edit. Tehnică, București, 1968.

TRACȚIUNEA ELASTOHIDRODINAMICĂ ÎN ANGRENAJE CILINDRICE EVOLVENTICE

de O. S. CREȚU

Institutul de Subingineri, Suceava

Lucrarea prezintă particularitățile ungerii EHD în angrenaje cilindrice, insistînd asupra tracțiunii elastohidrodinamice. Se deduce o relație teoretică a coeficientului de tracțiune și se analizează implicațiile tracțiunii EHD asupra durabilității roților dințate.

1. INTRODUCERE

Exploatarea rațională a unui angrenaj de orice tip implică printre altele cunoașterea regimului de lubrifiere. Regimul de lubrifiere la angrenaje nu este un regim staționar existînd numeroși factori care-i produc varierea periodică (variația curburilor, variația vitezei de rostogolire, variația vitezei de alunecare, variația sarcinii etc.).

Ținînd seama de prezența alunecării dintre flancuri rezultă că în cupla superioară formată prin contactul dintre doi dinți apare tracțiunea EHD. Variația coeficientului de tracțiune de-a lungul liniei de angrenare nu este suficient lămurită, cu toate că acest coeficient are o influență considerabilă asupra durabilității contractului.

Rezultă necesitatea determinării comportamentului tribologic a contactului dintre dinți și prin prisma tracțiunii EHD.

2. UNGEREA ELASTOHIDRODINAMICĂ A ANGRENAJELOR

Există numeroase cercetări privind grosimea peliculei de lubrifiant între flancurile roților dințate [2, 9, 12, 16, 19—23] etc. și se pare că rezultatele sînt aproape de realitate. Astfel, în [2] Bartz prezintă relațiile de calcul a grosimii minime a peliculei pentru angrenaje cilindrice cu dinți drepți sau înclinați, pentru angrenaje conice cu dinți drepți sau înclinați. Pentru calcule curente pot fi utilizate monograme ca cele din [2] care exprimă această valoare pentru un raport de transmitere i, sarcină unitară pe lungimea fișiei de contact q și viscozitatea η_0 fixate, funcție de turația medie și distanța dintre axele roților. Pentru a avea siguranța lubrifierii fluide a contactului, se recomandă verificarea inegalității $\lambda \geqslant 4$.

Grosimea minimă a peliculei de lubrifiant s-a calculat de diverși autori în condiții izoterme care nu sînt în realitate respectate datorită în primul rînd a tracțiunii EHD. Se realizează o creștere a temperaturii care atrage după sine o diminuare a viscozității și deci o scădere a grosimii peliculei de lubrifiant. Această abatere se poate corecta după Bartz astfel:

$$h_{min\ neizoterm} = C_{th}\, h_{min\ izoterm}, \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 359—367

unde

$$C_{th} = \frac{1}{1 + 0{,}254A^{0{,}62}} \quad \text{și} \quad A = \frac{U^2 \gamma_{th} \eta_0}{\lambda_{th}},$$

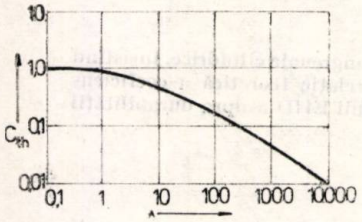


Fig. 1

în figura 1 factorul de corecție C_{th} este prezentat funcție de A.

În lungul liniei de angrenare este necesar a se ține seama de prezența vitezei de alunecare care are uneori valori considerabile și care modifică această grosime. Cercetări în această direcție au fost realizate de Cheng și Sternlicht [4], de Kraghelski și Alișin [12] și de Drozdov și Romashin [9].

3. TRACȚIUNEA ÎN ANGRENAJE

3.1. COMPARAȚII ÎNTRE ÎNCERCĂRILE DE TRACȚIUNE PE MAȘINI DE ÎNCERCAT CU DISCURI ȘI ÎNCERCĂRILE PE ROȚI DINȚATE

Mulți autori sînt de părere că teoriile lubrificației EHD valabile în regim stabilizat de lubrificație pot fi aplicate la mecanisme cu roți dințate [1, 3, 5, 6, 10, 11, 14, 16, 17, 22, 27, 30, 31]. Menționăm îndeosebi cîteva rezultate. Astfel, Benedict [3] afirmă că este posibilă o corelare dintre testele pe mașini cu discuri și mașini cu roți dințate dacă vitezele exterioare, razele de curbură, temperatura și sarcinile sînt comparabile cu cele ale profilului dintelui.

Coleman [6], într-o retrospectivă generală în 1969, a cerut studii suplimentare cu privire la corelarea între testele pe roți dințate și pe discuri. Un răspuns a fost a lui Niemann și Stassel [16] care au stabilit că frecarea măsurată la discuri este în concordanță cu măsurătorile pe roți efectuate de Ohlendorf [18].

O propunere pentru simularea contactului dintre dinții unor roți dințate a fost făcută mult mai corect de Peters [19], care a sugerat un dispozitiv la care cinematica și încărcarea dinamică este asemănătoare cu a roților dințate. Nu se cunosc însă rezultate de pe această mașină de încercat, dar un mecanism cu alunecare variabilă a discurilor a fost folosit de Ishida [11] pentru studierea între altele a frecării.

Majoritatea testelor pe discuri evită regimul mixt de lubrifiere și reprezentările grafice ale coeficientului de tracțiune funcție de viteza de alunecare amintesc de reprezentările lui Radzimovsky [24].

Consensul general este că nu s-a realizat o corelație acceptabilă între testele pe mecanismele cu role și discuri și mecanismele cu roți dințate.

Pentru a realiza o analogie este absolut necesar ca dantura roților să fie din același material, aceeași duritate superficială și finisare și să lucreze în același regim de lubrificație, viteză și sarcină. Pentru ultimii doi parametrii se ivesc mari dificultăți privind analogia.

3.2. TESTĂRI PE ROȚI DINȚATE

Din cauza dificultăților de tot felul sînt puține încercări preocupate cu măsurarea randamentului instantaneu sau a coeficientului instantaneu de tracțiune.

Rezultatele încercărilor lui Ohlendorf au fost prelucrate de Block care a dat o reprezentare a coeficientului mediu de tracțiune cuprins între 0,03 și 0,06. Ambii au realizat încercări cu regim mixt de lubrificație.

Primul succes cu privire la măsurarea variației instantanee a momentului de frecare l-a avut Radzimovsky care a efectuat o serie de teste la viteze de peste 6 rot/min și a obținut un coeficient de frecare efectiv care a înglobat întregul fenomen de fricțiune la roți dințate.

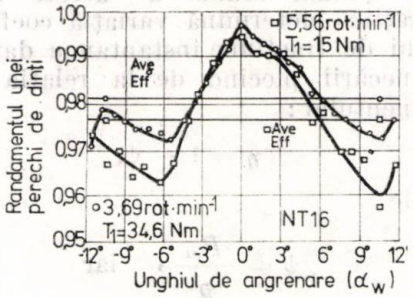


Fig. 2

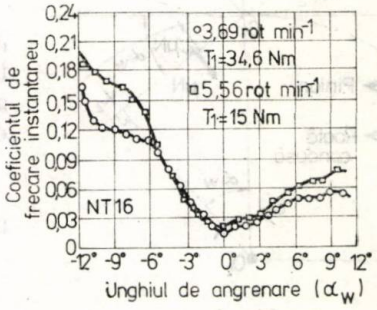


Fig. 3

După ce prezintă variația randamentului instantaneu de-a lungul liniei de angrenare (fig. 2) în [25] se calculează și coeficientul de tracțiune instantaneu obținînd figura 3. Așa cum este de așteptat, în polul angrenării apare un coeficient de tracțiune, iar variația acestuia este asimetrică față de polul angrenării. *Se explică asimetria prin prezența tracțiunii de rostogolire.*

Valoarea mare a coeficientului de tracțiune și vitezele folosite dau indicații ferme asupra regimului mixt de lubrificație, confirmat de autori înșăși.

3.3. VARIAȚIA COEFICIENTULUI DE TRACȚIUNE ÎN LUNGUL LINIEI DE ANGRENARE

Asimetria curbei de variație a randamentului și a coeficientului de tracțiune *nu poate fi explicată prin prezența tracțiunii de rostogolire.* Tracțiunea de rostogolire poate fi considerată constantă pe întregul segment de angrenare așa cum se arată [13]. Deci efectul ei asupra randamentului instantaneu cu aceeași valoare indiferent de poziția punctului de contact pe dreapta de angrenare. Valoarea cu care intervine tracțiunea de rostogolire asupra randamentului instantaneu se determină prin considerarea randamentului în polul angrenării unde alunecarea este nulă. Se poate determina variația randamentului instantaneu în lungul liniei de angrenare datorită tracțiunii de alunecare prin translarea curbelor din figura 4 astfel încît în polul angrenării să se realizeze randamentul de 100%.

Pentru explicarea asimetriei variației randamentului instantaneu se face apel la figura 4, care prezintă un angrenaj reprezentat prin cercurile de rostogolire și linia de angrenare împreună cu forțele de tracțiune EHD care acționează de-a lungul profilului dinților.

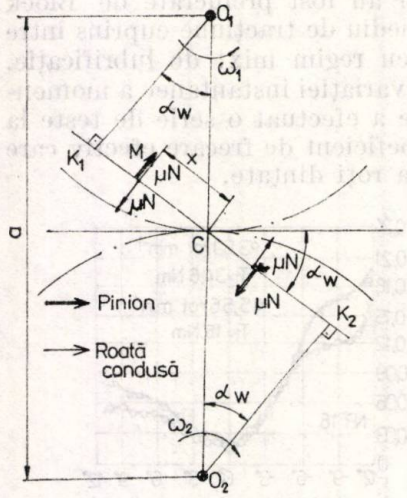


Fig. 4

Se constată că pentru segmentul de intrare în angrenare (K_1C) forța de tracțiune μN se opune rotirii roții conduse, iar pe segmentul de ieșire din angrenare (CK_2) forța de tracțiune ajută la rotirea roții conduse. Astfel se explică asimetria curbei de variație a randamentului instantaneu.

Ținînd seama de aceste considerații se determină variația coeficientului de tracțiune instantaneu datorită alunecării plecînd de la relația randamentului :

$$\eta = 1 - \psi, \tag{2}$$

unde

$$\psi = \frac{P_{pt}}{p}, \quad \text{iar}$$

$$P_{pt} = \mu N |U_1 - U_2|.$$

Viteza de alunecare în lungul profilului,

$V_{al} = U_1 - U_2 = \omega_1 a \sin \alpha_w \dfrac{i+1}{i} X$, conform [23], deci

$$P_{pt} = \operatorname{sign}(X) \mu N \omega_1 a \sin \alpha_w \frac{i+1}{i} X. \tag{3}$$

Puterea transmisă la roata condusă are expresia

$$P = N \cdot \frac{dw_2}{2} \cos \alpha_w \cdot \omega_2 + \operatorname{sign}(X) \mu N \left(\frac{dw_2}{2} \sin \alpha_w - Xa \sin \alpha_w \right) \omega_2. \tag{4}$$

Randamentul capătă forma :

$$\eta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_w \dfrac{dw_2}{2} + \operatorname{sign}(X) \mu \left(\dfrac{dw_2}{2} - Xa \right)}{\operatorname{ctg} \alpha_w \dfrac{dw_2}{2} + \operatorname{sign}(X) \mu \left(\dfrac{dw_2}{2} - aiX \right)}. \tag{5}$$

Explicit, coeficientul de tracțiune se obține:

$$\mu = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_w \dfrac{dw_2}{2} (1 - \eta)}{\operatorname{sign}(X) \left[\eta \left(\dfrac{dw_2}{2} + aiX \right) - \left(\dfrac{dw_2}{2} - Xa \right) \right]} \tag{6}$$

În cazul unui angrenaj nedeplasat și cu raport de transmitere $i = 1$, relația coeficientului de tracțiune devine:

$$\mu = \frac{\operatorname{ctg} 20^\circ (1 - \eta)}{\operatorname{sign}(X) [\eta(1 + 2X) - (1 - 2X)]}. \tag{7}$$

Utilizînd valorile experimentale ale randamentului instantaneu din figura 2 și relația 7, se determină curbele de variație ale coeficientului de tracțiune de alunecare în lungul liniei de angrenare reprezentat în figura 5.

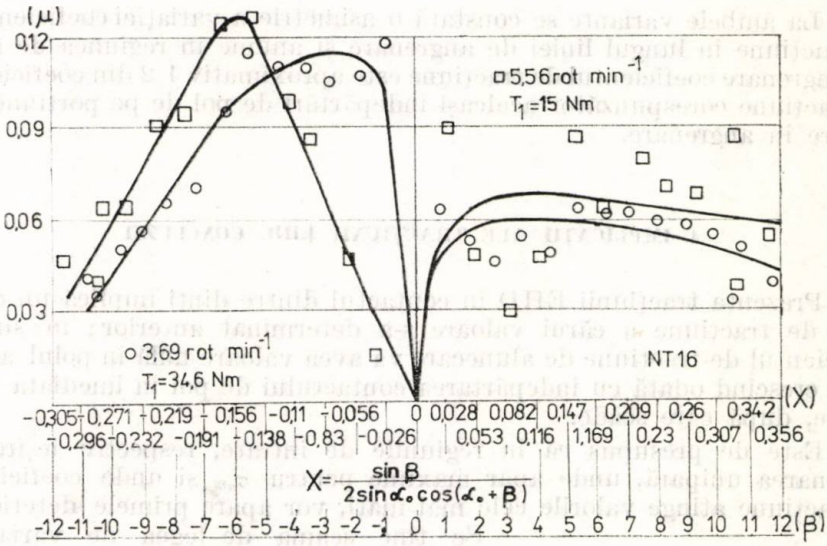


Fig. 5

Relația de legătură dintre coeficientul X și unghiul β este

$$X = \frac{\sin \beta}{2 \sin \alpha_0 \cdot \cos(\alpha_0 + \beta)} \tag{8}$$

Analizînd figurile 6 și 8 care exprimă variația coeficientului de tracțiune de-a lungul liniei de angrenare se observă că în timp ce la figura 3, μ crește continuu pe măsura îndepărtării de polul angrenării, la figura 4 obținută în lucrare, se realizează o creștere a lui μ în imediata vecinătate a polului angrenării pentru alunecări specifice, $\xi = 0{,}20 - 0{,}30$.

Evoluția coeficientului de tracțiune de-a lungul liniei de angrenare, conform figurii 8 se justifică prin aceea că la roțile dințate presiunile de contact dintre flancurile dinților sînt relativ joase.

Coeficientul de tracțiune funcție de alunecarea specifică variază pentru diferite presiuni, conform figurii 6 [7, 8].

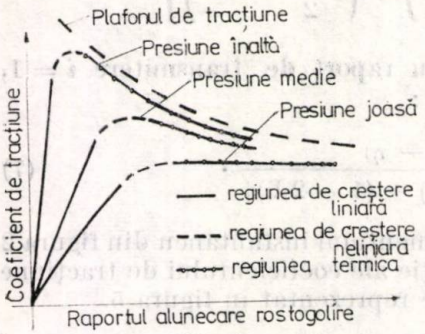


Fig. 6

Se observă că la presiuni de contact joase, caracteristice roților dințate, după o creștere liniară și neliniară a valorii coeficientului de tracțiune apare o plafonare a variației acestuia. Rezultă că nu se poate accepta o creștere permanentă a coeficientului de tracțiune de-a lungul liniei de angrenare, deoarece, deja la mici îndepărtări de polul angrenării apar alunecări relative în lubrifiant, corespunzătoare alunecărilor ce caracterizează regiunea termică a curbelor de tracțiune.

La ambele variante se constată o asimetrie a variației coeficientului de tracțiune în lungul liniei de angrenare și anume în regiunea de ieșire din angrenare coeficientul de tracțiune este aproximativ 1/2 din coeficientul de tracțiune corespunzător aceleași îndepărtări de pol de pe porțiunea de intrare în angrenare.

4. IMPLICAȚII ALE TRACȚIUNII EHD. CONCLUZII

Prezența tracțiunii EHD în contactul dintre dinți implică un coeficient de tracțiune a cărui valoare s-a determinat anterior; în sinteză coeficientul de tracțiune de alunecare va avea valoare nulă în polul angrenării, crescînd odată cu îndepărtarea contactului de pol în imediata vecinătate, după care scade.

Este de presupus că în regiunile de intrare, respectiv ieșire din angrenarea unipară, unde apar maxime pentru σ_{0m} și unde coeficientul de tracțiune atinge valorile cele mai mari, vor apare primele deteriorări.

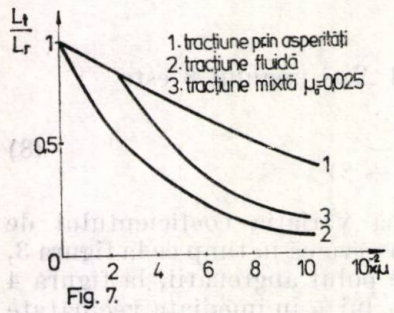


Fig. 7.

Fig. 7

Se ține seama de legea de variație a durabilității cu tracțiune [7, 8] reprezentată grafic în figura 7.

$$\frac{L_t}{L_r} = (1 + 0{,}947\,\mu_a)^{10,3}[1 + 2{,}93(\mu - \mu_a)]^{10,3}. \tag{9}$$

Este unanim cunoscut faptul că pittingul apare de regulă sub cercul de rostogolire, indiferent de tipul roții (conducătoare sau condusă), avînd forma și orientarea cunoscută [26].

Pentru a explica acest fenomen de apariție preferențială a pittingului (la intrarea în angrenarea unipară pentru pinion și la ieșirea din angrenarea unipară pentru roată), trebuie să se țină seama de concluzia generală [15] după care pittingul apare mai degrabă pe suprafața la care direcția forței de frecare (tracțiune) este opusă direcției de rostogolire.

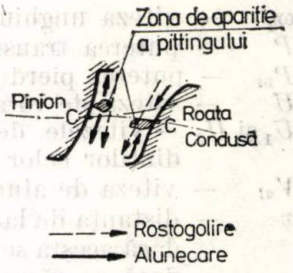


Fig. 8

De asemenea, Miyashi [15] constată un minim de durabilitate pentru o valoare a alunecării relative $\xi \simeq 0{,}4$.

Acestei alunecări specifice îi corespunde pentru danturi necorijate tocmai regiunile de trecere de la angrenarea monopară la bipară și invers [20].

Pentru un angrenaj, forța de tracțiune este îndreptată de-a lungul profilului dintelui conform figurii 8, pentru roata conducătoare și pentru roata condusă.

Din aceste figuri reiese clar de ce pittingul apare diferențiat pe cele două roți. La fiecare roată în regiunea interioară cercului de rostogolire forța de tracțiune este opusă direcției de rostogolire.

Rezultă că pentru a preciza cît mai corect durabilitatea unei roți dințate dintr-un angrenaj este necesar a se evalua parametrii contactului cu tracțiune elastohidrodinamică din imediata vecinătate interioară cercului de rostogolire a roții.

NOTAȚII FOLOSITE

a — distanța dintre axe;
α — coeficient de presiune a viscozității;
α_w — unghi de angrenare;
β_0 — unghiul de înclinare a danturii;
C_{th} — factor de corecție pentru influența termică;
η — randamentul angrenajului datorită tracțiunii de alunecare;
η_0 — viscozitate la presiune atmosferică;
γ_{th} — coeficient termic al viscozității;
h_{min} — grosimea minimă a filmului de lubrifiant;
i — raportul de transmitere;
q — sarcina pe unitate de lungime a contactului liniar;
L_r — durabilitatea contactului în cazul rostogolirii pure;
L_t — durabilitatea contactului cu luarea în considerație a tracțiunii de alunecare;
λ — raportul dintre grosimea minimă a peliculei de lubrifiant și rugozitatea medie a celor două suprafețe ce realizează contactul;
λ_{th} — coeficient de conducție termică;
μ — coeficient de tracțiune la alunecare;
μ_a — coeficient de tracțiune limită la alunecare prin asperități;
N — forța normală transmisă prin contact;
ω_1 — viteza unghiulară a roții conducătoare;

ω_2 — viteza unghiulară a roții conduse;
P — puterea transmisă elementului condus;
P_{pt} — puterea pierdută în angrenaj prin tracțiune la alunecare;
U — viteza de rotație periferică;
U_1 și U_2 — vitezele de deplasare a punctului de contact pe profilele dinților celor două roți;
V_{al} — viteza de alunecare din punctul de contact;
x — distanța de la punctul de contact la polul angrenării este negativă dacă acesta se află pe segmentul de intrare în angrenare și pozitivă dacă se găsește pe segmentul de ieșire din angrenare;

$X = \dfrac{x}{a \sin \alpha_w}$ — coeficient ce definește poziția punctului de contact pe segmentul de angrenare;

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} + \text{ pentru } x \geqslant 0; \\ - \text{ pentru } x < 0; \end{cases}$$

σ_{0m} — tensiunea normală maximă în punctul de contact;
ψ — coeficientul de pierderi datorită tracțiunii de alunecare;

$\xi = \dfrac{2(u_1 - u_2)}{u_1 + u_2}$ — alunecare relativă din lubrifiant.

Primit în redacție la 15 februarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. S. ANDERSSON, *A partial elastohydrodynamic theory for the running — in process of hobbed gears*, Wear, **41** (1977).
2. W. J. BARTZ, *Zahnradpaarungen auslegen mit Elastohydrodynamik*, Maschinenmarkt Sept. (1985).
3. G. H. BENEDICT, *Correlation of disc machines and gear tests*, ASLE Trans., nr. 11, p. 591—596.
4. H. S. CHENG, *A numerical Solution for the pressure, temperature and film Thickness between two infinitely long, Lubricated Rolling on Sliding cylinders under heavy load*, ASME Paper No. 64, Lub. 11, Presented to the joint ASME-ASLE International Lubrification Conference, Washington, Oct. 13—16, 1975.
5. Y. P. CHIU, *Aproximate calculation of power loss in involute gears*, ASLE/ASME Lubrification Conf. Miami, Oct. 1975, Paper 75, ASME, New York.
6. W. COLEMAN, *Gear design consideration, interdisciplinary approach to lubrication, of concentrated surfaces*, NASA Symp., July 1969, NASA spec. Publ. SP-237, 1970.
7. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicații la mașini unelte*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic, Iași, 1981.
8. E. N. DIACONESCU, *Pitting under traction in heavily loaded point contacts*, Teză de doctorat, Universsity of London, 1975.
9. Y. N. DROZDOV, O. G. ROMASCHIN, Maşinovedenie, 1 (1980).
10. T. I. FOWLE, *Gear lubrication — a review*, Revue M. Mech., **20**, 3 (1975).
11. K. ISHIDA, *Subsurface deformation and friction in simulating gear tooth contact*, Proc. JSLE — ASLE Lubrication Conf., Tokyo, June 1975, Elsevier Amsterdam 1976, p. 492.
12. I. V. KRAGELSKY, *Friction Wear, Lubrication*, vol. 1—2, Mir, Moscow, 1981.
13. K. F. MARTIN, *A review of friction predictions in gear teeth* Wear, **49** (1978).
14. E. H. MERRIT, *Gear Engineering*, Wiley, New York, 1971, p. 345—357.

15. MIYASHI HISOSKI TAKADA Jun., *Study of the pitting in rolling contact*, Journal of the mechanical laboratory of Japan, **13** (1967).
16. G. NIEMANN, K. STOSSEL, *Reibungszahlen bei elastohydrodynamischer Schmierung in Reibrad- und Zahnradgetrieben*, Konstruktion, **23** (1971)
17. J. P. O'DONOGHUE, A. CAMERON, *Friction and temperature in rolling sliding contacts*, ASLE Trans., **9** (1966).
18. H. OHLENDORF — *Verlustleistung und Erwarnung von Stirnrädern*, Teză de doctorat, TU München, 1958.
19. D. PAVELESCU, *Tribotehnica*, Edit. Tehnică, București, 1983.
20. D. PAVELESCU, M. MUȘAT, A. TUDOR, *Tribologie*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1977.
21. D. PAVELESCU, *Considerații privind influența rugozității presiunii și a viscozității în regimul EHD*, Sesiunea științifică a Institutului Politehnic, București, 14—15 mai 1983.
22. R. M. PETERS, *Proposals for a spur gear wear simulating rig*, Wear **16** (1970).
23. N. POPINCEANU ș.a., *Problemele fundamentale ale contactului cu rostogolire*, Edit. Tehnică, București, 1985.
24. E. I. RADZIMOVSKY, *The instantaneous efficiency and coefficient of friction of an involute gear*, ASME Mechanisms Conf. and Int. Symp. on Gearing and Transmissions, Oct. 1972, 72-PTG-13, ASME, New York.
25. E. I. RADZINOVSKY, *Dynamic behaviour of gear systems and variations of coefficient of friction and efficiency during the engagement cycle*, J. Eng. Ind., **97**, 4 (1975).
26. M. RAȘEEV, *Contribuții asupra influenței ungerii și a forței de frecare asupra stării de eforturi și uzării roților dințate, metalice cu dinți drepți*, teză de doctorat, I. P. București, 1985.
27. L. ROZEANU, *Friction transients (their role in friction failures)*, Proc. JSLE — ASLE, Lubrication Conf., Tokyo, June 1975, Elsevier, Amsterdam, 1976, p. 357.
28. D. M. SANDBORN, *Fluid rheological effects in sliding — elastohydrodynamic, point contacts with transient loading*, J. Lubr. Technol., **93**, 3 (1971).
29. K. SASAKI, K. OKAMURA, T. KONISHI, *Fundamental research on gear lubrication 2rd report*, Bull. JSME, **5**, 19 (1962). *Fundamental research on gear lubrication, 3rd report*, Bull. JSME, **6**, 22 (1963).
30. F. H. WAIGHT, *Discussion on Session 3*, Proc. Int. Conf. on Gearing, 1958, Inst. Mech. Eng., London, 1958, p. 397.
31. H. WATSON, *The choice of gear lubricants*, Proc. Int. Conf. on Gearing, 1958, Inst. Mech. Eng., London, 1958, paper 28, p. 126—134.

ASUPRA CONDIȚIILOR DE INTRARE ÎN FILMELE DE LUBRIFIANT LA NUMERE REYNOLDS MARI *)

de V. N. CONSTANTINESCU

Institutul Politehnic, București

Se examinează condițiile de intrare în filmele de lubrifiant în regim turbulent în condițiile unor mișcări datorită unui gradient de presiune și în condițiile în care peste mișcarea precedentă se suprapune o mișcare de tip Couette transversală. Asemenea condiții simulează funcționarea lagărelor și sistemelor de etanșare cilindrice în rotație, avînd la capete o diferență de presiune. Determinările experimentale efectuate cu aer, simulează numere Reynolds de ordinul 10^4. În aceste condiții se determină coeficienții de cădere de presiune în funcție de numărul Reynolds.

Problema determinării condițiilor de intrare în filmele de lubrifiant la numere Reynolds mari prezintă interes pentru lagărele lubrificate cu medii avînd o viscozitate cinematică redusă (apă, metale lichide, gaze lichefiate). Recent, această problemă a apărut ca avînd importanță deosebită pentru unele sisteme de etanșare folosite în construcția turbopompelor vehiculînd gaze lichefiate utilizate la rachete și vehicule aero-spațiale.

La intrarea într-un film subțire de fluid mărginit de două suprafețe solide se admite de obicei că presiunea în film este egală cu presiunea mediului exterior, dacă efectele forțelor de inerție sînt mici și pot fi neglijate. Aceste efecte au ordinul de mărime $\rho v^2/2$, unde ρ este densitatea fluidului, iar v o viteză caracteristică. Dacă această „presiune dinamică" este neglijabilă față de presiunile (sau diferențele de presiuni) ce se formează în film, atunci situația de mai sus este complet acceptabilă și ca atare condiția la limită la intrare este cea menționată. În cazul cînd curgerea are loc la numere Reynolds mari este ușor de văzut că și termenul $\rho v^2/2$ are valori sporite astfel încît pot apare situații în care presiunea de intrare va fi diferită de cea a mediului înconjurător. Astfel, în regiunea de intrare apare o curgere viscoinerțială complexă, fluidul fiind accelerat sau frînat la intrare ; ca urmare, presiunea efectivă din film va fi mai mică, respectiv mai mare decît cea a mediului înconjurător (o parte din „presiunea dinamică" fiind convertită în presiune statică sau invers, fenomenul fiind influențat de condițiile de intrare, frecări locale, desprinderi etc.).

Există cîteva situații caracteristice care pot apare în aplicații. Astfel, dacă mișcarea este aproape de una bidimensională și este produsă de translația unei suprafețe solide [1], atunci de obicei apare o frînare a fluidului la intrare, iar presiunea efectivă este mai mare decît cea a mediului înconjurător. La intrarea în filmele alimentate sub presiune sau în unele sisteme de etanșare curgerea are loc datorită unui gradient de presiune, iar zona de intrare acționează ca un restrictor inerent [2] (curgeri

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

Poiseuille); în aceste condiții fluidul este accelerat la intrarea în film, iar presiunea de intrare efectivă va fi mai mică decît aceea a mediului exterior. Problema se complică prin efecte tridimensionale, dar, cel puțin calitativ, cele două tendințe menționate se vor regăsi și în aceste situații. Totuși, studiul detaliat al curgerilor din zona de intrare este greu de făcut analitic, chiar pentru cazurile mai simple bidimensionale, astfel încît informații utile nu pot fi obținute încă decît pe cale experimentală.

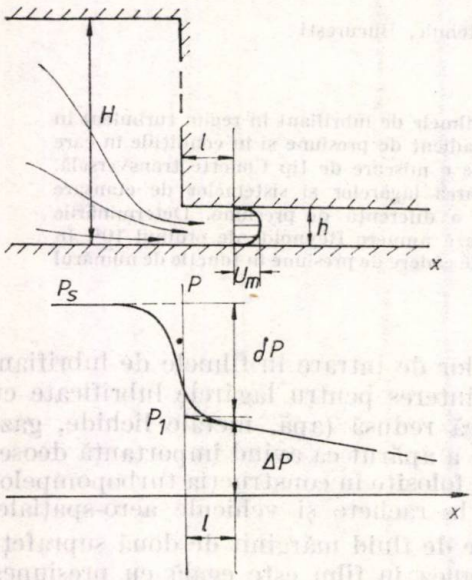


Fig. 1

În prezenta lucrare se prezintă unele rezultate experimentale pentru curgerile de tip Poiseuille, care pot servi pentru aplicațiile în care apar asemenea mișcări: filme hidrostatice, sisteme de etanșare. Considerînd o curgere aproximativ bidimensională și neglijînd efecte tridimensionale (de exemplu efectul unei translații în direcția normală pe planul mișcării sau efectul unei rotații echivalente), distribuția reală de presiuni va avea alura prezentată schematic în figura 1, unde s-a considerat un domeniu $H \gg h$ în care fluidul este aproape imobil.

Dacă prin film curge un anumit flux (debit pe unitatea de lățime transversală), respectiv se stabilește o viteză medie U_m și un număr Reynolds

$$R'e = \frac{\rho U_m h}{\mu}, \tag{1}$$

atunci pe măsură ce fluidul este accelerat, presiunea statică scade, stabilizîndu-se după o anumită lungime de intrare l_i la o alură liniară (gradient de presiune constant), corespunzînd unei curgeri Poiseuille complet dezvoltate. Presupunînd că această curgere are loc chiar din secțiunea de intrare, rezultă prin extrapolare o presiune $p_1 < p_s$ în această secțiune. Problema care se pune este deci evaluarea căderii de presiune $\delta p = p_s - p_1$, în primul rînd ca o funcție de numărul Reynolds $R'e$ (1).

Mișcarea Poiseuille bidimensională a fost realizată experimental cu instalația prezentată schematic în figura 2. Fluidul vehiculat este aer, antrenat de o turbosuflantă la viteze suficient de mici (15—30 m/s) pentru a considera curgerea drept incomparabilă, dar suficient de mari pentru a atinge în filmul h numere Reynolds de ordinul a 2000—10000. Detalii privind măsurarea presiunilor sînt prezentate în figura 3 iar poziționarea prizelor de presiune rezultă din schema din figura 2.

Rezultatele experimentale sînt prezentate în figurile 3—5 pentru respectiv $h = 2, 3$ și 4 mm și diferite presiuni p_s. Se constată că aceste curbe pun clar în evidență alura din figura 1, iar căderea de presiune δp depinde de presiunea dinamică $\rho U_m^2/2$ și de numărul Reynolds. Această pierdere de presiune se poate pune sub forma

$$\delta p = \alpha_s \frac{\rho}{2} U_m^2, \qquad \alpha_s = \alpha_s(R'e), \tag{2}$$

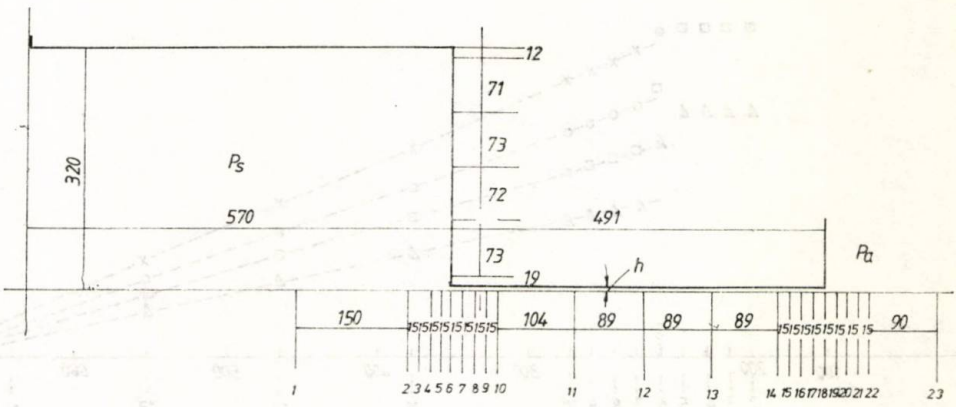


Fig. 2

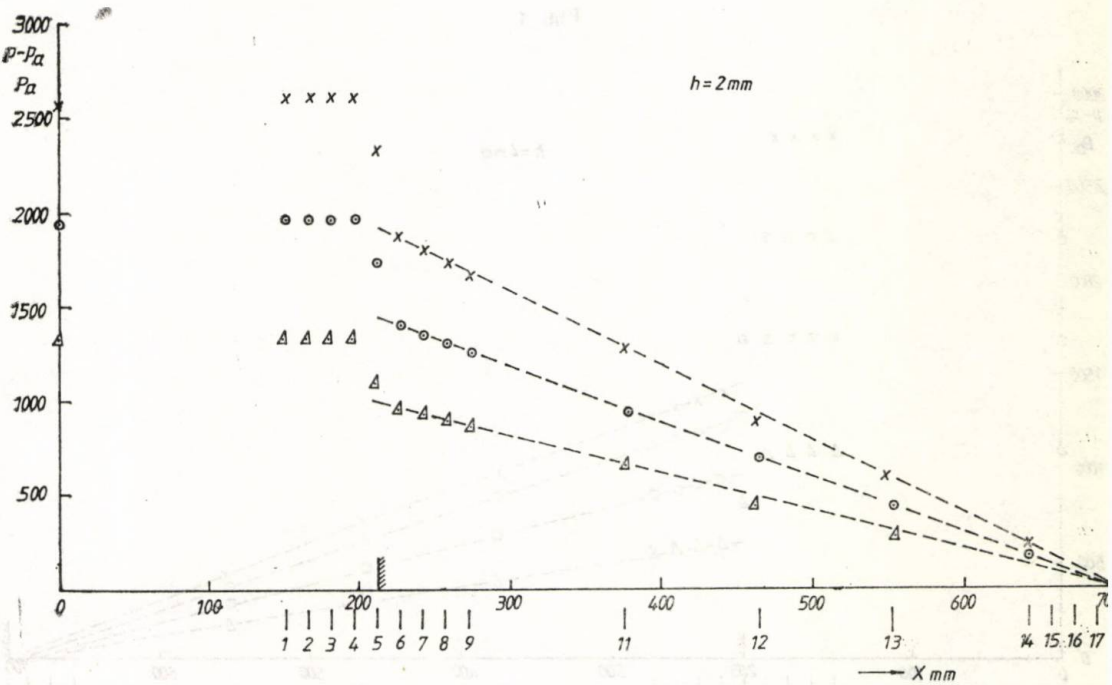


Fig. 3

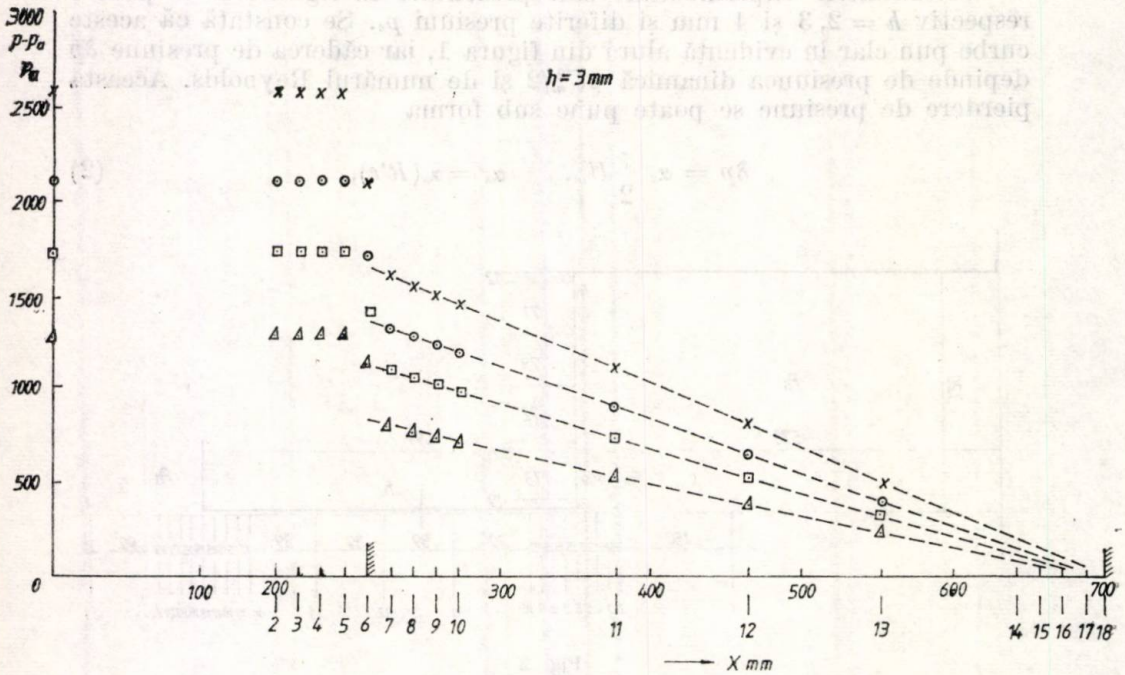

3000
p-p₀
p₀
2500
2000
1500
1000
500
0
h = 3 mm
100
200
300
400
500
600
700
2 3 4 5 6 7 8 9 10
11
12
13
14 15 16 17 18
X mm

Fig. 4

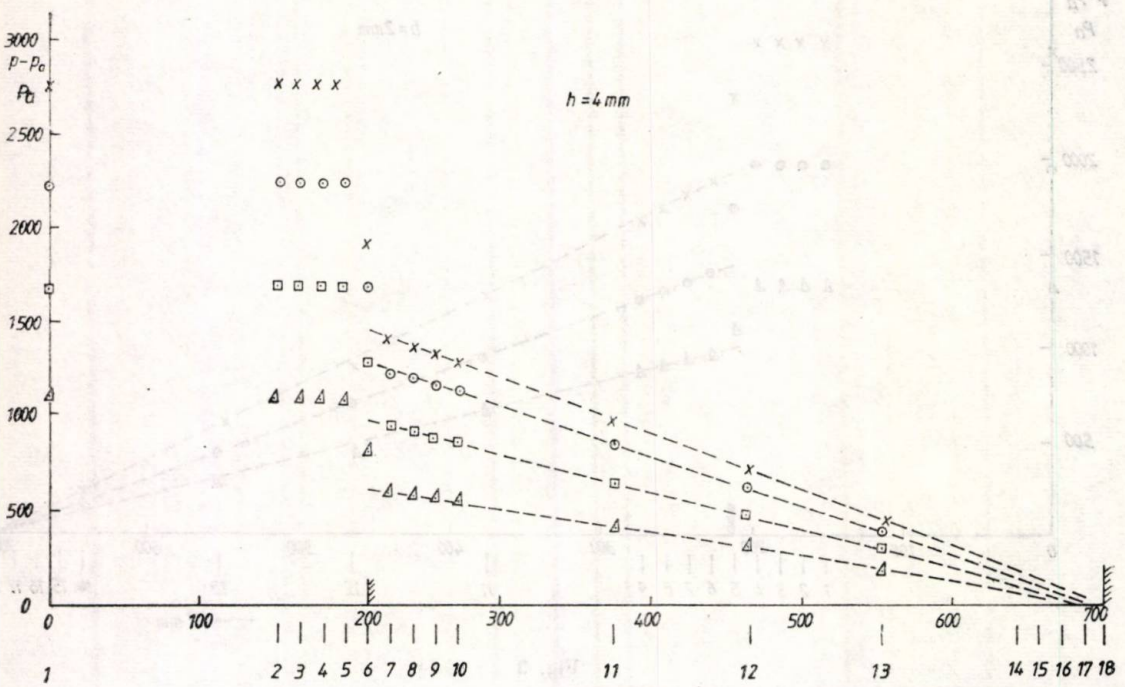

3000
p-p₀
p₀
2500
2000
1500
1000
500
0
h = 4 mm
100
200
300
400
500
600
700
1
2 3 4 5 6 7 8 9 10
11
12
13
14 15 16 17 18

Fig. 5

sau sub forma echivalentă

$$q = \alpha_D S_i \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{p_s - p_1}, \qquad \alpha_D = \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}, \tag{3}$$

folosită pentru evaluarea debitului Q în restrictoarele inerente (S_i — secțiunea de intrare, $S_i = h \cdot B$, unde B este lățimea canalului în direcția normală pe planul figurii 1 sau 2).

Viteza U_m(respectiv numărul Reynolds (1)) poate fi calculată plecînd de la gradientul de presiune, prin utilizarea unor relații cunoscute. Astfel, în regim laminar,

$$q = \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} B = U_m hB, \tag{4}$$

iar în regim turbulent [3],

$$q = \frac{h^3}{\mu R} \frac{dp}{dx} B = U_m hB, \tag{5}$$

unde

$$K = \frac{1}{K_G} R'e^n, \qquad K_G = 6{,}8, \qquad n = 0{,}681, \tag{6}$$

relații valabile pentru $10^3 < R'e < 10^5$ în regim turbulent.

În acest mod, rezultatele din figurile 3—5 sînt sintetizate în diagramele din figurile 6—7, în care s-au reprezentat α_S și α_D în funcție de numărul Reynolds $R'e$. Datele experimentale pot fi înlocuite cu o bună precizie de relațiile

$$\alpha_S = \frac{26{,}87}{R'e^{0,32}}, \qquad \alpha_D = 0{,}193\ R'e^{0,16} \tag{7}$$

pentru domeniul de numere Reynolds explorat experimental sau, cu o precizie ceva mai modestă, de relația

$$\alpha_S = 1 + \frac{410}{R'e^{0,78}}. \tag{8}$$

valabilă în principiu și pentru $R'e \to \infty$ cînd $\alpha_S \to 1$.

Este de remarcat că deoarece pierderile de frecare se adaugă efectelor inerțiale (conversia a unei părți din presiunea statică în presiune dinamică) în toate cazurile a rezultat $\alpha_S > 1$.

Relațiile (7) (8) pot fi utilizate pentru evaluarea mai precisă a pierderilor de intrare în diferite aplicații (filme hidrostatice, sisteme de etanșare). Este de notat că în calculele curente se admit anumite valori empirice pentru α_S sau mai obișnuit α_D (3), indiferent de numărul Reynolds al mișcării din film.

Pentru a explora și unele efecte tridimensionale specifice sistemelor cilindrice de etanșare de la unele turbopompe, s-a studiat experimental și curgerea care are loc între doi cilindri aproximativ coaxiali, fără rotație

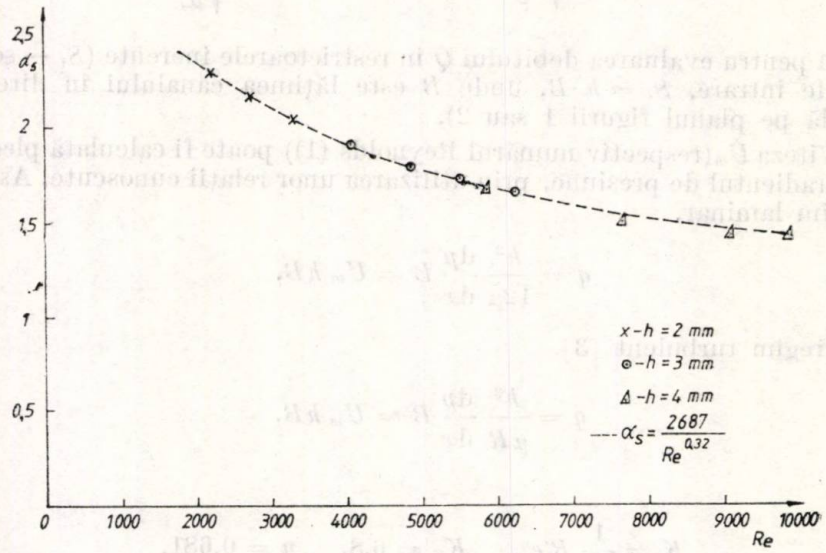


Fig. 6

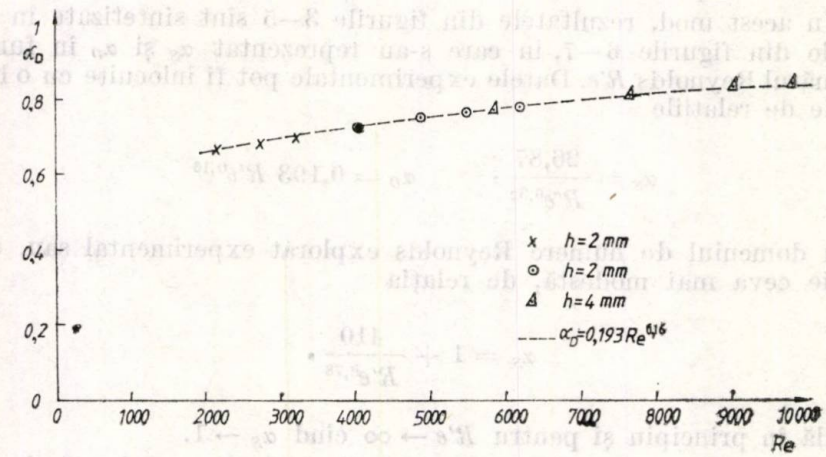


Fig. 7

și respectiv cu rotație. Astfel, în figura 8 se prezintă o vedere generală a instalației utilizate precum și modul de dispunere a prizelor de presiune. Jocul radial utilizat a fost de $h = 2$ mm.

Un exemplu privind rezultatele statice (turația axului $n = 0$) și cele obținute pentru $n = 2000$, 3000, 4000 rot/min sînt prezentate în figura 9.

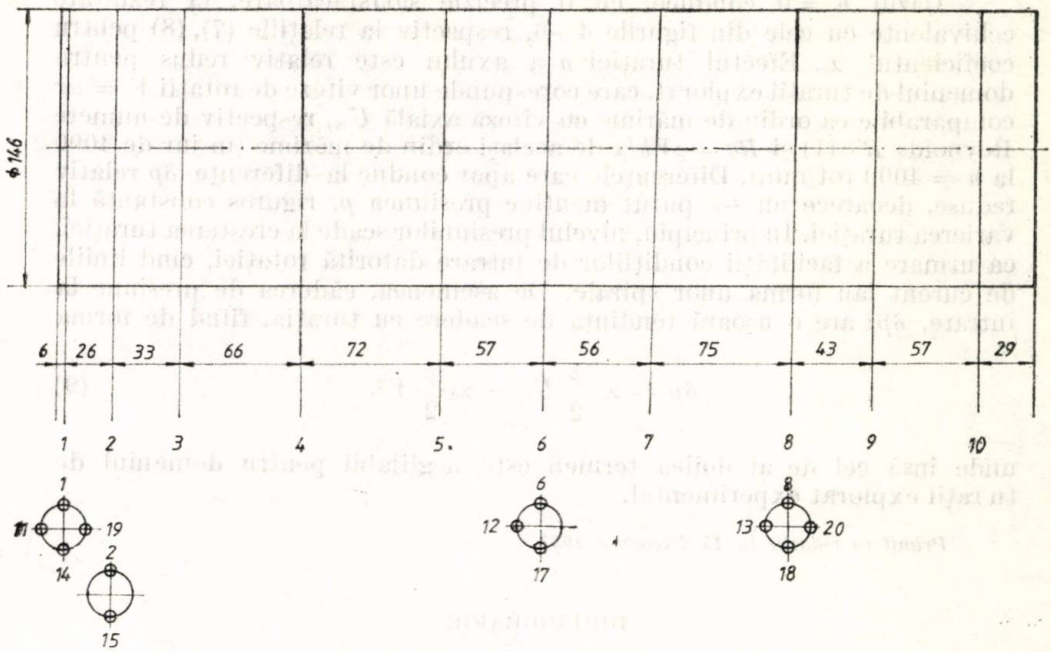

φ146
6 26 33 66 72 57 56 75 43 57 29
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1
11 19
2
14
15
6
12
17
8
13 20
18

Fig. 8

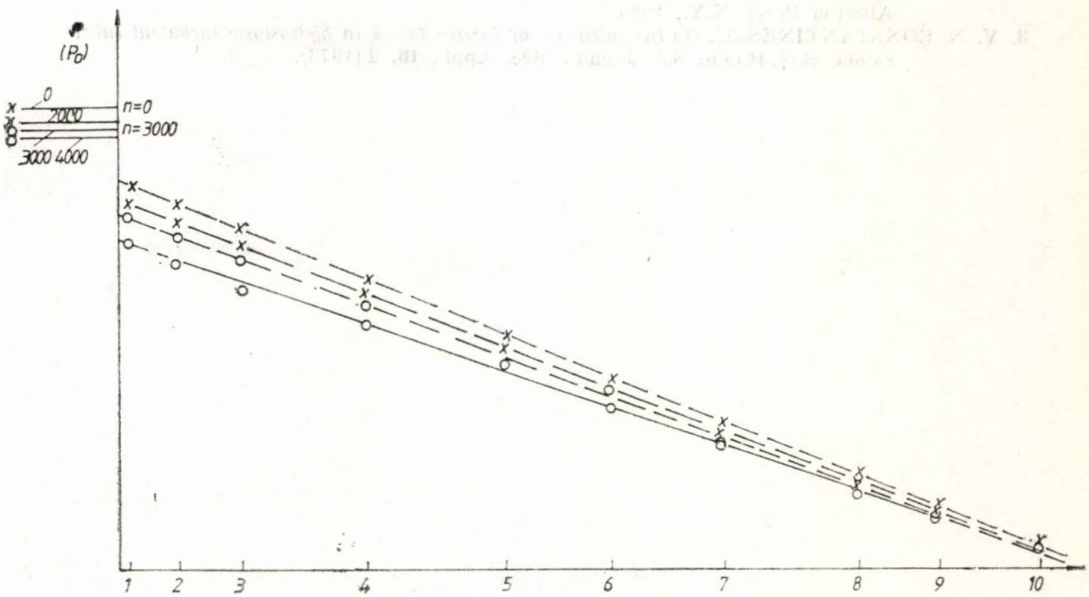

(P_0)
0
2000
3000 4000
n=0
n=3000
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 9

Cazul $n = 0$ conduce, cu o precizie satisfăcătoare, la rezultate echivalente cu cele din figurile 4—6, respectiv la relațiile (7), (8) pentru coeficientul α_s. Efectul turației n a axului este relativ redus pentru domeniul de turații explorat, care corespunde unor viteze de rotații $V = \omega r$ comparabile ca ordin de mărime cu viteza axială U_m, respectiv de numere Reynolds $R'e$ (1) și $Re = \rho Vh/\mu$ de același ordin de mărime (în jur de 4000 la $n = 4000$ rot/min). Diferențele care apar conduc la diferențe δp relativ reduse, deoarece nu s-a putut menține presiunea p_s riguros constantă la varierea turației. În principiu, nivelul presiunilor scade la creșterea turației, ca urmare a facilității condițiilor de intrare datorită rotației, cînd liniile de curent iau forma unor spirale. De asemenea, căderea de presiune la intrare, δp, are o ușoară tendință de scădere cu turația, fiind de forma

$$\delta p = \alpha_s \frac{\rho}{2} U_m^2 - \alpha_v \frac{\rho}{2} V^2, \tag{9}$$

unde însă cel de al doilea termen este neglijabil pentru domeniul de turații explorat experimental.

Primit în redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, S. GĂLEȚUȘE, F. KENNEDY, *On the comparison between lubrication theory, including turbulence and inertia forces and some existing experimental data*, ASME Trans. Series F, Journ. of Lub. Tehn., **95**, 3, July (1975).
2. V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, M. PASCOVICI, M. CEPTUREANU, I. NEDELCU, *Lagăre cu alunecare*, Edit. Tehnică, București, 1980, Slider Bearings, Allerton Press, N.Y., 1985.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *On the influence of inertia forces in hydrostatic turbulent lubrication*, Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **18**, 2 (1973).

PROBLEMA TERMICĂ LA GRUPURILE DE ETANȘARE CU INELE DE ALUNECARE DE GROSIME MARE *

de Z. MORARIU și D. PAVELESCU

Institutul Politehnic, București

Articolul prezintă o rezolvare a problemei termice prin metoda nervurii de secțiune constantă. Metoda este specifică grupurilor cu etanșări frontale echipate cu inele de alunecare care au raportul între lățimea de etanșare și grosimea inelului redus. Pe baza acestei metode se poate determina temperatura din filmul de lubrifiant și din inelele de alunecare, cu luarea în considerare a factorilor de influență.

NOTAȚII

Bi — criteriul Biot;
D — cifra de disipație a căldurii;
K — coeficientul global de transfer termic;
P_f — căldura generată prin frecare vîscoasă;
Q_z — căldura transmisă prin conducție;
Q_{cv} — căldura transmisă prin convecție;
T — temperatura în filmul de fluid;
$T_{1,2}$ — temperatura în fața activă a inelului fix și mobil;
$T_{i,e}$ — temperatura de intrare și ieșire a fluidului de etanșat;
T_f — temperatura fluidului de etanșat;
T_M — temperatura în inelul mobil;
$\bar{T}_k = T_k/T_f$ — temperaturi adimensionale ($K = 1, 2, f, M$);
b — lățimea de contact (etanșare);
h — grosimea filmului de fluid;
r — rază;
$r_{1,2}$ — raza interioară și exterioară a inelului mobil;
r_m — raza medie a inelului mobil;
$\bar{r}_1 = r_1/r_2$ — rază adimensională;
$v = r_2\omega$ — viteza periferică a inelului mobil;
r, φ, z — coordonate cilindrice;
$\bar{z} = \frac{z}{h}$; $\bar{z}_0 = \frac{z}{\delta_0}$ coordonate adimensionale;
α — coeficientul de convecție;
δ_0 — grosimea inelului mobil;
η — randamentul termic al etanșării;
θ — excesul de temperatură între suprafața inelului mobil și fluidul de etanșat;
θ_0 — excesul de temperatură între suprafața activă a inelului mobil și fluidul de etanșat;
λ — conductivitatea termică a inelului mobil;

---

* Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 377—383

λ_l — conductivitatea termică a fluidului de etanșat;
μ — viscozitatea dinamică a fluidului de etanșat;
ω — viteza unghiulară a inelului mobil.

1. INTRODUCERE

Funcționarea corectă a etanșărilor frontale, părți principale componente ale grupurilor de etanșare, depinde în mare măsură de regimul termic din fanta interfacială. Astfel, modurile de distrugere a inelelor de alunecare au ca principal factor declanșator, temperatura. În acest sens, lucrarea prezintă o metodă analitică de determinare a cîmpului de temperaturi în filmul de lubrifiant și în suprafețele inelelor de alunecare.

Metoda prezentată se referă, în special, la etanșările frontale utilizate la pompele de proces din industria petrochimică și a celor integrate în sistemul de răcire al motoarelor termice.

2. MODELUL FIZIC ȘI MATEMATIC

Caracteristicile geometrice și constructive ale modelului fizic considerat sînt prezentate în figura 1. La aceste etanșări frontale, lățimea de contact a inelelor de alunecare fiind mult mai mică în raport cu celelalte dimensiuni, gradienții de temperatură pe direcție radială se pot neglija. În rest, situația considerată este identică cu modelele prezentate în lucrările [1, 2]. Astfel, în baza ipotezelor uzuale pentru studiul filmelor subțiri în regim laminar și a condițiilor la limită pentru temperaturi [1, 2], rezultă expresiile de calcul al temperaturilor în fața activă a inelului fix și în filmul de lubrifiant, precum și expresia căldurii generate prin frecare vîscoasă,

$$T_1 = T_2 + \frac{\mu\omega^2}{2\lambda_l} r_2^2, \tag{1}$$

$$T = T_2 + \frac{\mu\omega^2}{2\lambda_l} r_2^2\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \tag{2}$$

$$P_f = \frac{\pi}{2}\frac{\mu\omega^2}{h}(r_2^4 - r_1^4). \tag{3}$$

Determinarea temperaturii din fața activă a inelului mobil implică scrierea unor condiții suplimentare privind transferul de căldură în exterior. De fapt, este necesară scrierea bilanțului termic global dintre căldura generată în film și căldura transmisă conductiv prin inel și conectiv de la inel la fluidul de etanșat.

Pe baza cercetărilor prezentate [1, 2] s-au definit direcțiile de transfer ale căldurii din suprafața de frecare spre mediul exterior. Astfel, în prima fază căldura se transmite pe direcția axială, iar în a doua fază pe direcție radială către zonele cu temperatură mai coborîtă.

În acest caz, inelul mobil, care are lățimea mică în raport cu grosimea, se aproximează cu o nervură cilindrică de secțiune inelară constantă. Transferul de căldură se realizează numai prin suprafața laterală exterioară, suprafețele, frontal posterioară și lateral interioară sînt considerate izolate termic (fig. 2).

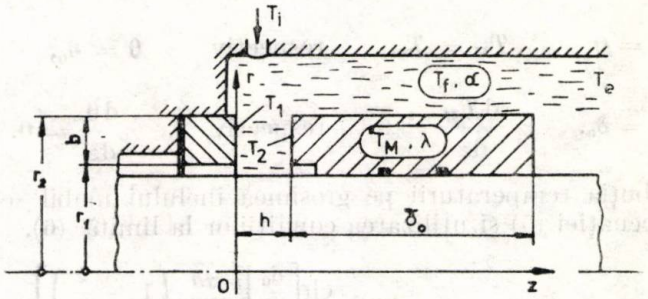


Fig. 1. — Modelul fizic.

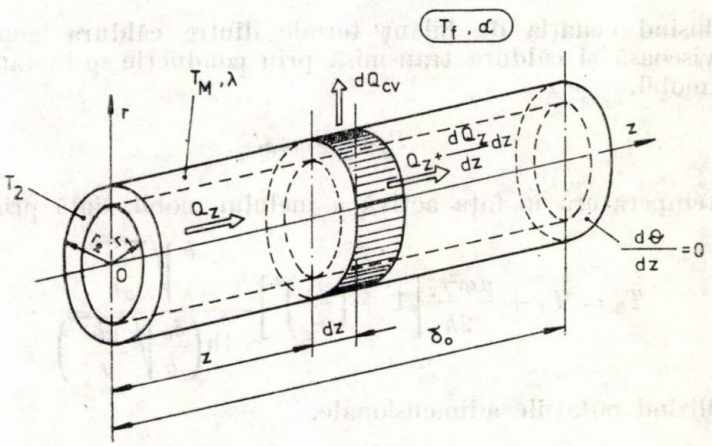


Fig. 2. — Transmiterea căldurii prin inelul mobil.

Pentru elementul de volum de grosime dz din inel s-a scris bilanțul termic [3]

$$Q_z = Q_z + \frac{dQ_z}{dz} dz + dQ_{cv}. \tag{4}$$

Pentru situația considerată, ecuația diferențială a procesului de transfer termic este de forma

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - m^2\theta = 0, \tag{5}$$

unde

$$\theta = T_M - T_f; \qquad \theta_0 = T_2 - T_f; \qquad m^2 = \frac{\alpha}{b\lambda}.$$

Condițiile la limită pentru temperaturi conform cazului prezentat în figura 2 sînt :

$$\begin{aligned} &z = 0, \qquad T_M = T_2, \qquad \text{respectiv} \qquad \theta = \theta_0, \\ &z = \delta_0, \qquad \frac{dT_M}{dz} = 0, \qquad \text{respectiv} \qquad \frac{d\theta}{dz} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Distribuția temperaturii pe grosimea inelului mobil se obține prin integrarea ecuației (5) și utilizarea condițiilor la limită (6),

$$T_M = T_f + (T_2 - T_f)\frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\delta_0}{b}\sqrt{\frac{\alpha b}{\lambda}}\left(1 - \frac{z}{\delta_0}\right)\right]}{\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_0}{b}\sqrt{\frac{\alpha b}{\lambda}}\right)}. \tag{7}$$

Folosind ecuația de bilanț termic dintre căldura generată prin frecare vîscoasă și căldura transmisă prin conducție prin fața activă a inelului mobil,

$$P_f = Q_{z|z=0}, \tag{8}$$

rezultă temperatura în fața activă a inelului mobil, dată prin expresia

$$T_2 = T_f + \frac{\mu\omega^2 r_2^2}{2h}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]\frac{\frac{b}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha b}}}{\operatorname{th}\left(\frac{\delta_0}{b}\sqrt{\frac{\alpha b}{\lambda}}\right)}. \tag{9}$$

Utilizînd notațiile adimensionale,

$$\begin{aligned} &D = \frac{\mu\omega^2 r_2^2}{\lambda_l T_f}; \qquad Bi = \frac{\alpha b}{\lambda}, \\ &K = \frac{\frac{\lambda_l}{h}\frac{b}{\lambda}(1 + \bar{r}_1^2)}{\sqrt{Bi}\,\operatorname{th}\left(\frac{\delta_0}{b}\sqrt{Bi}\right)}, \end{aligned} \tag{10}$$

temperaturile fluidului de etanșat, în suprafețele inelelor de alunecare și în filmul de fluid, vor fi :

$$T_f = \frac{T_e + T_i}{2},$$

$$\bar{T}_2 = 1 + \frac{D}{2} K,$$

$$\bar{T}_1 = 1 + \frac{D}{2}(K + 1), \tag{11}$$

$$\bar{T} = 1 + \frac{D}{2}[K + (1 - \bar{z}^2)],$$

$$\bar{T}_M = 1 + \frac{D}{2} K \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\delta_0}{b}\sqrt{Bi}(1 - \bar{z}_0)\right]}{\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_0}{b}\sqrt{Bi}\right)}.$$

Pentru aprecierea performanțelor de autorăcire a etanșării frontale, s-a definit randamentul termic al etanșării, dat prin relația

$$\eta = \frac{\int_0^{\delta_0} 2\pi r_2 \alpha (T_M - T_f) dz}{2\pi r_2 \delta_0 \alpha (T_2 - T_f)} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{\delta_0}{b}\sqrt{Bi}\right)}{\frac{\delta_0}{b}\sqrt{Bi}}. \tag{12}$$

Mărimea temperaturilor și a randamentului termic depind de geometria inelului mobil, prin raportul b/δ_0, și de raportul în care se află rezistența termică conductivă b/λ și cea conectivă $1/\alpha$, prin care se definește de fapt criteriul Biot (Bi).

Schimbul de căldură și randamentul termic tind spre valoarea lor maximă, dacă $Bi \to 0$ și $b/\delta_0 \to 0$.

Ca urmare, inelele de alunecare trebuie executate din materiale cu conductivitate termică ridicată care va asigura o valoare scăzută pentru criteriul Biot, menținînd diferențe de temperatură $T_M - T_f$ ridicate pe grosimea inelului mobil.

De asemenea, valoarea mică a raportului b/δ_0, dar nu mai mică decît o valoare critică cerută de rezistența mecanică și tehnologia de execuție și montaj, conduce la cantități mici ale căldurii generate prin frecare vîscoasă și la creșterea suprafeței de transfer prin convecție.

3. APLICAȚII NUMERICE ȘI CONCLUZII

În vederea obținerii unor rezultate prin care să se verifice metodologia propusă, au fost efectuate calcule numerice pentru valori ale parametrilor constructivi și funcționali care corespund unei etanșări frontale reale.

Valorile numerice ale parametrilor care intervin sînt :

$$r_1 = 0{,}022 \text{ m}; \quad r_2 = 0{,}026 \text{ m}; \quad \delta_0 = 0{,}015 \text{ m},$$

$$h = 10^{-6}\ \text{m}; \quad \lambda = 15; \quad 180\frac{\text{W}}{\text{m°C}}; \quad T_i = 50°\text{C},$$
$$T_e = 90°\text{C}; \quad v = 10\ \text{m/s}.$$

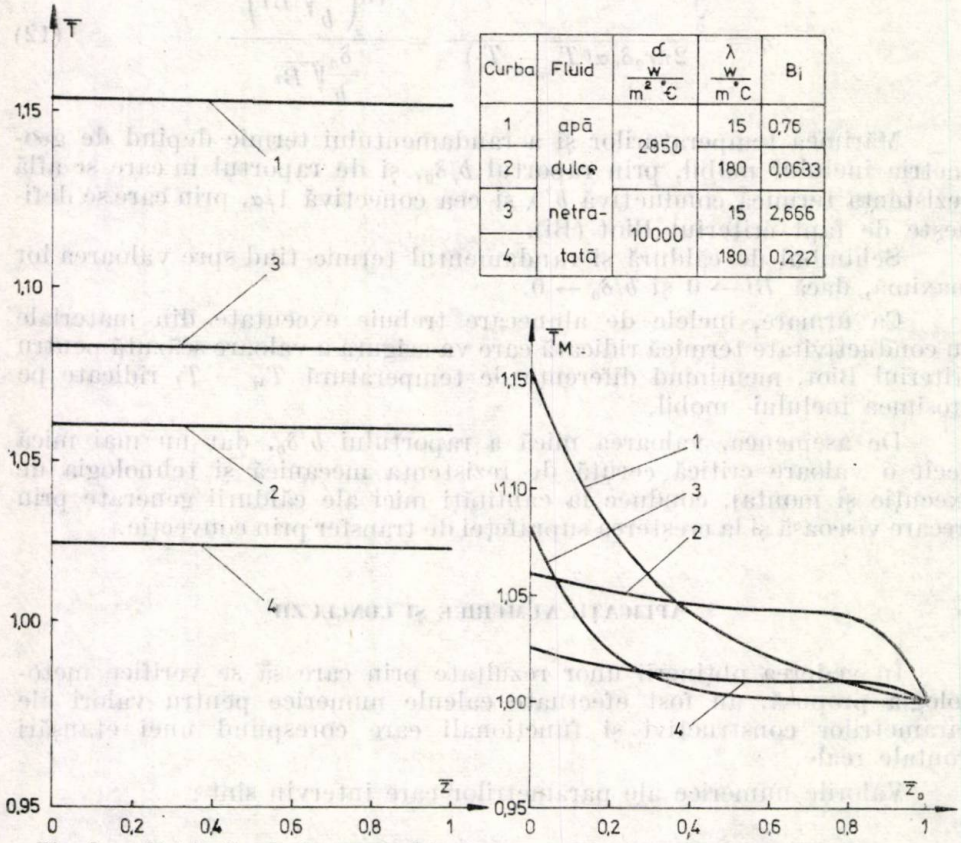
S-a folosit apă dulce netratată ale cărei caracteristice termofizice s-au ales la temperatura medie a fluidului,

$$\mu = 406{,}1 \times 10^{-6}\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}; \quad \lambda_l = 0{,}668\frac{\text{W}}{\text{m°C}}; \quad \alpha = 2850,\ 10\,000\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,°\text{C}}.$$

Rezultatele calculelor sînt prezentate în tabelul 1 și figurile 3 și 4, din care se desprind următoarele concluzii:

Tabelul 1

Parametrul	$\alpha = 2850$ W/m² °C		$\alpha = 10\,000$ W/m² °C	
	$\lambda = 15$ W/m°C	$\lambda = 180$ W/m°C	$\lambda = 15$ W/m°C	$\lambda = 180$ W/m°C
T_1 °C	80,74	74,23	75,74	71,80
T_2 °C	80,68	74,18	75,68	71,74
η	0,30	0,78	0,16	0,53



Curba	Fluid	α W/m²°C	λ W/m°C	B_i
1	apă dulce netratată	2850	15	0,76
2			180	0,0633
3		10000	15	2,666
4			180	0,222

Fig. 3. — Distribuția de temperaturi în filmul de fluid.

Fig. 4. — Distribuția de temperaturi în inelul meobil.

1. Căderile de temperatură pe grosimea filmului de fluid sînt mici (fig. 3). Acest lucru este cu atît mai vădit cu cît grosimea peliculei de fluid este mai mică și se lucrează cu lichide mai puțin vîscoase și cu capacitate calorică mare.

2. Excesul de temperatură dintre inelul mobil și fluidul de etanșat este cu atît mai mic, și randamentul termic al etanșării cu atît mai mare, cu cît conductivitatea termică este mai mare (vezi tabelul 1 și fig. 4, exp. 2 și 4). În consecință, pentru a asigura o uniformitate cît mai mare a distribuției de temperaturi pe grosimea inelului mobil, se va da preferință materialelor mai bune conducătoare de căldură.

3. Transferul de căldură este puțin influențat dacă se acționează numai asupra coeficientului de convecție α (vezi tabelul 1 și fig. 4, exp. 3 și 4). Prin urmare, se recomandă ca rezistența termică conductivă să fie mai mică decît cea conectivă ($b/\lambda \ll 1\ \alpha$).

În concluzie, formulele dezvoltate în această lucrare permit calculul temperaturilor din fanta interfacială și inelele de alunecare în vederea optimizării soluțiilor constructive și funcționale ale etanșărilor frontale.

Primit în redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. M. DUMBRAVĂ, Z. MORARIU, *Thermohydrodynamic aspect of the double mechanical seals*, 11th International Conference on Fluid Sealing, Cannes, Franța, 8—10 aprilie, 1987.
2. Z. MORARIU, M. PASCOVICI, *Studiul regimului termic al grupurilor cu etanșări frontale*, Tribotehnica, București, 1987.
3. D. ȘTEFĂNESCU, A. LECA și colab., *Transfer de căldură și masă*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.

INFLUENȚA FRECĂRII DINTRE ACE ȘI GHIDAJE ASUPRA FUNCȚIONĂRII CAPETELOR DE IMPRIMARE MATRICEALE BALISTICE *

de T. DEMIAN și C. NIȚU

Institutul Politehnic, București

Lucrarea prezintă modelul teoretic și determinările experimentale corespunzătoare analizei influenței fenomenului de frecare asupra comportării dinamice a capetelor de imprimare matriceale în funcționare de tip balistic. Sînt stabilite soluții constructive pentru îmbunătățirea acesteia.

INTRODUCERE

Progresele minicalculatoarelor și ale microprocesoarelor au făcut posibilă realizarea unor sisteme mici, dar complete, de prelucrare a datelor. Deoarece imprimanta clasică devine cel mai costisitor echipament al unui astfel de minisistem de calcul, orientarea utilizatorilor s-a îndreptat către imprimantele matriceale. Cele mai răspîndite astăzi se bazează pe impact, cu ace acționate de electromagneți cu clapetă (fig. 1).

COMPORTAREA DINAMICĂ A CAPETELOR DE IMPRIMARE MATRICEALĂ CU ACE

Productivitatea imprimatelor este asigurată de viteză, care este limitată de timpul de imprimare a unui semn. Acul parcurge distanța pînă la ansamblul panglică impregnată — hîrtie — suport de imprimare

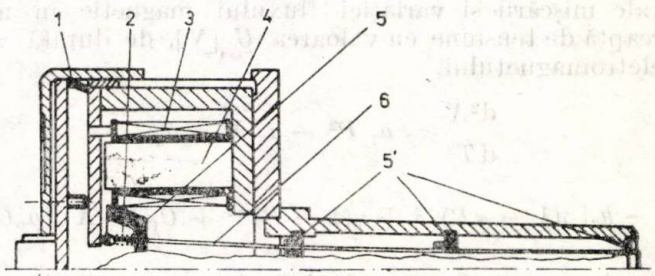


Fig. 1. — *1*, *2* — arcuri; *3* — bobină; *4* — miez; *5*, *5'* — ghidaje; *6* — ac.

și înapoi conform unui grafic reprezentat calitativ în figura 2. Acesta arată poziția acului, x, în diferite momente ale mișcării: t_1 — timpul de întîrziere determinat de creșterea forței magnetice pînă la valoarea inițială a forței rezistente; t_2 — timpul de acționare magnetică; t_3 — timpul de deplasarea acului (și armăturii) sub acțiunea energiei cinetice dobîndită în t_2;

* Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

t_4 — timpul de contact cu panglica impregnată și hîrtia; t_5 — timpul de revenire a acului în poziția inițială și t_6 — timpul de stabilire. Timpul de imprimare a unui punct, $t_p = \sum_{i=1}^{6} t_i$, este determinat, în principal, de perioadele t_1 și t_2, în care acul acumulează energia necesară imprimării corespunzătoare calitativ a unui punct. Timpul de deplasare și viteza v_3, de impact, depind atît de parametrii magnetici și electrici ai electromagnetului de acționare, cît și de parametrii mecanici ai sistemului armătură, ac, arcuri. Acestea pot fi obținute scriind ecuația de mișcare a armăturii și ciocănelului, la care se asociază ecuațiile circuitelor magnetic și electric. Creșterea fluxului magnetic în miez este determinată, utilizînd curba lui Froehlich, de aproximare a magnetizării acestuia,

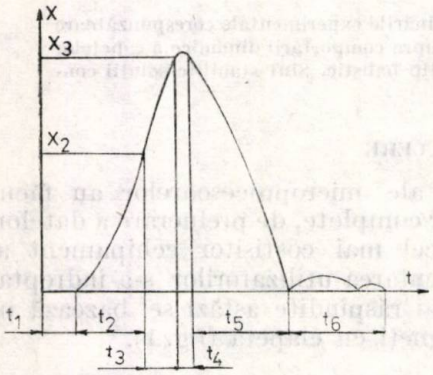


Fig. 2

$$B = C_1 H(C_2 + H)^{-1}, \qquad (1)$$

unde C_1 și C_2 sînt inducția magnetică de saturație și cîmpul magnetic în punctul de permeabilitate maximă.

Notîndu-se cu x — deplasarea acului, Φ — fluxul magnetic în miez; t — timpul; $X = x/[(l_1 + l)\varphi_0]$ — spațiul adimensional parcurs de ac; $P = \Phi/(ag)$ — fluxul magnetic adimensional; $T = t/\tau$ — timpul adimensional și utilizînd parametrii indicați în figura 3, se pot scrie ecuațiile diferențiale ale mișcării și variației fluxului magnetic în miez, pentru un semnal treaptă de tensiune cu valoarea U [V], de durată τ [s], aplicat pe bobina eletromagnetului,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}T^2} = a_1 P^2 - a_2 X - a_3, \qquad (2)$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = b_1 - b_2[\beta(1 - \alpha P)^{-2} + \gamma(1 - P)^{-2} + C_1(1 - X)/(\mu_0 C_2)]\, P. \qquad (3)$$

Parametrii acestor ecuații depind de geometria electromagneților și de caracteristicile circuitului electric de alimentare: R — rezistența electrică a electromagnetului [Ω]; N — numărul de spire al bobinei; μ_0 — permeabilitatea vidului [H/m]. Pentru electromagnetul din figura 3, aceștia sînt:

$$a_1 = \alpha C_1^2\, ag\, l\tau^2 (l_1 + l)^{-2}/(2\mu_0 m_r \varphi_0), \qquad (4)$$

$$a_2 = k_r \tau^2/m_r, \qquad (5)$$

$$a_3 = (F_f + k_r x_0)\, \tau^2/[m_r(l_1 + l)\varphi_0], \qquad (6)$$

$$b_1 = U\tau\left(1 + \frac{R}{R_1 N^2}\right)^{-1}/(NC_1 ag), \qquad (7)$$

$$b_2 = \alpha R\, C_2 l\, \varphi_0 \left(1 + \frac{R}{R_1 N^2}\right)^{-1} / (N^2 C_1 a g), \tag{8}$$

$$\alpha = a/b, \tag{9}$$

$$\beta = (2h + l - 2b)/(l\varphi_0), \tag{10}$$

$$\gamma = (a + l - b)/(l\varphi_0). \tag{11}$$

În relațiile (4)...(11), $k_r = k_1 + k_2 l_2^2/(l_1 + l)^2$ este rigiditatea redusă la axa acului; $m_r = m_{ac} + J/(l_1 + l)^2$ este masa redusă la axa acului; J — momentul de inerție al clapetei; F_f — forța de frecare la axa acului; x_0 — săgeata de pretensionare a arcurilor, redusă la axa acului; dimensiunile $a, b, g, h, l, l_1, l_2, \varphi_0$ sînt indicate în figura 3 ($b_1 \approx b_2 \approx b_3 = b$). Prin parametrul R_1 s-a ținut seama de influența curenților turbionari din miez [2],

$$R_1 = \frac{0{,}7\, L}{N^2} \frac{l\varphi_0\, \rho}{\mu_0 (h + l - b)} \frac{a^2 g^2}{a^2 + g^2}, \tag{12}$$

unde L este inductivitatea bobinei electromagnetului; ρ — rezistivitatea miezului.

După încetarea acțiunii electromagnetului, armătura și acul își continuă mișcarea liber, pînă la ciocnirea cu hîrtia. Poziția acului în această perioadă este dată de

$$x = v_2 \sqrt{\frac{m_r}{k_r}} \sin \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}\, t + \frac{F_f + k_r (x_0 + x_2)}{k_r} \cos \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}\, t - \frac{F_f + k_r x_0}{k_r}. \tag{13}$$

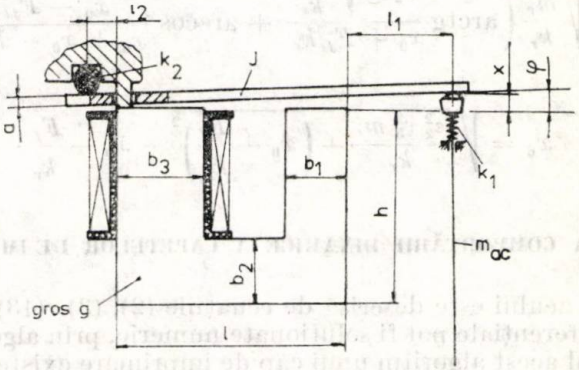


Fig. 3

Cunoscîndu-se poziția x_3 a hîrtiei față de capul de imprimare, perioada t_3 are durata

$$t_3 = 2 \sqrt{\frac{m_r}{k_r}} \operatorname{arctg} \frac{v_2 \sqrt{\frac{m_r}{k_r}} - \sqrt{\frac{m_r v_2^2}{k_r} - \left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 - x_2 + 2x_0 + \frac{2F_f}{k_r}\right)}}{x_3 - x_2 + 2x_0 + 2F_f/k_r}. \tag{14}$$

Viteza de impact pe hîrtie a acului și armăturii se obține la sfîrșitul acestei perioade

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - \frac{k_r}{m_r}(x_3 - x_2)\left(\frac{2F_f}{k_r} + 2x_0 + x_2 + x_3\right)}. \qquad (15)$$

După ciocnirea cu hîrtia, avînd un coeficient de restituire ε_1, se produce revenirea acului în perioada

$$t_5 = 2\sqrt{\frac{m_r}{k_r}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\frac{m_r\,\varepsilon_1^2\,v_3^2}{k_r} + x_3^2 + 2x_3\left(x_0 - \frac{F_f}{k_r}\right)} - \varepsilon_1 v_3\sqrt{\frac{m_r}{k_r}}}{x_3 + 2x_0 - 2F_f/k_r}. \qquad (16)$$

Poziția acului în această perioadă se exprimă prin

$$x = \left(x_3 + x_0 - \frac{F_f}{k_r}\right)\cos\sqrt{\frac{k_r}{m_r}}\,t - \varepsilon_1 v_3\sqrt{\frac{m_r}{k_r}}\sin\sqrt{\frac{k_r}{m_r}}\,t - x_0 + \frac{F_f}{k_r}. \qquad (17)$$

La sfîrșitul cursei de revenire, acul și armătura ciocnesc opritorul din poziția de repaus, cu viteza

$$v_5 = \sqrt{\varepsilon_1^2 v_3^2 + x_3(x_3 + 2x_0 - 2F_f/k_r)\,k_r/m_r}. \qquad (18)$$

Dacă ε_2 este coeficientul de restituire al ciocnirii, perioada de stabilire este caracterizată prin durata

$$t_6 = \sqrt{\frac{m_r}{k_r}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon_2 v_5\sqrt{\frac{m_r}{k_r}}}{x_0 + F_f/k_r} + \arccos\frac{x_0 - F_f/k_r}{x_6 + x_0 - F_f/k_r}\right) \qquad (19)$$

și cursa

$$x_6 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2 v_5^2 m_r}{k_r} + \left(x_0 + \frac{F_f}{k_r}\right)^2} - x_0 - \frac{F_f}{k_r}. \qquad (20)$$

ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE A CAPETELOR DE IMPRIMARE

Mișcarea acului este descrisă de ecuațiile (2), (3), (13), (17). Primele două ecuații diferențiale pot fi soluționate numeric, prin algoritmul Runge-Kutta. Aplicînd acest algoritm unui cap de imprimare existent, s-a urmărit influența forței de frecare dintre ace și ghidajele lor asupra comportării dinamice a capului. A rezultat familia de curbe deplasare—timp, din figura 4, la care parametrii cinematici ai deplasării libere, fără acționare, a acelor, sînt calculați cu relațiile (13)...(20). Datele constructive ale electromagnetului, acului și arcurilor (conform fig. 3), utilizate în calcul sînt: a=1 mm; b_1=b_3=2,1 mm; b_2=4,6 mm; l=6,3 mm; h=15,4 mm; l_1 = 3,7 mm; l_2 = 1,4 mm; φ_0 = 0,057 rad; x_0 = 2 mm; R = 8,6 Ω; U=40 V; m_r=0,155 g; l_{ac}=42 mm; d_{ac}=0,35 mm; N=360; k_r=83 N/m; $\tau = t_1 + t_2$ = 270 μs; C_1 = 2,15 T; C_2 = 700 A/m.

Se observă că mărirea forței de frecare conduce la creșterea timpului de realizare a cursei, scăderea vitezei de impact v_3, deci a energiei de imprimare sau la imposibilitatea efectuării cursei acului. Astfel, în condițiile

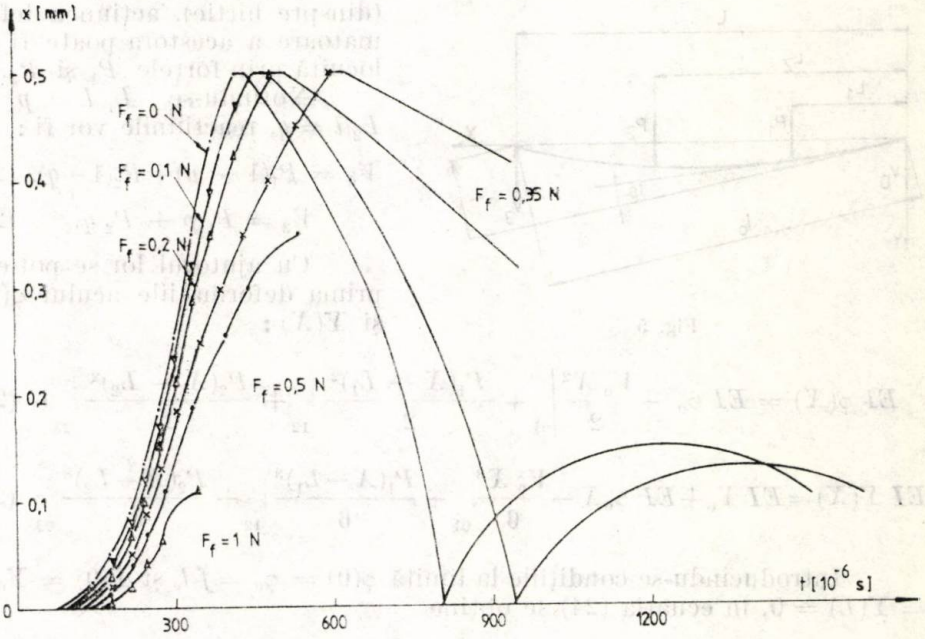


Fig. 4

concrete ale capului de imprimare analizat, viteza de imprimare minimă de 1,25 m/s, pentru imprimarea unui exemplar poate fi atinsă chiar dacă forța de frecare are valoarea 0,35 N. Totuși, datorită rigidității relativ reduse a arcurilor, acul nu poate reveni în cazul unor forțe de frecare mai mari decît 0,2 N. Pentru valori mai mari ale forței de frecare (0,5 N și 1 N), electromagnetul nu poate genera energia necesară ca acul să atingă hîrtia.

MĂSURI CONSTRUCTIVE PENTRU REDUCEREA FORȚEI DE FRECARE

Forțele de frecare sînt mai mari la capetele de imprimare cu ace curbe, datorită reacțiunilor ce apar în ghidaje. Micșorarea frecării dintre ace și ghidaje pe baza alegerii unui cuplu de materiale cu coeficient mic de frecare este limitată de necesitatea asigurării unei durabilități îndelungate a capetelor și în special de considerentele economice ale tehnologiei adoptate. Se utilizează deci, cu precădere, ghidaje din mase plastice și ace din tungsten sau oțel. Deși acele din oțel conduc la reacțiuni mai mici datorită modulului de elasticitate mai redus, tungstenul asigură o durabilitate mai ridicată. Reducerea coeficientului de frecare este obținută prin utilizarea de ungătoare cu pîslă. În partea dinspre hîrtie a capului, ghidajul este confecționat din safir sau rubin sintetic, pentru a rezista acțiunii abrazive a hîrtiei și panglicii impregnate.

Deosebit de importantă apare reducerea frecării prin diminuarea reacțiunilor în ghidaje, prin poziționarea optimă a acestora. Conform figurii 5, în cazul uzual a două ghidaje intermediare, situate la distanțele L_1, L_2 față de ghidajul inițial (dinspre hîrtie), acțiunea deformatoare a acestora poate fi înlocuită prin forțele P_1 și P_2.

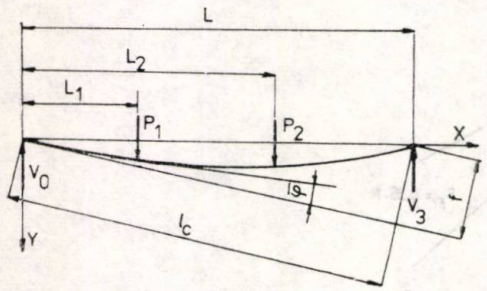


Fig. 5

Notîndu-se $L_1/L = p$ și $L_2/l = q$, reacțiunile vor fi:

$$V_0 = P_1(1-p) + P_2(1-q), \quad (21)$$

$$V_3 = P_1 p + P_2 q. \quad (22)$$

Cu ajutorul lor se pot exprima deformațiile acului $\varphi(X)$ și $Y(X)$:

$$EI\,\varphi(X) = EI\,\varphi_0 - \frac{V_0 X^2}{2}\Big|_{01} + \frac{P_1(X-L_1)^2}{2}\Big|_{12} + \frac{P_2(X-L_2)^2}{2}\Big|_{23}, \quad (23)$$

$$EI\,Y(X) = EI\,Y_0 + EI\,\varphi_0 X - \frac{V_0 X^3}{6}\Big|_{01} + \frac{P_1(X-L_1)^3}{6}\Big|_{12} + \frac{P_2(X-L_2)^3}{6}\Big|_{23} \quad (24)$$

Introducîndu-se condițiile la limită $\varphi(0) = \varphi_0 = f/l_c$ și $Y(0) = Y_0 = Y(L) = 0$, în ecuația (24) se obține

$$p(1-p)(2-p)\frac{P_1 L^2}{EI} + q(1-q)(2-q)\frac{P_2 L^2}{EI} = \frac{6f}{l_c}. \quad (25)$$

O condiție fundamentală de aliniere a punctelor imprimate, impune orientarea acelor după direcții apropiate, deci un unghi al acului deformat $\overline{\varphi} \leqslant 2^0$ în ghidajul 1. Aceasta se exprimă prin

$$p^2(1-p)\frac{P_1 L^2}{EI} + p^2(1-q)\frac{P_2 L^2}{EI} = 2\overline{\varphi}. \quad (26)$$

Din sistemul de ecuații (25), (26) se obțin $P_1L^2/(EI)$ și $P_2L^2/(EI)$ în funcție de pozițiile relative ale ghidajelor p și q. Aceste poziții vor fi stabilite astfel încît forțele de frecare însumate în lungul acului să aibă valoarea minimă, deci trebuie căutat minimul funcției

$$F_f(p, q) = \mu|P_1 + P_2| + \mu|P_1 p + P_2 q| + \mu|P_1(1-p) + P_2(1-q)|.$$

Utilizîndu-se metoda rețelelor, pe baza unui program rulat pe calculatorul HP 9830, s-au obținut valorile $p = 0{,}37$ și $q = 0{,}68$ pentru care forța de frecare este minimă și are valoarea 0,06 N, considerîndu-se un coeficient de frecare mediu $\mu = 0{,}2$ și săgeata maximă a acelor $f = 3$ mm.

CONCLUZII

Funcționarea dinamică a capetelor de imprimare matriceale a fost analizată pe baza unui model ce ține seama de specificul fenomenelor ce au loc în dispozitivul de acționare, atît în perioada alimentării lui cu energie electrică, cît și ulterior acesteia. S-a putut astfel determina influența forțelor de frecare asupra mișcării acului, deci și asupra energiei de imprimare a acestuia. În urma precizării limitelor admise de funcționarea dinamică, au fost găsite măsurile constructive care conduc la frecarea minimă, și anume plasarea ghidajelor intermediare ale acelor, în poziții bine determinate. Cuplurile de materiale utilizate pot conduce și ele la micșorarea frecării, preferîndu-se însă alegerea materialelor după criteriul uzurii minime. Se folosesc ace din oțel sau tungsten și ghidaje din delrin și rubin ori safir sintetic.

Primită în redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. T. DEMIAN, C. NIȚU, V. SELEVET, *Probleme ale construcției și funcționării capetelor de imprimare matriceale*, COMEFIN, 2, 1986.
2. E. KALLENBACH, *Der Gleichstrommagnet*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.
3. T. DEMIAN, C. NIȚU, *On the dynamic behaviour of the matrix printheads*, Al VII-lea Congres de Teoria Mecanismelor și a mașinilor, Sevilla, 1987.

PRINCIPII MODERNE DE OPTIMIZARE ÎN CALCULUL LAGĂRELOR CU ALUNECARE*)

de M. A. DUMBRAVĂ

Institutul Politehnic, București

Lucrarea prezintă unele principii moderne de optimizare a calculului lagărelor, bazate pe o schematizare tip Czichos.
Autorul propune o organizare sistemică a lagărelor cu trei nivele.

INTRODUCERE

Utilizarea lagărelor cu alunecare autoportante (hidrodinamice), respectiv presurizate din exterior (hidrostatice) a cunoscut în ultimii ani o spectaculoasă revenire în cadrul general al construcției de mașini. În prezent este dificil de făcut o alegere corectă a tipului de lagăr (cu rostogolire sau cu alunecare, respectiv autoportante sau presurizate din exterior) chiar în cadrul mai restrîns al unui anumit domeniu de aplicare [1]. Un calcul efectiv de optimizare a lagărelor necesare unui utilaj oarecare necesită un volum foarte mare de informații, calcule și posibilități de comparare între multiplele variante constructive, în condițiile concrete de funcționare prescrise sau presupuse. Se poate considera, așa cum se va arăta mai jos, că dificultatea fundamentală este aceea a formulării corecte a problemei de optimum, respectiv a modelului de calcul cel mai adecvat. În ceea ce privește tehnica de calcul propriu-zisă, odată ce problema a fost încadrată într-o schemă operațională standard, există în prezent suficiente informații și programe de calcul [2, 3, 4, 5, 6].

SISTEMATIZAREA METODOLOGICĂ A PROCESULUI DE OPTIMIZARE

a) Dezvoltarea programului de optimizare în sens sistematic, pentru a obține performanțe optime în tot timpul funcționării lagărului.

În ultima decadă pătrunderea noțiunilor și modului de analiză și interpretare din teoria sistemelor în studiul fenomenelor și sistemelor tribologice a progresat deosebit [1]. Considerînd acest mod de studiu deosebit de adecvat problemei noastre, s-a încercat o formulare mai cuprinzătoare a procesului de optimizare, astfel încît să poată cuprinde cît mai multe aspecte și interacțiuni care pot avea loc între lagărul cercetat și mediul său de funcționare.

Se cuvine să menționăm cîteva idei de bază :

— orice program și calcul de optimizare vizează performanțele lagărului în timpul funcționării, în general în regim normal de funcționare ; sub aspect parametric aceste performanțe pot fi influențate fie prin soluția constructivă în general, fie prin optimizarea parametrilor funcționali

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 393—398

propriu-ziși, cum sînt: viteza, sarcina, lubrifiantul (calitativ și cantitativ) etc.;

— dacă se încearcă o interpretare sistematică a procesului de optimizare, lagărul trebuie considerat ca un tribosistem (vezi Czichos [7], interpretarea schemei uzuale cu trei elemente, fig. 3.4, p. 32). Raportat la această schemă de bază, se cuvine să se facă optimizarea în planul funcțional prin prisma planelor energetice și în planele materiale I și II.

Pornind de la aceste considerente, în figura 1 s-a schițat interpretarea sistematică a procesului de optimizare. Astfel, lagărul ca tribosistem, *constructiv*, care conține caracteristicile geometrice ale elementelor ① și ②,

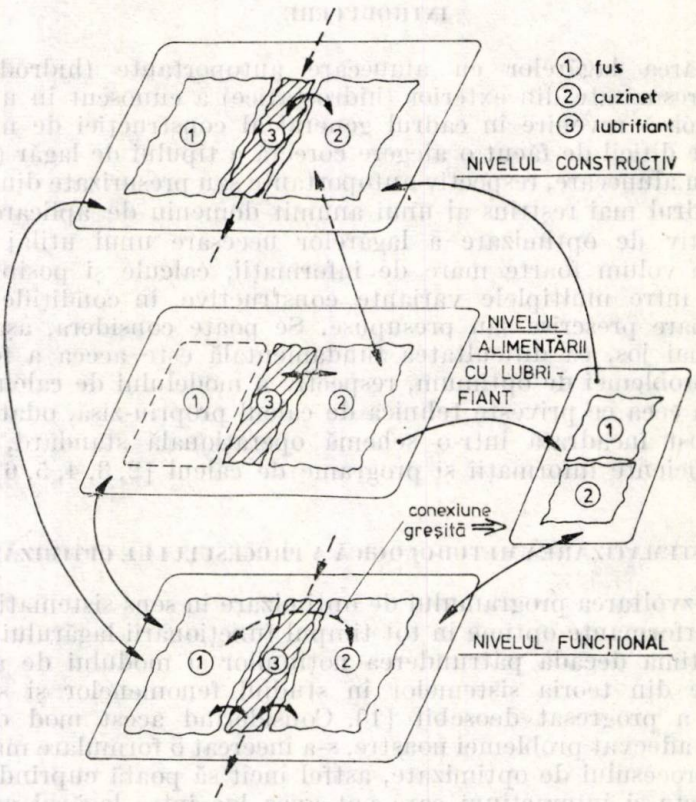


Fig. 1. — Schematizarea sistemică a interdependențelor ce există și trebuie considerate în procesul de optimizare a unui lagăr — schematizarea tip Czichos (1).

în forma inițială (faza de proiectare, respectiv montaj, deci fără modificările ulterioare ce pot surveni în timpul exploatării); *nivelul alimentării* cu elementul intermediar ③, lubrifiantul, care implică luarea în considerație a materialului de ungere propriu-zis și apoi caracteristicile constructive din spațiul de ungere, adică interacțiunea constructivă cuzinet—sistem de alimentare cu lubrifiant; *nivelul funcțional* în care are loc procesul de ungere propriu-zis, asigurat de planele (nivelele) constructiv și alimentare cu lubrifiant, pe care la rîndul său le va influența puternic.

În aceste situații se poate spune că, în condițiile în care lubrifiantul lipsește sau este insuficient (deci condiții specifice ungerii la limită sau mixte), se realizează o conexiune greșită care conduce la un plan funcțional particular cu implicații grave asupra nivelului constructiv.

Optimizarea funcționării unui lagăr vizează nivelul (planul) funcțional, dar prin intermediul celorlalte două nivele. În primul rînd se impune optimizarea constructiv-geometrică prin parametrii : B/D, J (jocul absolut), ψ și alte caracteristici în cazul lagărelor presurizate din exterior sau autoportante cu mai multe zone (sectoare) portante (prestrîngerea lagărului, dimensiunile sectoarelor, etc.); în al doilea rînd aspectele tehnologice : precizia formei geometrice, rugozitatea suprafețelor active, ca și aspectele constructive globale, cum ar fi : aria exterioară a lagărului (în cazul lagărelor cu răcire naturală), rigiditatea construcției portante (carcasă, batiu) etc.

Optimizarea sistemului de alimentare implică : alegerea materialului de ungere adecvat, a sistemului de alimentare corespunzător și a geometriei specifice a zonei de admisie a lubrifiantului în lagăr. Sub formă parametrică, cu notațiile uzuale, aceste mărimi sînt : μ, c, ρ, p_a, T_M (temperatura mediului), indicele de viscozitate, respectiv dependența viscozității de temperatură, calități specifice necesare lubrifiantului pentru a face față unui regim de ungere sărac, diferite elemente geometrice caracteristice.

În condițiile ungerii la limită sau mixte, care pot să apară în numeroase cazuri practice în perioadele de funcționare tranzitorii, comportarea optimă a lagărului depinde în mod esențial de cuplul de materiale fus-cuzinet, de calitățile de ungere la limită ale lubrifiantului și de condițiile reale de funcționare.

Rezultă din cele prezentate mai sus că optimizarea unui lagăr autoportant pe toată durata sa de funcționare trebuie să cuprindă optimizarea funcționării în condiții defavorabile de ungere, ca și optimizarea sa în condiții de ungere fluidă. În cazul unui lagăr presurizat din exterior problema optimizării se referă doar la regimul normal de ungere fluidă. În rest, condițiile de fiabilitate impun ca lagărul să poată evita funcționarea sa în cazul unei ungeri incomplete sau a întreruperii alimentării cu lubrifiant, dar acest aspect nu ține de problematica optimizării.

b) Sistematizarea metodologică a procesului de optimizare.

Orice calcul de optimizare implică în primul rînd definirea unor elemente de structură specifice :

— stabilirea criteriului (criteriilor) de optimizare sau ceea ce în limbajul calculului operațional constituie funcția obiectiv a problemei formulate; în cazul lagărului aceasta înseamnă stabilirea parametrului funcțional care trebuie optimizat, deci care trebuie să atingă o valoare extremală, minim sau maxim. În mod obișnuit aceste mărimi sînt : sarcina F, debitul Q, puterea pierdută prin frecare P_f (în lagăr și/sau în sistem), rigiditatea c (statică și/sau dinamică). Funcția obiectiv (sau funcția scop) o vom nota în cele ce urmează cu $F(x)$;

— după stabilirea funcției obiectiv trebuie determinate variabilele independente ale problemei, deoarece funcția $F(x)$ este în general o funcție $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, adică $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, iar x_j sînt variabile independente scalare; de exemplu : viteza periferică, presiunea de alimentare,

caracteristicile geometrice ale lagărului, caracteristicile sistemului de alimentare și ale lubrifiantului etc.;

— intrînd mai în amănunt, se stabilesc anumite restricții, în general sub două forme : o primă formă este aceea a unor funcții-restricții propriuzise, deci niște condiții suplimentare privind o altă mărime funcțională; sub formă operațională aceste restricții apar astfel :

$$g_k(x) \gtrless 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m; \quad x = x(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

A doua formă sub care pot să apară restricții se referă la restrîngerea domeniului de definiție al funcției obiectiv $F(x)$. În aplicațiile concrete, $x_j \in [a_j, b_j]$ și deci $x \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, și deci se caută valorile extreme ale funcției $F(x)$ pe acest domeniu.

În unele lucrări mai vechi [8, 9] autorul a schițat o clasificare a metodicilor principale de obținere a valorilor optime într-o problemă de lagăr. Astfel se disting :

a) optimizarea parametrilor funcționali pe baza unor relații analitice existente pentru acești parametri, prin metodele clasice ale analizei matematice (probleme de extremum cu sau fără legături);

b) calculul unui număr mare de cazuri de funcționare pe baza unui program și interpretarea acestor date în scopul stabilirii intervalelor de optim pentru variabilele independente, fie cu ajutorul unui alt program de calcul specializat, fie prin trasarea unor curbe și analizarea lor.

c) utilizarea în totalitate a metodelor specifice programării matematice.

Indiferent de metodologia de rezolvare a problemei de optim (variantele a), b), c) de mai sus) baza de calcul poate fi una dintre cele de mai jos.

1) calculul analitic exact pornind de la ecuațiile Navier-Stokes, ecuația Reynolds și eventual ecuația energiei, sub formele acceptate în general în lubrificație; acest caz corespunde unor probleme mai simple, în general cu simetrie axială, pentru un caz complex fiind o metodă prohibită din punct de vedere al necesarului de timp și al volumului de calcul.

2) calculul analitic aproximativ, bazat pe deducerea unor expresii de calcul mai simple care însă nu se îndepărtează prea mult de baza fenomenologică a problemei tratate (vezi metoda bilanțurilor de debite aplicată în calculul lagărelor presurizate din exterior).

3) calculul numeric, bazat pe integrarea numerică a ecuației Reynolds și a ecuației energiei, prin una dintre metodele cunoscute : diferențe finite, elemente finite, elemente de graniță.

Se poate spune că orice problemă practică de optimizare a unui lagăr cu alunecare implică considerarea unei combinații de alternative din cele două grupe de mai sus. Cele discutate se aplică unui lagăr care funcționează în regim de ungere fluidă, tratarea aspectelor de optimizare în cazul funcționării tranzitorii (accidentale sau sistematice) în regim de ungere limită sau mixt fiind mai delicată [10, 11].

EXEMPLE DE REZOLVARE A PROBLEMEI OPTIMIZĂRII LAGĂRELOR CU ALUNECARE

Deoarece literatura de specialitate este deosebit de bogată în exemple, în cele ce urmează vor fi amintite succint cîteva aspecte și rezolvări de referință. În primul rînd se vor considera doar cazurile de ungere fluidă, făcîndu-se deosebire între lagărele autoportante și cele hidrostatice.

Toate metodicile de calcul pentru lagărele autoportante cu o zonă portantă cuprind aspecte de optimizare, în special sub forma b) de mai sus. În acest sens se pot cita lucrările [12, 13, 14, 15], care constituie baze de calcul pentru standardele naționale respective.

În aceste lucrări nu se definește o funcție obiectiv propriu-zisă ci se încearcă, prin alegerea convenabilă a variabilelor independente, asigurarea unei funcționări corecte. În general, criteriile de funcționare fiabilă sînt : asigurarea grosimii minime de film, asigurarea temperaturii maxime, asigurarea unei excentricități convenabile, reducerea consumului de energie și lubrifiant (respectiv P_f, Q mici)

Alegerea unei funcții obiectiv este mai dificilă în cazul lagărelor autoportante, totuși în unele lucrări s-a considerat ca problemă minimizarea pierderilor prin frecare în lagăr P_f, chiar dacă diferențele de valori între diverse cazuri nu sînt spectaculoase [16, 17]. În cazul unui lagăr autoportant alimentat sub presiune pare foarte convenabil să se considere ca funcție obiectiv puterea totală pierdută prin frecare, atît în lagăr, cît și în sistemul de alimentare, adică

$$P_{tot} = P_f + p_a \cdot Q.$$

În cazul lagărelor presurizate din exterior există un număr destul de mare de lucrări, unele folosind și tehnicile de calcul specifice programării matematice neliniare cu sau fără restricții, care adoptă ca funcție obiectiv puterea pierdută prin frecare în sistemul lagăr—pompă [8, 9 18]. Pentru această categorie de lagăre acest criteriu este evident cel mai corect și eficient, celelalte mărimi funcționale fiind implicate prin formularea unor restricții.

Problema optimizării lagărelor funcționînd în regim de forță și viteze variabile este dificilă, deși există în prezent o literatură extrem de bogată în acest domeniu. În aceeași situație sînt și lagărele autoportante cu mai multe zone portante, lucru de fapt evident deoarece această categorie de lagăre sînt recomandabile tocmai în condițiile unor regimuri variabile [19, 20].

CONCLUZII

Problema calculului optim al unui lagăr este deosebit de complexă și rezolvarea ei globală în general nu este posibilă. În multe cazuri practice se adoptă valori uzuale în proiectare pentru unii parametri geometrici sau funcționali și se încearcă optimizarea unui număr restrîns de parametrii considerați ca parametri de bază.

BIBLIOGRAFIE

1. R. ZDENKOVIĆ, T. LECHPAMMER, *Berechnung von Gleitlagern an Werkzengmaschinen-Spindeln*, Werkstatt und Betrieb, **111**, 9 (1978).
2. D. J. WILDE, C. S. BEIGHTLER, *Foundations of optimization*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1967.
3. I. DANCEA, *Metode de optimizare*, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
4. B. N. PSHENICHNY, YU. M. DANILIN, *Numerical methods in extremal problems*, Edit. Mir, Moscova, 1978.
5. A. ŞTEFĂNESCU, C. ZIDĂROIU, *Cercetări operaționale*, Edit. Didactică și Pedagogică,, București, 1981.
6. V. SIMA, A. VARGA, *Practica optimizării asistată de calculator*, Edit. Tehnică, București, 1986.
7. H. CZICHOS, *Tribology. A systems approach to the science and technology of friction, lubrication and wear*, Elsevier, Amsterdam, 1978.
8. M. A. DUMBRAVĂ, *Review of principles and methods applied to the optimum calculation and design of externally-pressurized bearings*, Part. 1, Tribology, **18**, 3 (1985).
9. M. A. DUMBRAVĂ, *A review of principles and methods applied to the optimum calculation and design of externally-pressurized bearings. Part 2.* Tribology, **18**, 4 (1985).
10. A. W. J. DE GEE, *Selection of materials for lubricated journal bearings-determination of the critical roughness parameter*, Wear, 42, 2 (1977).
11. A. W. J. DE GEE, *Selection of materials for lubricated journal bearings*, Wear, **36**, 1 (1976).
12. * * * DIN 31652, 1983.
13. F. A. MARTIN, D. R. GARNER, *Plain journal bearings under steady loads : design guidance for safe operation*, Glacier paper LB 371/73 (1973).
14. D. R. GARNER, G. J. JONES, F. A. MARTIN, *Turbulent journal bearings : design charts for performance prediction*, ASLE preprint 76-AM-IC-2.
15. M. D. PASCOVICI, M. A. DUMBRAVĂ, *Lagăre radiale hidrodinamice, metodică de calcul Lilo*, I.P. București, 1984.
16. H. MOES, R. BOSMA, *Design charts for optimum bearing configurations, 1. The full journal bearing*, paper ASME, nr. Lub S-1, 1970.
17. K. UNKELESBAY, G. E. STAATS, D. L. CREIGHTON, *Optimal design of journal bearings*. Int. J. Eng. Sci., **11**, 9 (1973).
18. T. L. POLLMANN, M. VERMEULEN, *Optimierung hydrostatischer radiallager*, Konstruktion, **36**, 4 (1984).
19. D. R. GARNER, C. S. LEE, F. A. MARTIN, *Stability of profile bore bearings : influence of bearing type selection*, Glacier paper LB 456 80(1980).
20. A. V. RUDDY, *Rotor dynamics of turbo-machinery*, Glacier paper LB 489/84 (1984).

ASPECTE TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE ALE DURABILITĂȚII ROȚILOR DINȚATE CILINDRICE*)

de M. GAFIȚANU și V. ATANASIU

Institutul Politehnic, Iași

Durabilitatea suprafeței flancurilor angrenajelor cilindrice este influențată de starea de tensiune din stratul superficial al dinților.
Lucrarea și-a propus să investigheze influența forțelor tangențiale și a solicitării de încovoiere a dinților asupra stării de tensiune și a durabilității suprafeței. Modelul matematic pentru durabilitatea suprafeței se bazează pe considerentul statistic folosit de Lundberg-Palmgren-Coy-Zaretsky.

1. INTRODUCERE

În calculul durabilității angrenajelor cilindrice, atunci cînd criteriul deteriorării îl constituie oboseala de contact, se consideră, obișnuit, doar tensiunile din stratul superficial care apar datorită solicitării forțelor normale [2]. Tensiunile de contact se calculează, în condiții de rostogolire pură, după teoria lui Hertz [4].

Constatările cercetării experimentale referitoare la modul de concentrare al deteriorării tip pitting pe flancurile dinților nu pot fi explicate numai pe baza acestei teorii — care admite aceeași stare de tensiuni în ambele corpuri în contact. Obținerea unui răspuns teoretic la aspectele experimentale constatate necesită determinarea stării de tensiune în stratul superficial al flancurilor dinților cu considerarea condițiilor reale de funcționare și stabilirea modelului de calcul al durabilității roților dințate.

2. STAREA DE TENSIUNE ÎN ZONA DE CONTACT

Pe lîngă tensiunile de contact datorită solicitării forțelor normale, în stratul superficial al flancurilor dinților se produc și tensiuni datorită solicitărilor tangențiale de suprafață și solicitării de încovoiere a dinților.

La analiza stării de tensiune în zona de contact și în calculul durabilității roților dințate — tensiunea decisivă se consideră tensiunea tangențială maximă $\tau_{2,3}$. Această tensiune permite cuprinderea, cu suficientă precizie, atît a solicitărilor forțelor normale și tangențiale, dar și a solicitărilor de încovoiere ale dinților.

---

*) Comunicată la TRIBOTEHNICA'87 — a 5-a Conferință asupra frecării, ungerii și uzării, București, 24—26 septembrie 1987.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 4, 1988, P. 399—404

2.1. INFLUENȚA SOLICITĂRII FORȚELOR TANGENȚIALE ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE

Forțele tangențiale se consideră dependente atît de coeficientul de frecare și forța normală, dar și de momentele de inerție masice ale roților dințate și de raportul de transmitere [6]. Analiza valorilor numerice obținute indică dependența forțelor tangențiale F_{T1}, F_{T2} de zonele de angrenare analizate. Pe lîngă faptul că $\tau_{2,3}(F_N, F_T) > \tau_{2,3}(F_N)$, se constată și apropierea de suprafața de contact a punctelor unde se produc valorile maxime ale tensiunii $\tau_{2,3}(F_N, F_T)$ și deplasarea acestor puncte în planul de contact, funcție de sensul forței tangențiale.

2.2. INFLUENȚA SOLICITĂRII DE ÎNCOVOIERE A DINȚILOR ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE

Calculul tensiunilor, în zona de contact, cu considerarea influenței solicitării de încovoiere a dinților, s-a efectuat pe baza unor metode specifice teoriei elasticității : metoda elementelor finite și metoda elementelor de frontieră [1].

În aplicarea metodei elementelor finite s-a utilizat subprogramul SAP IV [7], iar pentru discretizare s-a folosit elementul finit patrulater. Discretizările realizate au urmărit direcții normale la profilul dintelui și au cuprins 342 noduri și 288 elemente. Coordonatele nodurilor au fost determinate analitic, pe baza unui program de calcul în FORTRAN.

Pentru a evita efectul concentratorilor de tensiune din zona de contact, situație întîlnită în cazul punctului de aplicație al forțelor pe profilul dinților, modelul de calcul a cuprins și o porțiune din dintele conjugat celui analizat (fig. 1).

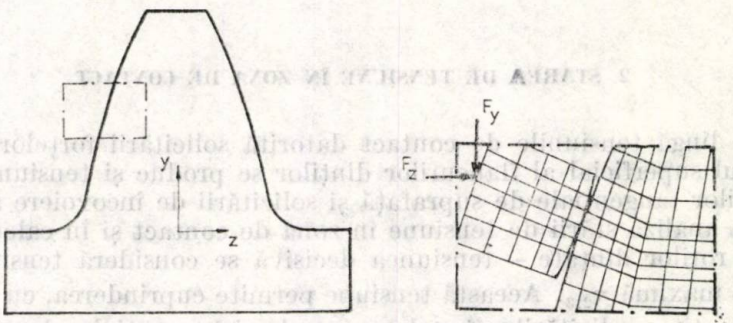


Fig. 1

Dificultățile întîmpinate în faza de discretizare a dintelui, legate în special de dimensiunile mici ale lățimii de contact — în raport cu dimensiunile dintelui, care impun mărimea elementului finit în zona analizată și numărul ridicat de discretizări necesare în analiza stării de tensiune pentru diferite faze de angrenare au condus la folosirea metodei elemen-

telor de frontieră [6]. La această metodă este discretizat doar conturul dintelui analizat, ceea ce permite reducerea volumului de calcul necesar în faza de discretizare — comparativ cu metoda elementelor finite.

Analiza rezultatelor numerice indică faptul că solicitarea de încovoiere a dinților conduce la creșterea tensiunii tangențiale $\tau_{2,3}(F_N, f_i)$ în raport cu $\tau_{2,3}(F_N)$. De remarcat, totodată, influența mai pronunțată la roata condusă, în raport cu roata conducătoare, a solicitării de încovoiere a dinților.

2.3. STAREA REZULTANTĂ DE TENSIUNE

Calculul componentelor stării de tensiune, cu considerarea solicitărilor forțelor normale și tangențiale și a solicitării de încovoiere a dinților, oferă posibilitatea determinării, pentru fiecare roată dințată, a valorii maxime a tensiunii tangențiale $\tau_{2,3}$ și a coordonatelor punctului unde se înregistrează această valoare.

Rezultatele numerice referitoare la starea de tensiune rezultantă evidențiază existența unei stări diferite de tensiune în zonele de contact ale dinților în angrenare, atît datorită solicitării de încovoiere a dinților, dar și solicitărilor forțelor tangențiale diferite ale zonelor în contact.

Aceste constatări sînt exemplificate în tabelul 1 și figura 2.

Tabelul 1

Angrenajul analizat $z_1 = 4$, $\beta = 20°$, $z_2 = 51$, $x_n = 1{,}1$, $m_n = 3$ [mm], $x_{ns} = 0{,}792$					
Roata dințată	Zona de angrenare	$\frac{\tau_{2,3\,max}}{p_H}$	z/b_H	y/b_H	α_p
Pinion	A	0,315	0,78	-0,02	46,4°
Roata condusă		0,385	0,75	0,06	42,1°
Pinion	E	0,341	0,78	-0,02	46,3°
Roata condusă		0,384	0,45	0,56	22,6°

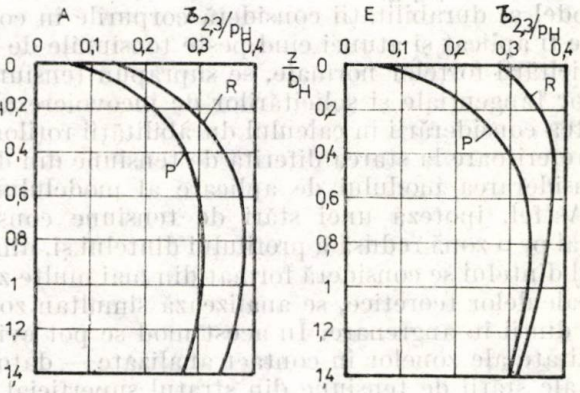


Fig. 2. — P — pinion; R — roata condusă.

3. CALCULUL DURABILITĂȚII ROȚILOR DINȚATE

În timpul unui ciclu de angrenare se modifică condițiile de contact pe lungimea profilului evolventic al dinților. La acest fapt contribuie decisiv razele de curbură continuu variabile — care influențează mărimea presiunii de contact și lățimea contactului, precum și viteza de alunecare, alunecarea specifică etc. Ca urmare, deteriorarea suprafeței în urma oboselei de contact, care depinde de acești factori, va fi diferită pe profilul dinților. Vor rezulta o zonă critică de-a lungul profilului dintelui în care deteriorarea de tip pitting va fi maximă. În această zonă se decide durabilitatea roții dințate.

Calculul și analiza valorilor numerice ale durabilității roților dințate se efectuiază în scopul stabilirii raportului durabilităților diferitelor zone ale profilelor dinților pinionului și roții conduse, ceea ce permite evidențierea zonelor în care deteriorarea de tip pitting va fi maximă.

Modelul de calcul al durabilității trebuie să ofere posibilitatea considerării pe cale analitică atît a stării de tensiune, cît și a particularităților de producere a deteriorărilor datorită oboselii de contact la fiecare roată dințată din componența unui angrenaj.

Calculul durabilității roților dințate se poate efectua pe baza modelului matematic propus de Lundberg-Palmgren [3], Coy-Zaretsky [2]. Pentru fiabilitate 90%, durabilitatea pinionului și roții conduse se calculează cu relațiile :

$$L_P = z_1^{-1/e} \cdot L, \tag{1}$$

$$L_R = z_2^{(e-1)/e} \cdot L/z_1, \tag{2}$$

unde L_P, L_R reprezintă durabilitatea pinionului, respectiv a roții dințate conduse, exprimate în milioane de rotații ale pinionului

$$L = \left(\frac{K \cdot z_0^h}{\tau_0^e \cdot V} \right)^{1/e} \tag{3}$$

în care τ_0 este tensiunea critică ; z_0 — adîncimea tensiunii critice ; K — factor de material ; V — volumul reprezentativ al concentrării tensiunii ; $h = 7/3$; $c = 31/3$; $e = f(p_H)$.

Acest model al durabilității consideră corpurile în contact cu rostogolire. El poate fi aplicat și atunci cînd peste tensiunile de contact inițiale — datorită solicitării forțelor normale, se suprapun tensiuni datorită solicitărilor forțelor tangențiale și solicitărilor de încovoiere ale dinților.

Necesitatea considerării în calculul durabilității roților dințate a particularităților referitoare la starea diferită de tensiune din dinții în contact a impus reconsiderarea modului de aplicare al modelului matematic al durabilității. Astfel, ipoteza unei stări de tensiune constante poate fi acceptată numai pe o zonă redusă a profilului dintelui și, din această cauză, profilul activ al dintelui se consideră format din mai multe zone ; totodată, la efectuarea calculelor teoretice, se analizează simultan zonele în contact considerate pe dinții în angrenare. În acest mod se pot evidenția diferențele de durabilitate ale zonelor în contact analizate — datorită caracteristicilor diferite ale stării de tensiune din stratul superficial al suprafețelor în contact.

Tabelul 2

Angrenaj	Roata dințată	Localizarea uzurii de tip pitting (zona de angrenare)	Starea de tensiune (τ_{eP}/τ_{eR})			Corelația aspectelor experimentale cu datele numerice ale durabilității		
			a) $\tau_0 = f(F_N)$	b) $\tau_0 = f(F_N, F_T)$	c) $\tau_0 = f(F_N, F_T, f_i)$	a)	b)	c)
$z_1 = 25$ $z_2 = 25$ $x_1 = 0$ $x_s = 0$ $\beta = 0°$ $m = 5$ [mm]	Pinion	B: sub cercul de rostogolire	1	>1	>1	Nu	Bună	Bună
	Roata condusă	D: sub cercul de rostogolire	1	<1	<1	Nu	Bună	Bună
$z_1 = 4$ $z_2 = 51$ $x_{n1} = 0{,}722$ $x_{ns} = 0{,}792$ $\beta = 20°$ $m_n = 3$ [mm]	Pinion	A: la piciorul dintelui	1	>1	>1	Nu	Foarte bună	Foarte bună
	Roata condusă	E: la piciorul dintelui	1	<1	<1	Nu	Bună	Bună
$z_1 = 4$ $z_2 = 51$ $x_{n1} = 1{,}1$ $x_{ns} = 0{,}792$ $\beta = 20°$ $m_n = 3$ [mm]	Pinion	AE: pe tot flancul	1	~ 1	<1	Nu	Nu	Bună
			1	<1	<1	Nu	Bună	Bună
	Roata condusă	AE: pe tot flancul	1	~ 1	<1	Nu	Nu	Bună
			1	<1	<1	Nu	Bună	Bună

În ipoteza utilizării unui oțel cu aceeași duritate la ambele roți dințate, raportul $L^*_{P_iR_i}$ al durabilităților corespunzătoare zonelor considerate pe profilele dinților pinionului și roții conduse se calculează cu relația:

$$L^*_{P_i,R_i} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{e-1/e} \cdot \left(\frac{z_{0P}}{z_{0R}}\right)^{h/e} \cdot \left(\frac{\tau_{0R}}{\tau_{0P}}\right)^{e/e} \cdot \left(\frac{V_R}{V_P}\right), \quad (4)$$

în care indicele i se referă la zona analizată a profilelor dinților în contact.

4. CONCLUZII

Analizele efectuate evidențiază existența unei stări diferite de tensiune în zonele de contact ale dinților în angrenare. Această situație se datorește atît solicitărilor de încovoiere ale dinților, dar și forțelor tangențiale diferite de pe suprafețele în contact.

Calculul durabilității roților dințate se efectuiază pe baza modelului de calcul Lundberg-Palmgren-Coy-Zaretsky, cu considerarea unor aspecte specifice angrenajelor — referitoare la deteriorarea flancurilor prin oboseala de contact.

În scopul asigurării reproductibilității rezultatelor teoretice cu cele experimentale, se propune efectuarea calculelor de durabilitate prin considerarea simultană a zonelor în contact analizate pe profilul activ al dinților în angrenare — ceea ce permite evidențierea diferențelor de durabilitate ale zonelor analizate. Pe această bază, în tabelul 2 se prezintă corelația datelor numerice ale durabilității cu aspectele experimentale. Se poate constata că precizia ridicată a rezultatelor teoretice, în raport cu cele experimentale, se obține numai în situație în care se consideră, pe lîngă solicitările forțelor normale și solicitările forțelor tangențiale și a celor de încovoiere ale dinților.

Determinarea stării de tensiune și calculul durabilității oferă posibilitatea preconizării comportării în funcționare a angrenajelor — prin indicarea raportului durabilității roților dințate și a zonelor cu durabilitate minimă de pe profilul fiecărei roți. Aceste date teoretice permit, totodată, reliefarea solicitărilor care influențează decisiv durabilitatea zonelor menționate și creează condiții, încă din faza de concepție, de stabilire a valorilor optime pentru factorii geometrici și de material — care să ofere premizele unor valori ridicate ale durabilității angrenajelor.

Primit în redacție la 15 decembrie 1987

BIBLIOGRAFIE

1. V. ATANASIU, *Contribuții la studiul angrenajelor cilindrice cu pinioane cu număr mic de dinți, aplicate la reductoarele de turație*, Teză de doctorat, I.P. Iași, 1986.
2. G. G. COY, D. P. TOWNSED, E. V. ZARETSKY, *Dynamic Capacity and Surface Fatigue Life for Spur and Helical Gears*, Journal of Lubrification Technology, 4 (1976).
3. G. LUNDBERG, A. PALMGREN, *Dynamic Capacity of Roller Bearings*, Acta Polytechnika, Mech. Engng., 4 (1952).
4. N. G. POPINCEANU, M. GAFIȚANU, ș.a., *Probleme fundamentale ale contactului cu rostogolire*, Edit. Tehnică, București, 1985.
5. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Metoda elementelor de frontieră*, ICPROM Iași — IP Iași, 1985.
6. A. C. RAO, *Gear Friction Coefficients and Forces*, Wear, 53, 2 (1979).
7. * * * *A general structural Analysis program SAP IV.*

H. GLAHN, *Baustatik in der Praxis des konstruktiven Ingenieurbaus* (Statica construcțiilor în practica construcțiilor inginerești), Ernst u. Sohn, Berlin, 1987, 84 p., 83 fig., 38 ref. bibl.

Determinarea distribuției eforturilor în structuri, fără simplificări ale sistemului static real, este foarte costisitoare și de multe ori imposibilă — chiar și în condițiile utilizării unui calculator electronic. Cum rezultatele oferite de calculator nu pot fi mai bune decît datele introduse, alegerea celor mai adecvate sisteme statice determină și în calculul electronic apropierea modelului de realitate. Deosebit de importantă este respectarea corectă a condițiilor de echilibru, cele de continuitate putînd fi relaxate.

Cele 13 capitole ale cărții sînt independente, permițînd găsirea directă a răspunsului la o problemă. În capitolul privind planșele din beton armat se dau indicații privind calculul plăcilor dreptunghiulare rezemate pe grinzi, armate pe una sau două direcții cît și a plăcilor rezemate pe stîlpi — direct sau prin intermediul unor capiteluri. Se tratează și luarea în considerare a încastrărilor elastice și a unor situații speciale cum sînt plăcile pe reazeme liniare intermitente, plăcile cu goluri mici și mari, plăcile de formă oarecare și cele acționate de forțe concentrate.

Urmează un capitol referitor la elementele verticale de rigidizare din beton armat. Sînt prezentate date de bază privind calculul diafragmelor și al șimburilor cu secțiuni transversale constante pe înălțime sau variind în trepte, diafragmele cu goluri și încastrarea lor elastică în fundații. Rigidizările prin intermediul elementelor din zidărie de cărămidă sînt amintite pe scurt.

Capitolul de fundații tratează probleme legate de determinarea încărcărilor, fundații izolate pe suprafață, grinzi și plăci pe mediu elastic, culei de poduri și fundații de adîncime (piloți și radiere pe piloți). Un alt capitol se referă la suprastructuri de poduri masive alcătuite din plăci, grinzi T, grinzi TT și grinzi chesonate. Se analizează și problema rosturilor de cuplare a armăturii postîntinse.

Alte capitole se referă la calculul îmbrăcăminților pentru tuneluri și metrouri respectiv la lucrări de sprijinire. Sînt tratate și probleme de statică și stabilitate a construcțiilor cu pereți subțiri, probleme speciale de îmbinări în construcții metalice și din lemn, legăturile excentrice ale barelor solicitate axial și forțele de deviație în elementele curbe.

Aspecte constructive sînt prezentate doar în cazurile în care sînt legate nemijlocit de formularea corectă a problemei. Pe baza experienței proprii de proiectare autorul prezintă rezolvări simple și soluții standard pentru o mare varietate de probleme, specificînd dacă este mai avantajoasă o tratare manuală (utilizînd tabele și diagrame din literatura de specialitate) respectiv calculul electronic (în special cu metoda elementelor finite).

Cartea se adresează tuturor celor ce se ocupă de probleme practice ale mecanicii construcțiilor, fiind deosebit de utilă în activitatea de proiectare.

R. Friedrich

* * * *Software für das Bauingenieurwesen. Ausgabe 1* (Software pentru construcții. Ediția 1), Ernst u. Sohn, Berlin, 1987, 450 p.

În prezent oferta de programe necesare utilizării microcalculatoarelor în construcții și în mecanică este foarte mare. Avînd acces la un calculator de un anumit tip, inginerul trebuie să găsească rapid programul adecvat rezolvării unei anumite probleme. Lucrarea de față constituie un ajutor prețios în această privință în primul rînd pentru Europa Occidentală, oferă însă tuturor celor interesați în rezolvarea problemelor de mecanică aplicată o privire de ansamblu asupra situației actuale privind proiectarea asistată de calculator.

Fiecare din cele cinci capitole ale cărții abordează tematica propusă dintr-un alt punct de vedere. Primul capitol, ce ocupă 90% din volum, cuprinde descrierea programelor ordonate

pe următoarele domenii : statica structurilor (64 programe), dimensionarea și alcătuirea secțiunilor și a elementelor (29), dinamica structurilor (3), fizica construcțiilor (18), construcții din beton armat și precomprimat (64), construcții metalice (24), construcții din lemn (52), construcții din zidărie de cărămidă (7), economia și planificarea construcțiilor (57), fundații (55), construcții hidrotehnice (6), alimentări cu apă și canalizări (9), geologie și topografie (17). Bineînțeles că unele programe aparțin mai multor domenii, iar pentru rezolvarea aceloraşi probleme sînt oferite mai multe programe.

Programele au un număr și sînt prezentate pe cîte o pagină precizîndu-se : domeniul de utilizare, datele caracteristice (anul elaborării, data instalării versiunii actuale, confortul de introducere a datelor și de prezentare a rezultatelor — caracterizat prin 7 clase), timpul necesar însușirii programului, numărul de exemplare vîndut, prețul, forma de livrare, configurația necesară rulării, adresa autorului și descrierea programului. Se remarcă accentul pus pe înlesnirea introducerii datelor și prezentarea sugestivă a rezultatelor sub formă tabelară și grafică.

Capitolul al 2-lea cuprinde clasificarea programelor după calculatoarele pe care pot fi rulate. Cel mai frecvent apar calculatoarele IBM și compatibile, Olivetti, Commodore și Hewlett-Packard.

Gruparea după sistemul de operare este dată în capitolul al 3-lea. Frecvența maximă corespunde sistemului MS-DOS, urmînd PC-DOS și MDOS.

În capitolul al 4-lea sînt prezentate pe scurt firmele ce au elaborat programele descrise, în ceea ce privește domeniul lor de activitate, anul înființării și numărul programelor descrise în carte. Cele mai multe programe aparțin firmelor G. Mertins (62), Deutsche Olivetti (54) și Nemetschek (40).

Adresele celor 45 de firme din R.F.G. și 5 din Elveția sînt ordonate după zona geografică în capitolul al 5-lea.

Cartea documentează la zi marea varietate de probleme de mecanica solidelor și a fluidelor, cît și din alte domenii rezolvabile comod și eficient cu ajutorul microcalculatoarelor.

R. Friedrich

C. M. PENNEY, H. J. CAULFIELD (sub red.), *The Changing Frontiers of Optical Techniques for Industrial Measurments and Control. Proceedings of the* 5th *International Congress on Applications of Lasers and Electro-Optics ICALEO'86, 10—13 November*, 1986, *Arlington, Virginia, USA* (Frontierele în schimbare ale tehnicilor optice pentru măsurători și control. Lucrările celui de-al 5-lea Congres asupra aplicației tehnicilor laser și a electro-opticei ICALEO'86, 10—13 noiembrie 1986 Arlington, Virginia, S.U.A.) IFS Publications Ltd., U.K., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 258 p., aproximativ 100 fig.

Volumul conține un număr de 20 lucrări prezentate la cel de-al 5-lea Congres Internațional despre aplicațiile tehnicii laser și a electroopticii care a avut loc în zilele de 10—13 noiembrie 1986 la Arlington, Virginia, SUA. Sînt incluse de asemenea un număr de 11 lucrări susținute la Simpozionul de prelucrarea optică a informației, care a avut loc tot în 1986.

În ultimul timp un progres important a fost realizat în utilizarea tehnicii laser și a electroopticii în măsurători legate de cercetări științifice experimentale. Acest progres a permis extinderea metodelor respective și în domeniul proceselor de fabricație industrială, în vederea realizării automatizării lor inteligente.

Prelucrarea pe cale optică a informației prezintă avantajul unei viteze ridicate de operare cuplată cu posibilitatea de a realiza interconectări tridimensionale.

Articolele din volum prezintă problemele specifice ale stadiului de dezvoltare a celor două domenii la nivelul anului 1986.

Conținutul volumului este grupat în cinci capitole.

Primul capitol, intitulat „Senzori bazați pe utilizarea fibrelor optice" conține un număr de șase articole. Se prezintă starea actuală a dezvoltării, a tehnologiei senzorilor cu fibre optice și a aplicației acesteia în industrie.

Sînt tratate de asemenea și unele aspecte particulare ale acestei tehnologii, cum ar fi spre exemplu construcția unor senzori cu fibre optice pentru măsurarea deplasărilor, sau pentru urmărirea unor fenomene de absorpție. Un articol este consacrat fibrelor optice cu miez lichid, analizînd transmiterea luminii și efectele neliniare, iar altul se ocupă de propagarea în sens nvers a unor descărcări generate de laser în „ghiduri de undă" cu miez lichid.

Cel de-al doilea capitol, conținînd șapte articole, se ocupă de senzori optici tridimensionali și utilizarea acestora pentru determinarea distanțelor, respectiv în metrologie. Se prezintă între altele utilizarea unor senzori optici pentru achiziționarea imaginii în trei dimensiuni cu aplicație la automatizarea scoaterii (de către robot) a unui obiect dintr-o cutie, sau la măsurători de distanțe și adîncimi, la sistemele de control automat bazate pe vedere artificială (utilizate la asamblarea caroseriilor de automobile, sau pentru elice de navă — sistemul de inspecție robotizată inteligentă IRIS) F. E. Godwin de la Digital Signal Corp. U.S.A. prezintă un senzor video tridimensional tip radar cu laser coerent utilizabil pentru măsurători de precizie pentru distanțe.

Un asemenea senzor montat pe un deget al dispozitivului de prehensiune al unui robot poate localiza cu precizie obiectul ce urmează a fi apucat ; trei senzori montați în mod adecvat pot realiza urmărirea mișcării brațului unui robot. Alte aplicații descrise se referă la utilizarea senzorului pentru „citirea" unor coduri cu bare (în comerț), a unor semne imprimate de valțuri pe lingouri incandescente în timpul laminării, la cercetarea punct cu punct a calității suprafețelor unor obiecte etc.

Alte articole tratează determinarea cu mare acuratețe a poziției centroidei imaginii cu matrice de senzori, respectiv se ocupă de modalitățile de eliminare a erorilor care se datoresc reflectării luminii de pe suprafețele obiectelor controlate.

Cel de-al treilea capitol este intitulat „Sisteme de măsurare și componente cheie". Cele patru articole cuprinse se referă la o metodă pentru măsurarea unor particule cu dimensiuni de microni sau submicroni pe suprafețe, la modalitățile de caracterizare a materialelor în suspensie în fluide, la detectarea pe cale optică și termică a defectelor de laminare rezultate prin inprimarea scorilor în tablă și la etalonarea unui sistem de telemăsurare a temperaturii, utilizînd fluorescență indusă prin tehnici laser.

Capitolul al 4-lea conține trei articole consacrate măsurătorilor pentru determinarea deplasărilor superficiale bazate pe holografie în timp real, pe interfenometria electrică a desenului, petelor pe materiale ceramice piezoelectrice, respectiv poziționarea liniară de mare precizie prin interfenometria heterodină.

Ultimul capitol conține cele 11 articole consacrate prelucrării optice a informațiilor. Se discută în acest context corelația dintre recunoașterea optică a „mostre" și inteligență artificială, se prezintă un sistem pentru citirea automată a adreselor poștale și sistem de control prin filtrare optică cu transformată Fourrier.

Mai multe articole sînt consacrate construcției calculatoarelor optice, sistemelor cu discuri optice, corelației dintre optică și calculul simbolic. Se prezintă de asemenea dispozitive electronice moleculare bazate pe comportamentul electro-optic al unor molecule, comutarea optică bistabilă a unor sticle de siliciu și o metodă de analiză a fracturii cărbunelui cu ajutorul interferometriei holografice.

Volumul se adresează fizicienilor, specialiștilor în măsurători industriale, în robotică, în informatică/calculatoare.

Articolele sînt semnate de 63 autori, dintre care 61 din S.U.A. și 2 din Taiwan (autori ai unui singur articol).

F. Kovács

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 5 septembrie—octombrie 1988

SUMAR

STUDII

GH. BUZDUGAN, O definiţie unitară a coeficienţilor de siguranţă în calculul de rezistenţă al pieselor de maşini 411

M. M. NIŢĂ şi I. STROE, Asupra stabilităţii mişcării satelitului ecuatorial considerat solid rigid 417

V. F. POTERAŞU, N. MIHALACHE şi C. FILIPESCU, Tensiuni şi deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor de frontieră. II. Analiza dinamică . . 429

C. PACOSTE şi D. DUBINĂ, Strategii privind realizarea programelor pentru analiza neliniară a structurilor 457

S. D. MUŞAT, Legături cinematice între deplasări în metoda elementelor finite 479

AL. D. STAN, MARIA STOICESCU şi A. ODOUSOTE, Filtrarea neliniară a gazelor prin mediile poroase 487

GH. D. PASAT, Dispozitive mecanice de amestecare. Încărcarea hidrodinamică a turbinei cu pale drepte (standard) şi a arborelui dispozitivului de amestecare. I . . 493

GH. I. ENE, Aspecte privind calculul funcţional al amestecătoarelor cu tambur rotativ, cu funcţionare discontinuă 503

I. SETEANU şi M. ERHAN, Regimul nepermanent de exploatare a instalaţiei de stingere a grupurilor hidroenergetice 515

RECENZII 523

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

O DEFINIȚIE UNITARĂ A COEFICIENȚILOR DE SIGURANȚĂ ÎN CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL PIESELOR DE MAȘINI

de GH. BUZDUGAN
Institutul Politehnic din București

În construcția de mașini se întîlnesc trei cazuri de solicitare : statică, variabilă staționară (sinusoidală) și variabilă aleatoare. Modul de calculare a coeficienților de siguranță diferă destul de mult de la un caz la altul. În articol se arată că, ținînd seama de faptul că, în toate cazurile, capacitatea de rezistență scade cu timpul, se pot defini — urmînd o filosofie unitară — doi coeficienți de siguranță, unul în funcție de sarcini și altul în funcție de timp.

1. INTRODUCERE

Se consideră o bară dreaptă, prismatică, solicitată la tracțiune printr-o forță N. Ținînd seama de elasticitatea materialului, se stabilește expresia *tensiunii* (uniform distribuită),

$$\sigma = N/A, \tag{1}$$

unde A este aria secțiunii.

De asemenea, se poate determina *lungirea* barei,

$$\delta = Nl/EA, \tag{2}$$

unde l este lungimea inițială, iar E — modulul de elasticitate al materialului barei.

Relații similare cu (1) și (2) se stabilesc pentru toate felurile de solicitări, cunoscînd constantele elastice E, G, ν, specifice teoriei elasticității. Tensiunea σ, calculată cu relația (1), ar putea lua orice valoare. Spre a ajunge la problema inginerească — a dimensionării sau verificării — se introduc și *caracteristicile mecanice* ale materialului : rezistența de rupere σ_r, limita de curgere σ_c, lungirea la rupere.

Acum relația (1) poate lua diferite forme :

— pentru dimensionare,

$$A_{nec} = N/\sigma_{ad}, \tag{3}$$

unde σ_{ad} este rezistența admisibilă a materialului ;

— pentru verificarea tensiunii efective,

$$\sigma_{ef} = N/A_{ef} < \sigma_{ad}, \tag{4}$$

unde A_{ef} este aria efectivă a secțiunii ;

— pentru verificarea forței capabile,

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_{ad}. \tag{5}$$

La rîndul său, rezistența admisibilă se definește

$$\sigma_{ad} = \sigma_r/c_r \tag{6}$$

sau

$$\sigma_{ad} = \sigma_c/c_c, \tag{7}$$

mărimile c_r, c_c fiind *coeficienți de siguranță*.

Pentru studentul din anul al II-lea de facultate, relațiile (1), (2) și altele similare sînt foarte clare; în schimb, alegerea rezistenței admisibile sau a coeficientului de siguranță este o problemă dificilă. Din acest motiv, în numeroase universități tehnice, cursurile de rezistența materialelor sînt înlocuite prin cursuri de *mecanica materialelor* sau *mecanică tehnică*, în care dimensionarea cade pe planul al doilea, insistîndu-se asupra calculării tensiunilor și deformațiilor în piese de dimensiuni cunoscute.

Dar problema inginerească constă, în final, în a cunoaște dacă piesa rezistă sau nu, dacă are sau nu un anumit coeficient de siguranță.

Cum se face, în asemenea condiții, calculul de rezistență sau dimensionarea?

Se predimensionează piesa, fie printr-un calcul cu relația (3), fie prin asemănare cu alte piese, după care se procedează la *verificarea coeficientului de siguranță*. Această verificare, pentru o *piesă de dimensiuni cunoscute*, este mult mai ușoară decît alegerea rezistenței admisibile pentru o piesă de dimensiuni necunoscute.

2. SOLICITĂRI ȘI COEFICIENȚI DE SIGURANȚĂ ÎN PIESE DE MAȘINI

La începuturile studiului rezistenței materialelor, forțele ce acționau erau considerate constante în timp. Mai tîrziu s-a observat fenomenul de oboseală a materialelor, datorat faptului că sarcinile — deci și tensiunile — variază între un maxim pozitiv și un minim negativ, de aceeași valoare (ceea ce se numește solicitare alternant-simetrică). Ulterior s-a observat că variația ar putea avea loc și între un maxim și o valoare nulă. În acest fel, s-a stabilit, încă din secolul trecut — și se admite și în zilele noastre — că în piese de mașini pot exista (fig. 1 *a*) trei *cazuri de solicitare*: statică (I), pulsantă (II) și alternant-simetrică (III). Capacitatea de rezistență a materialului scade rapid la trecerea de la cazul I la II, respectiv de la II la III. În tratate de rezistența materialelor sau de organe de mașini se dau valori recomandate pentru rezistențe admisibile, în cele trei cazuri de solicitare la felurite materiale.

Analiza mai aprofundată a oboselii materialelor a arătat că solicitările din cazurile II și III (fig. 1*a*) sînt doar două cazuri particulare ale celui general, arătat la poziția 2 din figura 1*b*. În toate cazurile de solici-

tări variabile citate pînă aici, limitele σ_{max} și σ_{min} rămîneau constante pe timp nedefinit : astfel de solicitări se numesc *staționare*. În ultimele decenii a fost studiată, în numeroase laboratoare, solicitarea *variabilă aleatoare*

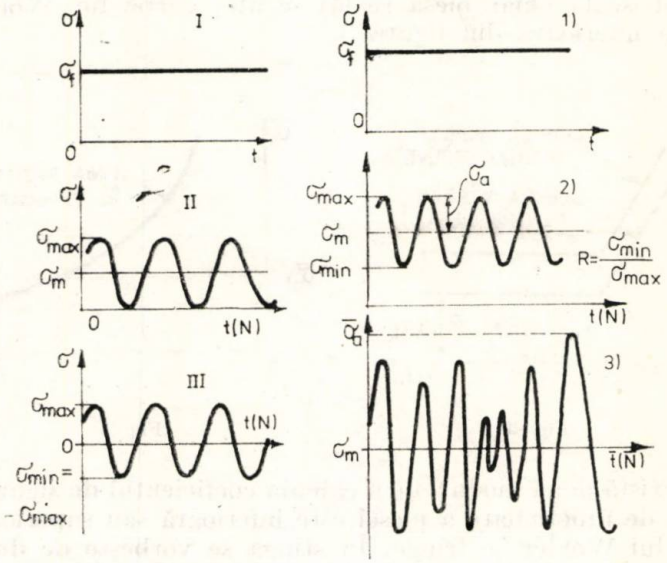


Fig. 1

(poziția 3 din fig. 1*b*), specifică automobilelor, avioanelor, mașinilor agricole, macaralelor etc. Azi se poate spune, deci, că în construcții de mașini se întîlnesc cele trei cazuri de solicitare arătate în figura 1*b* : 1) statică : 2) variabilă staționară ; 3) variabilă aleatoare.

Admițînd drept principal mod de calcul de rezistență acela al verificării coeficientului de siguranță, se va arăta cum se face acest lucru pentru cele trei cazuri din figura 1*b*.

Solicitarea statică (fig. 2) este aceea la care tensiunea de funcționare σ_f, respectiv forța de funcționare P_f, rămîn constante în timp. Considerînd, de asemenea, constante rezistența de rupere σ_r și limita de curgere σ_c, se pot determina cei doi *coeficienți de siguranță în tensiuni*

$$c_c = \sigma_c/\sigma_f\,;\ c_r = \sigma_r/\sigma_f. \qquad (8)$$

Dacă între sarcini și tensiuni există relații liniare, *coeficienții de siguranță în forțe* se exprimă, în metoda sarcinei limită, prin relațiile

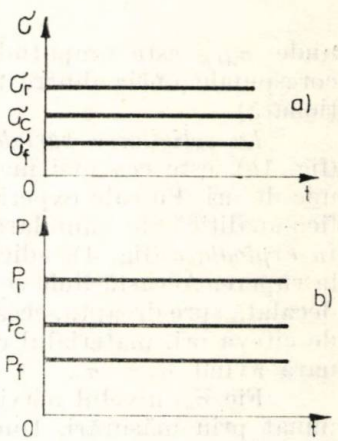


Fig. 2

$$c_c = P_c/P_f\,;\ c_r = P_r/P_f, \qquad (9)$$

unde P_c, P_r sînt forțele la limita de curgere, respectiv la rupere.

La solicitarea variabilă staționară, starea limită, funcție de timp (sau de numărul de cicluri N) este reprezentată de curba lui Wöhler. Pentru epruveta standardizată, aceasta este linia frîntă superioară din figura 3. Aplicînd o serie de coeficienți de corecție (sau de preferat — încercînd la oboseală chiar piesa reală) se află curba lui Wöhler pentru piesă — linia inferioară din figura 3.

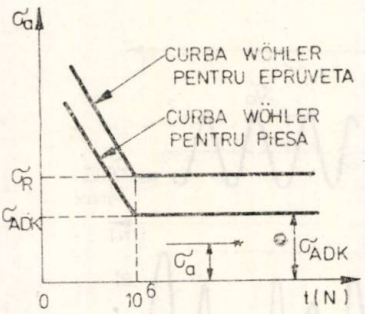


Fig. 3

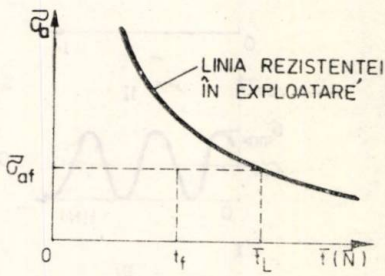


Fig. 4

Aici, există două moduri de a calcula coeficientul de siguranță, după cum durata de funcționare a piesei este inferioară sau superioară celei la care curba lui Wöhler se frînge. În stînga se vorbește de durabilitatea limitată, iar în dreapta (pentru piese din oțel) de durabilitatea nelimitată. Cum punctul de frîngere a curbei lui Wöhler corespunde la un număr mic de cicluri (circa 10^6 pentru oțel), se va limita discuția numai aspra părții din dreapta, adică a duratei de viață nelimitate. Dacă σ_a este amplitudinea solicitărilor variabile din piesă, coeficientul de siguranță este

$$c = \sigma_{ADK}/\sigma_a, \tag{10}$$

unde σ_{ADK} este amplitudinea rezistenței la oboseală a piesei. (Relația corespunde uneia dintre numeroasele metode de calcul la oboseală staționară).

La solicitarea variabilă aleatoare, mărimea caracteristică de calcul (fig. 1*b*), este cea mai mare amplitudine, $\overline{\sigma}_a$, atinsă de un număr foarte mic de ori. Pe cale experimentală (de preferat), sau printr-o metodă grafico-analitică de cumulare a deteriorărilor, se determină *linia rezistenței în exploatare* (fig. 4), adică relația între $\overline{\sigma}_a$ și numărul de cicluri $\overline{N}$ pînă la rupere. Această linie se aseamănă cu curba lui Wöhler, fiind însă mult decalată spre dreapta, ceea ce arată că la o solicitare unde $\overline{\sigma}_a$ se atinge doar de cîteva ori, materialul rezistă mult mai mult decît la solicitarea staționară avînd $\sigma_a = \overline{\sigma}_a$.

Fie $\overline{\sigma}_{af}$ nivelul maxim al solicitării aleatoare reale din piesă, determinat prin măsurări. Ducînd o orizontală în figura 4, se obține *durata de viață* $\bar{t}_L$ corespunzătoare acestui nivel. Luînd un coeficient de siguranță c, se află *durata de funcționare proiectată* a piesei,

$$t_f = \bar{t}_L/c. \tag{11}$$

3. O DEFINIȚIE UNITARĂ A COEFICIENȚILOR DE SIGURANȚĂ

Metodele descrise prin relațiile (9), (10) și (11) sînt cele folosite uzual pentru verificarea coeficientului de siguranță al pieselor de mașini. Pentru cel neavizat, ele provoacă o nelămurire : de ce în primul caz coeficientul de siguranță este definit ca raport a două forțe, în al doilea ca raport a două tensiuni, iar în al treilea ca raport a două durate de timp ?

Se va arăta, în cele ce urmează, că aceste trei definiții, aparent diferite, derivă din aceeași filosofie unitară a coeficientului de siguranță. Orice coeficient de siguranță rezultă din comparația între *starea limită* și *starea reală* din piesă.

Este cunoscut faptul că, cu timpul, capacitatea de rezistență a materialelor scade. Pentru solicitări variabile, acesta este cunoscutul fenomen al oboselii. Dar chiar și la solicitări statice rezistența de rupere nu rămîne constantă pe timp nelimitat : ea scade datorită îmbătrînirii, coroziunii,

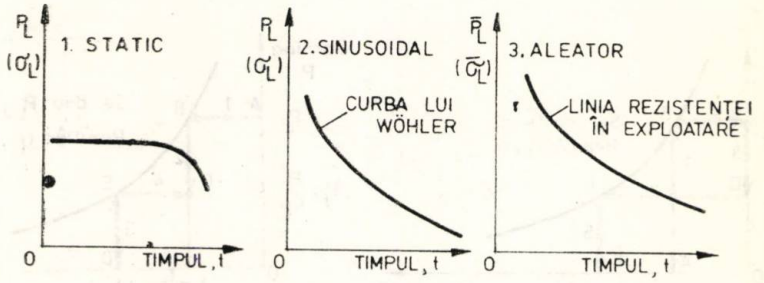


Fig. 5

absorbției mediilor active, iradiațiilor etc. Ca urmare, pentru toate cele trei feluri de solicitări se poate considera că forța (sau tensiunea) la starea limită (rupere, curgere, fluaj, oboseală) scade în timp. În figura 5 s-au reprezentat curbele respective, avînd în ordonată forțe limită P_L sau tensiuni limită σ_L.

În figura 6 s-a reprezentat o astfel de *curbă descrescătoare cu timpul*, putînd fi valabilă pentru oricare din cele trei cazuri de solicitare. Un punct al curbei are coordonatele P_L (sarcină limită) și t_L (durată de viață). Situația de *funcționare* a piesei este reprezentată de un punct situat sub această curbă, avînd coordonatele P_f, t_f.

Fie cunoscute P_f, t_f (fig. 6). Ducînd orizontala AD se află durata de viață t_L, deci se poate calcula *coeficientul de siguranță în timp*

$$c_t = t_L/t_f. \tag{12}$$

Ducînd verticala AB, rezultă sarcina limită P_L, deci *coeficientul de siguranță în forțe.*

$$c_P = P_L/P_f. \tag{13}$$

Variante ale acelorași calcule sînt date în figurile 7, 8, 9.

Din cele arătate rezultă că, datorită micșorării capacității de rezistență cu timpul, se pot defini, în toate cazurile de solicitare, *doi coeficienți de siguranță*, c_P și c_t. În anumite cazuri (solicitare statică, solicitare varia-

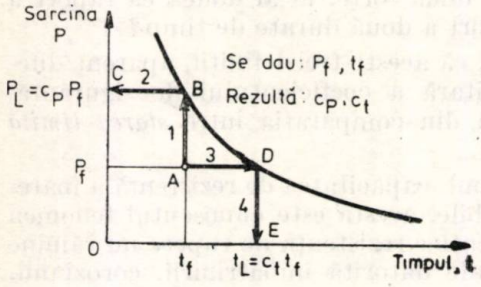


Fig. 6

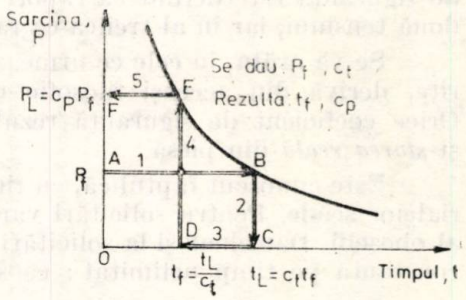


Fig. 7

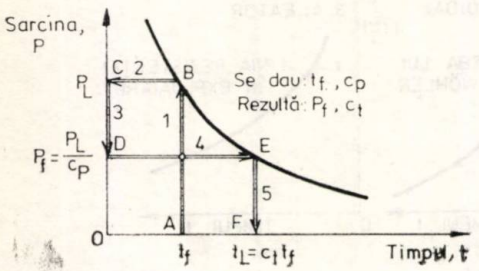


Fig. 8

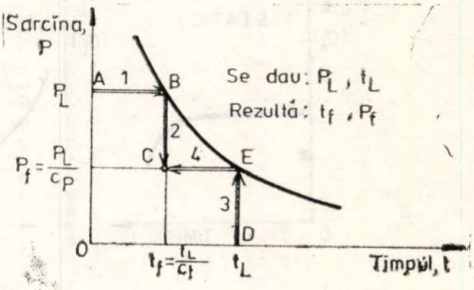


Fig. 9

bilă staționară la piese din oțel), coeficientul c_t devine foarte mare și calculul se poate limita numai la coeficientul c_P.

Odată aflați acești coeficienți, pentru piesa de dimensiuni cunoscute, ei pot fi comparați cu valori prescrise, trăgînd concluzia dacă este cazul sau nu să se modifice dimensiunile din anteproiect.

Primit în redacție la 5 aprilie 1988

ASUPRA STABILITĂȚII MIȘCĂRII SATELITULUI ECUATORIAL CONSIDERAT SOLID RIGID

de M. M. NIȚĂ și I. STROE

Institutul Politehnic București

Pornind de la ecuațiile mișcării generale a vehiculului spațial considerat corp rigid, în lucrare se analizează stabilitatea mișcării în aproximația liniară. Se arată că sistemul de ecuații se decuplează în două sisteme și se analizează mișcarea centrului de masă care apare cuplată cu rotația în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei.

1. NOTAȚII PRINCIPALE

r_v — raza vectoare ce caracterizează poziția centrului de masă al vehiculului;
φ_v — latitudinea centrului de masă al vehiculului;
s_Λ — longitudinea, în sistemul de referință legat de Pămînt;
ψ, φ, θ — unghiuri ce caracterizează orientarea vehiculului;
ω — viteza unghiulară a Pămîntului;
p, q, r — viteze unghiulare ale vehiculului;
m — masa vehiculului;
A, B, C — momente de inerție ale vehiculului față de axe centrale și principale.

2. INTRODUCERE

Mișcarea satelitului ecuatorial este studiată considerînd vehiculul corp rigid aflat sub influența potențialului gravitațional aproximat prin dezvoltarea pînă la armonicele J_2, J_{22}.

Se scriu condițiile pentru realizarea echilibrului relativ față de sistemul legat de Pămînt (cazul satelitului geostaționar) și se calculează abaterea razei vectoare față de raza caracteristică punctului material în prezența centrului atracticv.

Folosind aproximația liniară a ecuațiilor de mișcare se analizează sistemul format din ecuațiile mișcării centrului de masă, cuplate cu ecuația rotației în jurul centrului de masă față de o axă perpendiculară pe planul orbitei. Dacă sînt îndeplinite condițiile privind realizarea stabilității mișcării în jurul centrului de masă, atunci nu apar probleme deosebite față de cea a stabilității mișcării în aproximația punctului material.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Considerînd precizată poziția centrului de masă prin coordonatele r_v, Λ, φ_v și orientarea prin ψ, φ, θ, energia cinetică și potențială se scriu, respectiv:

$$E = \frac{m}{2}\left[r_v^2 + r_v^2(\omega + \dot{\Lambda})^2 \cos^2 \varphi_v + r_v^2 \dot{\varphi}_v^2 \right] + \frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2, \tag{3.1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 5, 1988, P. 417—427

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

$$V = -\mu\frac{m}{r_v} - \frac{1}{2}\frac{\mu m}{r_v^3}R^2\mathcal{J}_2(1-3\varphi_v^2) - \frac{3\mu m}{r_v^3}R^2\mathcal{J}_{22}\cos 2\Lambda -$$

$$-\frac{\mu}{2r_v^3}[A+B+C-3(a_{11}^2A+a_{12}^2B+a_{13}^2C)]. \tag{3.2}$$

Dacă mișcarea în jurul centrului de masă este caracterizată prin mici oscilații în jurul unei poziții de echilibru, folosind relațiile din [7] se ajunge la expresiile simplificate ale vitezelor unghiulare,

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} - (\omega + \dot{\Lambda})\varphi, \\ q &= \dot{\varphi} + (\omega + \dot{\Lambda})\psi, \\ r &= \dot{\theta} + \omega + \dot{\Lambda}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

iar matricea cosinusurilor directoare, care stabilește trecerea de la un sistem de bază la sistemul legat de axele de inerție centrale — principale devine, pentru unghiuri mici,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta & \varphi \\ \theta & 1 & -\psi \\ -\varphi & \psi & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Cu relațiile (3.3), (3.4), energia cinetică și potențială devin, respectiv,

$$E = \frac{m}{2}[\dot{r}_v^2 + r_v^2(\omega+\dot{\Lambda})^2\cos^2\varphi_v + r_v^2\dot{\varphi}_v^2] +$$

$$+\frac{1}{2}A[\dot{\psi} - (\omega+\dot{\Lambda})\varphi]^2 + \frac{1}{2}B[\dot{\varphi} + (\omega+\dot{\Lambda})\psi]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}C[\dot{\theta} + \omega + \dot{\Lambda}]^2, \tag{3.1'}$$

$$V = -\mu\frac{m}{r_v} - \frac{1}{2}\frac{\mu m}{r_v^3}R^2J_2(1-3\varphi_v^2) - \frac{3\mu m}{r_v^3}R^2J_{22}\cos 2\Lambda -$$

$$-\frac{\mu}{2r_v^3}[B+C-2A-3(B-A)\theta^2-3(C-A)\varphi^2], \tag{3.2'}$$

astfel că impulsurile generalizate se scriu sub forma:

$$p_{r_v} = m\dot{r}_v,$$

$$p_\Lambda = mr_v^2(\omega + \dot{\Lambda})\cos^2\varphi_v + A[\dot{\psi} - (\omega + \dot{\Lambda})\varphi](-\varphi) +$$

$$+ B[\dot{\varphi} + (\omega + \dot{\Lambda})\psi]\psi + C[\dot{\theta} + \omega + \dot{\Lambda}],$$

$$p_{\varphi_v} = mr_v^2\dot{\varphi}_v, \tag{3.5}$$

$$p_\psi = A[\dot{\psi} - (\omega + \dot{\Lambda})\varphi],$$

$$p_\varphi = B[\dot{\varphi} + (\omega + \dot{\Lambda})\psi],$$

$$p_\theta = C[\dot{\theta} + \omega + \dot{\Lambda})]$$

şi deci, în final, expresia (3.1′) devine

$$E = \frac{1}{2m}\left[p_{r_v}^2 + \frac{1}{r_v^2\cos^2\varphi_v}(p_\Lambda + \varphi p_\psi - \psi p_\varphi - p_\theta)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_v^2}p_{\varphi_v}^2\right] + \frac{1}{2A}p_\psi^2 + \frac{1}{2B}p_\varphi^2 + \frac{1}{2C}p_\theta^2. \tag{3.1″}$$

Pentru funcţia lui Hamilton,

$$H = \sum p_k\dot{q}_k - L, \tag{3.6}$$

unde q_k, p_k sînt coordonatele, respectiv impulsurile generalizate, iar

$$L = E + U \tag{3.7}$$

este funcţia lui Lagrange, unde $U = -V$ este funcţia de forţă, ţinînd seama de relaţiile anterioare se obţine expresia

$$H = \frac{p_{r_v}^2}{2m} + \frac{p_{\varphi_v}^2}{2mr_v^2} + \frac{p_\psi^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2B} + \frac{p_\theta^2}{2C} - \omega p_\Lambda +$$

$$+ \frac{1}{2mr_v^2\cos^2\varphi_v}[p_\Lambda + \varphi p_\psi - \psi p_\varphi - p_\theta]^2 - \mu\frac{m}{r_v} -$$

$$- \frac{\mu}{2r_v^3}[mR^2J_2(1 - 3\varphi_q^2) + 6mR^2J_{22}\cos 2\Lambda +$$

$$+ B + C - 2A - 3(B - A)\theta^2 - 3(C - A)\varphi^2]. \tag{3.6′}$$

În cazul satelitului geostaționar, condițiile de echilibru față de reperul legat de Pământ au forma:

$$\frac{\partial U^*}{\partial r_v} = 0; \qquad \frac{\partial U^*}{\partial \Lambda} = 0; \qquad \frac{\partial U^*}{\partial \varphi_v} = 0,$$
$$\frac{\partial U^*}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial U^*}{\partial \theta} = 0, \tag{3.8}$$

unde s-a notat

$$U^* = U + E_0, \tag{3.9}$$

cu

$$E_0 = \frac{m}{2} r_v^2 \omega^2 \cos^2 \varphi_v + \frac{A}{2} \omega^2 \varphi^2 + \frac{B}{2} \omega^2 \psi^2 + \frac{C}{2} \omega^2. \tag{3.10}$$

Rezultă

$$U^* = \mu \frac{m}{r_v} + \frac{\mu}{2r_v^3} [mR^2 J_2 (1 - 3\varphi_v^2) + 6\, mR^2 J_{22} \cos 2\Lambda +$$
$$+ B + C - 2A - 3(B - A)\theta^2 - 3(C - A)\varphi^2] +$$
$$+ \frac{m}{2} r_v^2 \omega^2 \cos^2 \varphi_v + \frac{A}{2} \omega^2 \varphi^2 + \frac{B}{2} \omega^2 \psi^2 + \frac{C}{2} \omega^2. \tag{3.9'}$$

Din prima relație (3.8) se obține valoarea r_{v_0} pentru care se realizează echilibrul, dată de relația

$$-\mu \frac{m}{r_{v_0}^2} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_{v_0}^4} [mR^2 J_2 (1 - 3\varphi_{v_0}^2) + 6mR^2 J_{22} \cos 2\Lambda_0 +$$
$$+ B + C - 2A - 3(B - A)\theta_0^2 - 3(C - A)\varphi_0^2] + mr_{v_0}^2 \omega^2 \cos^2 \varphi_{v_0} = 0. \tag{3.11}$$

Din a doua relație (3.8), $\frac{\partial U^*}{\partial \Lambda} = 0$, obținem condiția de echilibru

$$\Lambda_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \tag{3.12}$$

cunoscută din studiul mișcării în aproximația punctului material ([1], [2], [3]).

Ultimele ecuații (3.8) duc la obținerea condițiilor de echilibru

$$\varphi_{v_0} = 0; \quad \psi_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \theta_0 = 0, \tag{3.13}$$

astfel că (3.11) devine,

$$-\mu\frac{m}{r_{v_0}^2} - \frac{3}{2}\frac{\mu}{r_{v_0}^4}(mR^2J_2 + 6mR^2J_{22}\cos 2\Lambda_0 + B + C - 2A) + mr_{v_0}\omega^2 = 0. \tag{3.11'}$$

Pentru cazul punctului material, notînd cu r_0 lungimea razei vectoare, rezultă valoarea cunoscută,

$$-\mu\frac{m}{r_0^2} + mr_0\omega^2 = 0. \tag{3.14}$$

Notînd cu ε abaterea razei vectoare față de aproximația punctului material, putem scrie

$$r_{v_0} = r_0 + \varepsilon. \tag{3.15}$$

Folosind relațiile aproximative:

$$\frac{1}{r_{v_0}^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{r_0} + \ldots\right),$$
$$\frac{1}{r_{v_0}^4} \approx \frac{1}{r_0^4}\left(1 - 4\frac{\varepsilon}{r_0} + \ldots\right), \tag{3.16}$$

se obține

$$\frac{\varepsilon}{r_0} = \frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{r_0^2}}{2 + \dfrac{\dfrac{1}{r_0^2}}{R^2J_2 + 6R_2J_{22}\cos 2\Lambda_0 + \dfrac{B + C - 2A}{m}}} \ll 1. \tag{3.17}$$

Ecuațiile de mișcare față de sistemul legat de Pămînt (ecuațiile lui Hamilton) sînt:

$$\dot{r}_v = \frac{\partial H}{\partial p_{rv}}; \quad \dot{\Lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\Lambda}; \quad \dot{\varphi}_v = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi v}},$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}; \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta},$$

$$\dot{p}_{r_v} = -\frac{\partial H}{\partial r_v}; \quad \dot{p}_\Lambda = -\frac{\partial H}{\partial \Lambda}; \quad \dot{p}_{\varphi_v} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_v}, \tag{3.18}$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi}; \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}; \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Soluția mișcării de bază rezultă, folosind relațiile (3.19):

$$r_v = r_{v_0}; \quad \Lambda = \Lambda_0; \quad \varphi_v = 0; \quad \psi = 0; \quad \varphi = 0; \quad \theta = 0,$$

$$p_{r_v} = 0; \; p_\Lambda = m r_{v_0}^2 \omega + C\omega; \; p_{\varphi_v} = 0; \; p_\psi = 0; \; p_\varphi = 0; \; p_\theta = C\omega. \tag{3.19}$$

Cu notațiile $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ pentru coordonatele r_v, Λ, φ_v, ψ, φ, θ respectiv $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ pentru impulsurile generalizate p_{r_v}, p_Λ p_{φ_v}, p_ψ, p_φ, p_θ ecuațiile de mișcare, în variațiile ξ_i ale coordonatelor q și variațiile η_i ale impulsurilor p_i au forma:

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right)_0 \xi_j + \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right)_0 \eta_j,$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \xi_j - \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \right)_0 \eta_j, \; (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{3.20}$$

Sistemul se scrie matriceal

$$\{\dot{\xi}_i\} = \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right)_0 \right] \{\xi_j\} + \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right)_0 \right] \{\eta_j\},$$

$$\{\dot{\eta}_i\} = \left[-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \right] \{\xi_j\} + \left[-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \right)_0 \right] \{\eta_j\}. \tag{3.20'}$$

Notînd cu $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$, $[C_{ij}]$, $[D_{ij}]$ matricele pătrate (6×6), relațiile (3.20') devin:

$$\{\dot{\xi}_i\} = [A_{ij}]\{\xi_j\} + [B_{ij}]\{\eta_j\},$$

$$\{\dot{\eta}_i\} = [C_{ij}]\{\xi_j\} + [D_{ij}]\{\eta_j\}. \tag{3.20''}$$

Cu notaţiile q_i, p_i, funcţia lui Hamilton, (3.6′) se scrie

$$H = \frac{p_1^2}{2m} - \omega p_2 + \frac{p_3^2}{2mq_1^2} + \frac{p_4^2}{2A} + \frac{p_5^2}{2B} + \frac{p_6^2}{2C} +$$

$$+ \frac{1}{2mq_1^2 \cos^2 q_2}(p_2 + q_5 p_4 - q_4 p_5 - p_6)^2 - \mu \frac{m}{q_1} -$$

$$- \frac{\mu}{2q_1^3}[mR^2 J_2(1 - 3q_3^2) + 6mR^2 J_{22} \cos 2q_2 + B + C - 2A -$$

$$- 3(B - A)q_6^2 - 3(C - A)q_5^2]. \qquad (3.6'')$$

Folosind (3.6″) şi (3.20′), matricele din (3.20″) devin :

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ -\frac{2\omega}{r_{v_0}} & 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & 0\ 0 & 0\ \omega\ 0 \\ 0 & 0\ 0 & -\omega\ 0\ 0 \\ \frac{2\omega}{r_{v_0}} & 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.21)$$

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{mr_{v_0}^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{mr_{v_0}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{mr_{v_0}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{mr_{v_0}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} + \frac{1}{mr_{v_0}^2} \end{bmatrix}, \qquad (3.22)$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} m\omega^2 - \frac{2\mu m}{r_{v_0}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\mu m R^2 J_{22}}{r_{v_0}^3}\cos 2\Delta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(mr\omega^2 + \frac{3\mu m R^2 J_2}{r_{v_0}^3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mu(C-A)}{r_{v_0}^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mu(B-A)}{r_{v_0}^3} \end{bmatrix} . \quad (3.23)$$

Termenii matricei $[D_{ij}]$ se calculează cu relaţia

$$D_{ij} = -A_{ij}. \tag{3.24}$$

Se observă cu uşurinţă, că sistemul liniar (3.20'') se decuplează în două sisteme, unul în variabilele q_1, q_2, q_3, q_6, p_1, p_2, p_3 p_6 şi altul în q_4, q_5, p_4, p_5.

4. STUDIUL STABILITĂŢII

Dacă se neglijează termenul în J_{22}, coordonata q_2 devine coordonată ciclică, impulsul p_2 devine $p_2 = \text{const.}$, iar ecuaţia caracteristică a sistemului în q_1, q_3, q_6, p_1, p_3, p_6 se scrie

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{mr_{v_0}^2} & 0 \\ \frac{2\omega}{r_{v_0}} & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{C}+\frac{1}{mr_{v_0}^2} \\ C_{11} & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\frac{2\omega}{r_{v_0}} \\ 0 & C_{33} & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4.1}$$

unde C_{ii} sînt termeni din matricea (3.23).

Dezvoltînd (4.1) se obţine

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_3 = 0. \tag{4.1'}$$

Cu notaţia

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{r_{v_0}^3}, \tag{4.2}$$

rezultă

$$\omega^2 = \frac{\mu}{r_{v_0}^3} + \frac{3}{2}\frac{\mu}{r_{v_0}^3}\left(\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2} + \frac{B+C-2A}{mr_{v_0}^2}\right) \approx$$

$$\approx \Omega^2\left(1 + \frac{3}{2}\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right), \tag{4.3}$$

şi deci coeficienţii a_i din (4.1') sînt daţi de

$$a_0 = 1, \tag{4.4}$$

$$a_1 = \frac{3\mu(B-A)}{r_{v_0}^3}\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{mr_{v_0}^2}\right) + \frac{3\mu R^2J_2}{r_{v_0}^5} + \frac{2\mu}{r_{v_0}^3} \approx$$

$$\approx \Omega^2\left(3\frac{B-A}{C}+\frac{3R^2J_2}{r_{v_0}^2}+2\right), \tag{4.5}$$

$$a_2=-\frac{3\mu(B-A)}{r_{v_0}^3}\left[-\frac{\omega^2}{mr_{v_0}^2}-\frac{3\mu R^2J_2}{mr_{v_0}^7}+\left(\omega^2-\frac{2\mu}{r_{v_0}^3}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{mr_{v_0}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\omega^2}{mr_{v_0}^2}\right]+\left(\frac{2\mu}{r_{v_0}^3}-\omega^2\right)\left(\omega^2+\frac{3\mu J_2R^2}{r_{v_0}^5}\right)\approx$$

$$\approx \Omega^4\left[1+6\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}+3\frac{B-A}{C}\left(1-\frac{3}{2}\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right)\right], \tag{4.6}$$

$$a_3=-\left(\omega^2+\frac{3\mu R^2J_2}{r_{v_0}^5}\right)\frac{3\mu(B-A)}{r_{v_0}^3}\left[\left(\omega^2-\frac{2\mu}{r_{v_0}^3}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{mr_{v_0}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\omega^2}{mr_{v_0}^2}\right]\approx \Omega^6\frac{3(B-A)}{C}\left(1+3\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right). \tag{4.7}$$

Condițiile de stabilitate Routh-Hurwitz impun:

$$a_i>0, \tag{4.8}$$

$$a_1a_2-a_0a_3>0. \tag{4.9}$$

Din (4.8) rezultă că trebuie îndeplinită condiția

$$B-A>0, \tag{4.10}$$

condiție ce rezultă și din studiul stabilității mișcării în jurul centrului de masă, pentru mișcarea decuplată de mișcarea centrului de masă.

Condiția (4.9) se pune sub forma

$$9\left(1-\frac{3}{2}\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right)\left(\frac{B-A}{C}\right)^2+2\left(4+\frac{15}{2}\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right)\frac{B-A}{C}+$$

$$+2\left(1+\frac{15}{2}\frac{R^2J_2}{r_{v_0}^2}\right)>0, \tag{4.9'}$$

evident îndeplinită.

Așadar, dacă sînt îndeplinite condițiile de stabilitate ce rezultă din studiul mișcărilor decuplate (mișcarea centrului de masă și mișcarea în jurul centrului de masă) se realizează și condițiile pentru stabilitatea mișcării descrisă de sistemul în variabilele q_1, q_3, q_6, p_1, p_3, p_6, care cuprinde un cuplaj între mișcarea centrului de masă și mișcarea de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei.

Primit în redacție la 6 mai 1988

BIBLIOGRAFIE

1. L. BLITZER, *Syncronous and Resonant Satellite Orbits Associated with Equatorial Ellipticity*, ARS Journal, **32**, 7 (1962).
2. E. CAMBI, *Stability of a Geostationary Satellite in the Terrestrial Field*, ELDO Technical Review, **2**, 1 (1967).
3. C. MARCHAL, *Perturbations et stabilization artificielle d'un satellite équatorial de 24 heures*, La Recherche Aérospatiale, **96** (1963).
4. M. M. NIȚĂ, *Ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate a vehiculului orbital staționar la o latitudine arbitrară*, St. cerc. mec. apl., **28**, 5 (1969).
5. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*, Editura Academiei R. S. România, București, 1973.
6. L. A. PARS, *A Treatise on Anyalytical Dynamics*, London, 1964.
7. I. STROE, *Perturbațiile mișcării centrului de masă al vehiculului spațial date de mișcarea în jurul centrului de masă*, St. cerc. mec. apl., **44**, 6 (1985).
8. I. STROE, *Influența distribuției de masă și a armonicei gravitaționale J_2 asupra mișcării vehiculului spațial pe orbite ecuatoriale circulare*, St. cerc. mec. apl., **45**, 1 (1986).

TENSIUNI ŞI DEPLASĂRI ÎN ELEMENTELE PLANE ELASTICE CU METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ. II. ANALIZA DINAMICĂ

V. F. POTERAŞU, N. MIHALACHE

Institutul Politehnic Iaşi

C. FILIPESCU

Centrul de calcul al Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi

În lucrare se prezintă metoda elementelor de frontieră în elastodinamică folosind transformata Laplace şi respectiv studiul direct în domeniul timpului. După obţinerea ecuaţiilor integrale pe frontieră, acestea se rezolvă numeric prin discretizarea conturului domeniului în elemente.

Se descrie programul de calcul DINFRON pentru rezolvarea problemelor de elastodinamică în condiţiile stării plane de tensiune sau deformaţie.

Se prezintă exemple numerice pentru diafragme, bare crestate şi fundaţii continue care ilustrează generalizarea aplicării metodei cu bune rezultate. Metoda prezintă numeroase avantaje comparativ cu metoda elementelor finite în numeroase situaţii.

0. INTRODUCERE

Metoda elementelor de frontieră s-a dezvoltat ca o alternativă la metodele de domeniu : metoda diferenţelor finite şi metoda elementelor finite. Principalele avantaje ale metodei elementelor de frontieră constau în reducerea dimensionalităţii problemei cu o unitate şi buna precizie a ei pentru o clasă largă de probleme care includ şi elastodinamica liniară, în special cazurile cînd domeniul studiat este infinit, semiinfinit şi/sau conţine concentrări de tensiuni sau fisuri.

Metodele tip domeniu cer discretizarea atît a suprafeţei domeniului, cît şi a interiorului acestuia, deci creşterea cerinţelor de modelare, a dimensiunii problemei şi crearea de frontiere artificiale în cazul domeniilor infinite sau semiinfinite pentru rezolvarea problemei reflexiei undelor. Pe de altă parte, prin metoda elementelor de frontieră se discretizează numai suprafaţa domeniului studiat, condiţia de radiaţie la infinit pentru domenii infinite şi semiinfinite se ia automat în consideraţie, iar concentrările de tensiuni se tratează fără artificii suplimentare de calcul. Aceste avantaje devin şi mai semnificative în cazul domeniilor tridimensionale. Metoda elementelor de frontieră cuplează cunoscuta metodă a ecuaţiilor integrale din elastodinamică cu metoda elementelor finite.

Printre lucrările clasice de elastodinamică, care includ ecuaţiile integrale, se pot menţiona cele ale lui Love [1], Achenbach [2], Eringen şi Suhubi [3], L. Dragoş [4], iar printre cele care tratează metoda ele-

mentelor de frontieră în elastodinamică, Brebbia și Walker [5] Benerjee și Butterfield [6], Brebbia, Telles și Wrobel [7], Kitahara [8], Wolf [9], Beskos și Manolis [10], Beskos [12].

Metoda elementelor de frontieră se aplică în elastodinamică în condiția că forțele masice sînt zero, și că reprezentarea sub formă integrală a cîmpului de deplasări poate fi obținut fie direct ca în lucrările clasice, fie indirect prin utilizarea teoremei de reciprocitate în dinamică sau cu metoda reziduului ponderat. Reprezentarea integrală exprimă cîmpul de deplasări în funcție de valorile pe contur ale deplasărilor și tracțiunilor cu ajutorul soluției fundamentale sau a funcției Green. După aplicarea ei pe frontieră, printr-un proces la limită, ecuația devine o ecuație integrală pe frontieră care este rezolvată numeric, necunoscutele fiind deplasările și tensiunile pe frontieră. Valorile deplasărilor și tensiunilor în interiorul domeniului se calculează pe baza reprezentării inițiale a soluției, o relație de tip Somigliana. În cazurile cînd se consideră că forțele masice sau condițiile inițiale nu sînt zero, apar integrale de volum suplimentare care conțin integranzi cunoscuți. Metoda elementelor de frontieră (de contur sau de margine) în elastodinamică se rezolvă, fie în domeniul timpului, fie în domeniul frecvențelor utilizînd transformata Laplace sau Fourier și respectiv inversele acestora.

1. ECUAȚII DE BAZĂ ÎN ELASTODINAMICĂ

Ecuațiile de bază în elastodinamica tranzitorie pentru corpuri omogene, izotrope și liniar elastice pot fi exprimate în funcție de viteză și accelerație,

$$(c_l^2 - c_t^2)\, u_{j,ij} + c_t^2 u_{i,jj} + F_i = \ddot{u}_i \tag{1}$$

sau în raport cu ecuațiile diferențiale de echilibru dinamic a lui Navier

$$(\lambda + G)\, u_{j,ij} + G u_{i,jj} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \tag{2}$$

în care c_l și c_t reprezintă vitezele de propagare ale undelor longitudinale, respectiv transversale, iar f_i sînt componentele forțelor de inerție.

Dacă vitezele de propagare se exprimă în raport cu constantele lui Lamé, acestea devin

$$c_l^2 = (\lambda + 2G)/\rho, \quad c_t^2 = G/\rho, \quad F_i = f_i/\rho. \tag{3}$$

Expresiile tensiunilor pot fi obținute din legea lui Hooke generalizată și au forma

$$\sigma_{ij} = \rho[(c_l^2 - 2c_t^2) u_{r,r}\, \delta_{ij} + c_t^2 (u_{i,j} + u_{j,i})], \tag{4}$$

condițiile de contur fiind

$$t_i^n = \sigma_{ij}\, n_j. \tag{5}$$

Dacă se utilizează transformata Laplace în raport cu timpul se obține

$$\mathcal{L}(f) = \bar{f}(\underset{\sim}{x}, k) = \int_0^\infty f(\underset{\sim}{x}, t)\, e^{-kt}\, dt, \quad x \in [E^2, E^3], \tag{6}$$

unde k este parametrul transformatei Laplace. Din proprietățile transformatei Laplace rezultă următoarele egalități:

$$\bar{u}_i(\underset{\sim}{x}\, k) = \mathcal{L}[u_i(\underset{\sim}{x}, t)], \quad \bar{t}_i(\underset{\sim}{x}, k) = \mathcal{L}[t_i, (\underset{\sim}{x}, t)],$$

$$\bar{u}_{i,j}(\underset{\sim}{x}, k) = \mathcal{L}[u_{i,j}(\underset{\sim}{x}, t)], \quad \mathcal{L}[\ddot{u}_i(\underset{\sim}{x}, t)] = \tag{7}$$

$$= k^2 \bar{u}_i(\underset{\sim}{x}, k) - k u_i(\underset{\sim}{x}, 0) - \dot{u}_i(\underset{\sim}{x}, 0).$$

Aplicînd transformata Laplace relațiilor (1), (4), (5) și definind

$$\bar{Y}_i(\underset{\sim}{x}, k) = \rho[\bar{F}_i(\underset{\sim}{x}, k) + k u_i(\underset{\sim}{x}, 0) + \dot{u}_i(\underset{\sim}{x}, 0)],$$

se obține

$$(c_l^2 - c_t^2)\, \bar{u}_{j,ij} + c_t^2 \bar{u}_{i,jj} - k^2 \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \bar{Y}_i, \tag{8}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \rho[(c_l^2 - 2c_t^2)\, \bar{u}_{r,r} \delta_{ij} + c_t^2 (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})], \tag{9}$$

$$\bar{t}_i^n = \bar{\sigma}_{ij} u_j. \tag{10}$$

2. IDENTITĂȚILE LUI SOMIGLIANA

Teorema a doua Maxwell-Betti pentru medii elastice stabilește legătura dintre transformata Laplace și două sisteme ($\bar{X}_i^*$, $\bar{t}_i^*$, $\bar{u}_i^*$) și ($\bar{X}_i$, $\bar{t}_i$, $\bar{u}_i$) prin intermediul relației

$$\int_S \bar{t}_i^*\, \bar{u}_i\, dS + \int_\Omega \bar{X}_i^*\, u_i\, d\Omega = \int_S \bar{t}_i\, \bar{u}_i^*\, dS + \int_\Omega \bar{X}_i\, \bar{u}_i^*\, d\Omega \tag{11}$$

— sistemul 1 — modelul elastodinamic;

— sistemul 2 — modelul elastodinamic fundamental ale căror soluții sînt definite prin

$$\bar{X}_i^*(y) = \bar{\delta}(x, y)\, e_i, \quad \bar{t}_i^*(y) = \bar{T}_{ji}(x, y)\, e_j,$$

$$\bar{u}_i^*(y) = \bar{U}_{ji}(x, y)\, e_j, \quad \bar{\sigma}_{ik}^*(y) = \bar{\sigma}_{jik}(x, y)\, e_j, \tag{12}$$

unde

$$x, y \in [\underset{\sim}{x}] \equiv [E^2, E^3].$$

Teorema reciprocității dinamice este dată de Rayleigh-Ritz și reprezintă o extindere a teoremei clasice de reciprocitate statică a lui Maxwell-Betti. Identitatea leagă deplasările și tensiunile cu diferite distribuții de forțe masice, condiții inițiale și condiții de contur [10].

Dacă se consideră un domeniu regulat Ω delimitat de frontiera S și două stări elastodinamice distincte (u, σ), (u', σ'), respectiv deplasările și tensiunile definite de condițiile inițiale de tipul

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{u}_0(\underset{\sim}{x}), \quad \dot{\underset{\sim}{u}}(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{v}_0(\underset{\sim}{x}),$$

$$\underset{\sim}{u}'(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{u}'_0(\underset{\sim}{x}), \quad \dot{\underset{\sim}{u}}'(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{v}'_0(\underset{\sim}{x}),$$

atunci pentru $t > 0$

$$\int_S \underset{\sim}{t} * \underset{\sim}{u}' \, dS + \rho \int_\Omega [\underset{\sim}{f} * u'(\underset{\sim}{x}, t) + \dot{\underset{\sim}{u}}'(\underset{\sim}{x}, t)\, \underset{\sim}{u}_0(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{u}'(\underset{\sim}{x}, t)\, \underset{\sim}{v}_0(\underset{\sim}{x})] \, d\Omega =$$

$$= \int_S \underset{\sim}{t}' * \underset{\sim}{u} \, dS + \rho \int_\Omega [\underset{\sim}{f}' * \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}, t) + \dot{\underset{\sim}{u}}(\underset{\sim}{x}, t)\, \underset{\sim}{u}'_0(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}, t)\, \underset{\sim}{v}'_0(\underset{\sim}{x})] \, d\Omega, \tag{13}$$

unde $\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{n}$ sînt tracțiunile pe frontiera S în ambele sisteme.

Dacă $t > 0$ și se definește funcția $p(\underset{\sim}{x}, t)$,

$$p_i(\underset{\sim}{x}, t) = \sigma_{ji} * u'_j - \sigma'_{ji} * u_j. \tag{14}$$

Diferențiindu-se expresia (14), divergența acesteia devine

$$p_{i,i} = \sigma_{ji,i} * u'_j + \sigma_{ji} * u'_{j,i} - \sigma_{ji,i} * u_j - \sigma'_{ji} * u_{j,i}. \tag{15}$$

Separînd $u'_{j,i}$ și $u_{j,i}$ în parte simetrică și antisimetrică și știind că

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i$$

din (15) se obține

$$p_{i,i} = \rho(\ddot{u}_j * u'_j) - \rho(f_j * u'_j) + \sigma_{ji} * \varepsilon'_{ji} - \rho(\ddot{u}_j * u_j) + \rho(f'_j * u_j) - \sigma_{ji} * \varepsilon_{ji}. \tag{16}$$

Știind că

$$\sigma_{ji} * \omega'_{ij} = \sigma'_{ji} * \omega_{ij} = 0$$

și folosind legea lui Hooke se deduce

$$\sigma_{ji} * \varepsilon'_{ji} = \sigma'_{ji} * \varepsilon_{ji}. \tag{17}$$

Utilizînd produsul de convoluție se poate scrie

$$\begin{aligned} \ddot{\underset{\sim}{u}} * \underset{\sim}{u}' &= (\dot{\underset{\sim}{u}} * \dot{\underset{\sim}{u}}')^{\cdot} - \dot{\underset{\sim}{v}}_0 \underset{\sim}{u}' - \dot{\underset{\sim}{u}}_0 \dot{\underset{\sim}{u}}', \\ \ddot{\underset{\sim}{u}}' * \underset{\sim}{u} &= (\dot{\underset{\sim}{u}}' * \dot{\underset{\sim}{u}})^{\cdot} - \dot{\underset{\sim}{v}}'_0 \underset{\sim}{u} - \dot{\underset{\sim}{u}}'_0 \dot{\underset{\sim}{u}}, \\ \ddot{\underset{\sim}{u}} * \underset{\sim}{u}' - \ddot{\underset{\sim}{u}}' * \underset{\sim}{u} &= \dot{\underset{\sim}{v}}'_0 \underset{\sim}{u} + \dot{\underset{\sim}{u}}'_0 \dot{\underset{\sim}{u}} - \dot{\underset{\sim}{v}}_0 \underset{\sim}{u}' - \dot{\underset{\sim}{u}}_0 \dot{\underset{\sim}{u}}'. \end{aligned} \tag{18}$$

Substituind (17) și (18) în (16) se obține

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{p} = p_{i,i} = \rho[(\underset{\sim}{f}' * \underset{\sim}{u}) + \dot{\underset{\sim}{u}} \underset{\sim}{u}'_0 + \underset{\sim}{u} \underset{\sim}{v}'_0] - \rho[(\underset{\sim}{f} * \underset{\sim}{u}') + \dot{\underset{\sim}{u}}' \underset{\sim}{u}_0 + \underset{\sim}{u}' \underset{\sim}{v}_0]. \tag{19}$$

Aplicînd teorema de divergenţă rezultă

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{\nabla p}\, d\Omega = \int_{S} p_i n_i\, dS = \int_{S} (\sigma_{ji} * u'_j - \sigma'_{ji} * u_j) n_i\, dS = \int_{S} (\underset{\sim}{t} * \underset{\sim}{u'} - \underset{\sim}{t'} * \underset{\sim}{u})\, dS. \tag{20}$$

Dacă se substituie (19) în (20) se obţine tocmai relaţia (13). În cazul cînd condiţiile iniţiale sînt nule,

$$\underset{\sim}{u}_0(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{u}'_0(\underset{\sim}{x}, 0) = 0, \quad \underset{\sim}{v}_0(\underset{\sim}{x}, 0) = \underset{\sim}{v}'_0(\underset{\sim}{x}, 0) = 0,$$

ecuaţia (13) are forma

$$\int_{S} \underset{\sim}{t} * \underset{\sim}{u'}\, dS + \rho \int_{\Omega} \underset{\sim}{f} * \underset{\sim}{u'}\, d\Omega = \int_{S} \underset{\sim}{t'} * \underset{\sim}{u}\, dS + \rho \int_{\Omega} \underset{\sim}{f'} * \underset{\sim}{u}\, d\Omega. \tag{21}$$

Dacă se utilizează transformata Laplace în teorema reciprocităţii dinamice Rayleigh-Betti, atunci aceasta este exprimată în funcţie de deplasările şi tensiunile definite de relaţia (13).

Considerînd transformata Laplace ca un produs de convoluţie a două funcţii, se defineşte produsul transformatei Laplace al fiecărei funcţii

$$\mathcal{L}[g * h] = \mathcal{L}[g] \cdot \mathcal{L}[h]. \tag{22}$$

Aplicînd această proprietate relaţiei (13) rezultă

$$\int_{S} \bar{\underset{\sim}{t}}\, \bar{\underset{\sim}{u}}'\, dS + \rho \int_{\Omega} [\bar{\underset{\sim}{f}}\, \bar{\underset{\sim}{u}}' + \dot{\underset{\sim}{u}}' \underset{\sim}{u}_0(\underset{\sim}{x}) + \bar{\underset{\sim}{u}}'\, \underset{\sim}{v}_0(\underset{\sim}{x})]\, d\Omega =$$

$$= \int_{S} \bar{\underset{\sim}{t}}'\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, dS + \rho \int_{\Omega} [\bar{\underset{\sim}{f}}'\, \bar{\underset{\sim}{u}} + \dot{\bar{\underset{\sim}{u}}}\, \underset{\sim}{u}'_0(\underset{\sim}{x}) + \bar{\underset{\sim}{u}}\, \underset{\sim}{v}'_0(\underset{\sim}{x})]\, d\Omega. \tag{23}$$

Dacă în plus se defineşte că

$$\rho \bar{\underset{\sim}{f}} + k \underset{\sim}{u}_0(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{v}_0(\underset{\sim}{x}) = \bar{\underset{\sim}{X}},$$

atunci teorema de reciprocitate (23) se reduce la

$$\int_{S} \bar{\underset{\sim}{t}}\, \bar{\underset{\sim}{u}}'\, dS + \int_{\Omega} \underset{\sim}{X}\, \bar{\underset{\sim}{u}}'\, d\Omega = \int_{S} \bar{\underset{\sim}{t}}'\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, dS + \int_{\Omega} \bar{\underset{\sim}{X}}\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, d\Omega. \tag{24}$$

După ce au fost definite teoremele de reciprocitate, dacă se înlocuiesc relaţiile (12) în (11) se obţine

$$\bar{u}_j(x) = -\int_{S} \bar{T}_{ji}(x, y)\, \bar{u}_i(y)\, dS(y) + \int_{S} \bar{U}_{ji}(x, y)\, \bar{t}_i(y)\, dS(y) +$$

$$+ \int_{\Omega} \bar{U}_{ji}(x, y)\, \bar{X}_i(y)\, d\Omega(y) \tag{25}$$

ce reprezintă expresia deplasării unui punct de pe frontiera domeniului.

În același mod se poate obține tensorul tensiunilor în punctele interne ale domeniului

$$\bar{\sigma}_{ij}(x) = \int_S \bar{D}_{kij}(x, y)\, \bar{t}_k(y)\, \mathrm{d}S(y) - \int_S \bar{S}_{kij}(x, y)\, \bar{u}_k(y)\, \mathrm{d}S(y) +$$

$$+ \int_\Omega \bar{D}_{kij}(x, y)\, \bar{X}_k(y)\, \mathrm{d}\Omega(y). \tag{26}$$

Tensorii $\bar{D}_{kij}$ și $\bar{S}_{kij}$ depind de soluțiile fundamentale U și T,

În cazul cînd forțele masice se consideră nule, limita integralei a treia din relația (26) devine

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} \bar{D}_{kij}(x, y)\, \bar{X}_k(y)\, \mathrm{d}\Omega(y) = 0$$

similar cu cazul static.

3. REZOLVAREA INTEGRALELOR PE FRONTIERĂ ȘI ÎN PUNCTELE INTERNE

Prin analogie cu cazul static se poate rezolva ecuația integrală

$$\bar{c}_{jl}\bar{u}_l(x) + \int_S \bar{T}_{jl}(x, y)\, \bar{u}_l(y)\, \mathrm{d}S(y) = \int_S \bar{U}_{jl}(x, y)\, \bar{t}_l(y)\, \mathrm{d}S(y) +$$

$$+ \int_\Omega \bar{U}_{jl}(x, y)\, \bar{X}_l(y)\, \mathrm{d}\Omega(y) \tag{27}$$

pentru $x \in S$, $y \in S \cup \Omega$.

În calculul integralelor din (27) se pleacă de la ecuația (8) a cărei soluție este dată sub forma

$$\bar{u}_i = (\nabla^2 - k^2/c_l^2)\, \bar{G}_i - (1 - c_l^2/c_t^2)\, \bar{G}_{k,ik} \tag{28}$$

dacă vectorul $\bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, k)$ satisface condiția

$$(\nabla^2 - \xi_1^2)(\nabla^2 - \xi_2^2)\, \bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, k) = -[1/\rho c_t^2]\, \bar{Y}_i, \tag{29}$$

unde $\xi_i^2 = k^2/c_i^2$ pentru $i = l, t$.

Dacă se definește $\nabla^2 - \xi_i^2$ pentru transformata Laplace ca fiind operatorul lui D'Alambert de tipul

$$\overline{\square} \equiv \nabla^2 - \xi_i^2,$$

ecuația (29) se poate scrie sub forma

$$\overline{\square}_1\, \overline{\square}_2\, \bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, k) = -[1/\rho c_t^2]\, \bar{Y}_i = \bar{g}_i. \tag{30}$$

Atunci transformata Fourier a unei funcţii tridimensionale de tip forţă poate fi definită prin

$$F\,[\varphi(x, y, z) = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z)\, e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, dx\, dy\, dz, \tag{31}$$

rescrisă

$$F[\nabla^2\varphi] = F[\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} + \varphi_{,zz}] = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, F[\varphi]$$

sau

$$F[\overline{\square}_i\varphi] = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_i^2)\, F[\varphi].$$

Aplicînd transformata Fourier (31) relaţiei (30) se obţine

$$F\,[\bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, k)] = [1/(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_l^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_l^2)]\, F([\bar{g}_i] \tag{32}$$

şi împărţind în domenii simple

$$F[\bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, y)] = (\xi_t^2 - \xi_l^2)^{-1}\,[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_l^2)^{-1} - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_t^2)^{-1}]\, F[\bar{g}_i]. \tag{33}$$

În plus, următoarea identitate poate fi demonstrată,

$$F[K_0(\xi_i, r)] = \theta\pi/(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi_i^2), \tag{34}$$

unde K_0 este funcţia lui Bessel de ordinul zero modificată. Pentru cazul bi sau tridimensional,

$$\theta = 2,\ \gamma = 0,\ E^2; \quad \theta = 4,\ \gamma \neq 0,\ E^3.$$

Introducînd relaţia (34) în (33) se obţine

$$F[\bar{G}_i(\underset{\sim}{x}, k)] = [1/\theta\pi(\xi_t^2 - \xi_l^2)]\,\{F[K_0(\xi_l r)] - F[K_0(\xi_t r)]\}\, F[g_i], \tag{35}$$

iar

$$\bar{g}_i = -\overline{Y}_i/\rho c_t^2 = -1/c_t^2[\bar{f}_i(\underset{\sim}{x}, k)/\rho + k u_i(\underset{\sim}{x}, 0) + \dot{u}_i(\underset{\sim}{x}, 0)]. \tag{36}$$

Dacă condiţiile iniţiale sînt nule,

$$u_i(\underset{\sim}{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}_i(\underset{\sim}{x}, 0) = 0,$$

atunci

$$F[\bar{g}_i] = -F[\bar{f}_i]/\rho c_t^2. \tag{37}$$

Dacă se defineşte densitatea forţei masice pe unitatea de volum prin

$$f_i(y) = \delta(x, y)\, \delta(t)\, F_i(x),$$

expresia (37) se scrie sub forma

$$F[\bar{g}_i] = -\bar{F}_i(x)/\rho c_t^2. \tag{38}$$

În relația (35) r este definit prin $r = r(x, y)$ și $x,\ y \in \Omega$ (fig. 1). Substituind (38) în (33), rezultă

$$\bar{G}_{il}(\underset{\sim}{x}, k) = [\bar{F}_i(x)/\theta\pi\rho c_i^2(\xi_i^2 - \xi_l^2)]\,[K_0(\xi_l r) - K_0(\xi_l r)], \tag{39}$$

unde pentru $\Omega \in E^2$, $K_0(\xi_i r) = K_0(rk/c_i)$ sau dacă $\Omega \in E^3$

$$K_0(\xi_i r) = \mathrm{e}^{-rk/c_i} \cdot r^{-1}.$$

Dacă se substituie (39) în (28), se obține

$$\bar{u}_i(y) = \bar{U}_{ji}(x, y)\,\bar{F}_j(x).$$

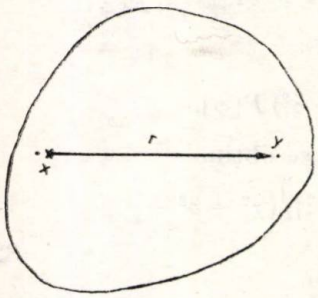


Fig. 1

Similar, pot fi exprimate și tensiunile în raport cu tracțiunile de pe frontieră,

$$\bar{t}_i(y) = \bar{T}_{ji}(x, y)\,\bar{F}_j(x).$$

Presupunînd o forță unitară arbitrară rezultă

$$\bar{F}_j(x) = e_j,$$

iar expresiile deplasărilor și tensiunilor pot fi scrise

$$\bar{Y}_i(y) = \bar{\delta}(x, y)\,e_i,\ \bar{t}_i(y) = \bar{T}_{ji}(x, y)\,e_j,\ \bar{u}_i(y) = \bar{U}_{ji}(x, y)\,e_j,$$

$$\bar{\sigma}_{ik}(y) = \bar{\sigma}_{jik}(x, y)\,e_j.$$

și

$$\bar{U}_{ij}(x, y) = [1/\theta\pi\rho c_i^2]\,(\bar{\psi}\delta_{ij} - \bar{\chi} r_{,i}\, r_{,j}), \tag{40}$$

unde pentru cazul tridimensional

$$\bar{\psi} = A_2[1 + 1/r^2\,\xi_i^2) + (1/r\,\xi_l)] - A_1\,[(1/r^2\,\xi_l^2) + (\xi_l/r\xi_i^2)],$$

$$\bar{\chi} = A_2[1 + (3/r^2\,\xi_i^2) + (3/r\,\xi_l)] - A_1[1 + (3/r^2\,\xi_l^2) + (3/r\,\xi_l)]\,[\xi_l^2/\xi_i^2],$$

$$A_i = e^{-\xi_i r} r^{-1},\quad \xi_i^2 = k^2/c_i^2$$

și pentru cazul bidimensional

$$\bar{\psi} = K_0(\xi_t r) + (1/\xi_t r)\,[K_1(\xi_t r) - (\xi_l/\xi_t)\,K_1(\xi_l r]],$$

$$\bar{\chi} = K_2(\xi_t r) - (\xi_l^2/\xi_t^2)\,K_2(\xi_l r).$$

Tensorul tensiunilor poate fi obținut din (4)

$$\bar{\sigma}_{kij} = (1/\theta\pi\rho c_l^2)\,\{\bar{\psi}_{,r}\,[\lambda\delta_{ij}\,r_{,k} + G(r_{,j}\,\delta_{ik} + r_{,i}\,\delta_{jk})] -$$

$$- \chi_{,r}\,(\lambda\delta_{ij}\,r_{,k} + 2Gr_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k}) - (\bar{\chi}/r)\,[(a-1)\,\lambda\delta_{ij}\,r_{,k} + G(2\delta_{ij}\,r_{,k} +$$

$$+ \delta_{kj}\,r_{,i} + \delta_{ki}\,r_{,j} - 4r_{,i} - 4r_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k})]\} \tag{41}$$

cu

$$\theta = 2,\ a = 2,\ \Omega \in E^2;\ \theta = 4,\ a = 3,\ \Omega \in E^3$$

și $\bar{T}_{ki} = \bar{\sigma}_{kij}\,n_j.$ (42)

Tensorii $\bar{D}_{kij}$ și $\bar{S}_{kij}$ din (26) se definesc acum prin

$$\bar{D}_{kij} = -\bar{\sigma}_{kij}; \quad \bar{S}_{kij} = \bar{\sigma}_{ijkl}\, n_l = [\lambda\delta_{ij}(\delta\sigma_{mkl}/\delta_m) + G(\delta\sigma_{ikl}/\delta_j + \delta\sigma_{jkl}/\delta_i)]n_l. \tag{43}$$

Expresia funcțiilor Bessel modificate de ordinul zero are forma

$$K_0(z) = -ln\frac{z}{2} I_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} [(z/2)^{2k}/(k!)^2]\, \psi(k+1), \tag{44}$$

în care

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(z/2)^{2k}/(k!)^2]; \quad \psi(k+1) = \psi(k) + 1/k;$$

$$\psi(1) = -0{,}577\,215\,664\,90,$$

$$I_1(z) = \mathrm{d}I_0(z)/\mathrm{d}z; \quad 2I'_\nu = I_{\nu-1} + I_{\nu+1}; \quad \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z),$$

$$K_1(z) = -\mathrm{d}K_0(z)/\mathrm{d}z; \quad 2K'_\nu = -(K_{\nu-1} + K_{\nu+1}); \quad \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) = K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z).$$

Cu precizările făcute în relațiile (28—43) se pot obține limitele celor trei integrale din (27),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \bar{T}_{ji}(x, y)\, \bar{u}_i(y)\, \mathrm{d}S(y) = \bar{C}_{ji}(x)\, \bar{u}_i(x), \tag{45a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \bar{U}_{ji}(x, y)\, \bar{t}_i(y)\, \mathrm{d}S(y) = 0, \tag{45b}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\varepsilon} \bar{U}_{ji}(x, y)\, \bar{X}_i(y)\, \mathrm{d}\Omega(y) = 0, \tag{45c}$$

iar tensorii U, T, S, D sînt determinați cu relațiile (40), (42) și (43).

4. METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ ÎN CAZUL ELASTODINAMIC BIDIMENSIONAL

În cazul elementelor bidimensionale delimitate de frontiera S și în condițiile forțelor masice nule, ecuația integrală (27) ia forma

$$\bar{c}\bar{u}(x) + \int_S \bar{T}(x, y)\, \bar{u}(y)\, \mathrm{d}S(y) = \int_S \bar{U}(x, y)\, \bar{t}(y)\, \mathrm{d}S(y), \tag{46}$$

cu x, $y \in S$. Aceasta asigură determinarea tensiunilor și deplasărilor în orice punct de pe frontieră în funcție numai de deplasările și tracțiunile de pe frontiera S a domeniului.

Expresiile deplasărilor și tensiunilor în punctele interne pot fi obținute prin particularizarea relațiilor (25), (26) pentru cazul bidimensional,

$$\bar{u}(x) = -\int_S \bar{T}(x, y)\, \bar{u}(y)\, \mathrm{d}S(y) + \int_S \bar{U}(x, y)\, \bar{t}(y)\, \mathrm{d}S(y), \tag{47}$$

$$\bar{\sigma}(x) = -\int_S \bar{S}(x, y)\, \bar{u}(y)\, \mathrm{d}S(y) + \int_S \bar{D}(x, y)\, \bar{t}(y)\, \mathrm{d}S(y), \tag{48}$$

cu $x \in \Omega$, $y \in S$.

Ecuațiile integrale (46), (47), (48) sînt rezolvate numeric. Pentru rezolvarea acestora, frontiera S și domeniul Ω sînt discretizate în elemente. În cazul problemelor bidimensionale, frontiera poate fi discretizată în elemente unidimensionale prin funcții de interpolare constante, liniare sau parabolice în funcție de geometria domeniului.

Sînt precizate coordonatele carteziene x_i^n pentru fiecare nod, apoi sînt definite ecuațiile parametrice de formă (fig. 2),

$$x_i(\zeta) = N^n(\zeta) x_i^n, \quad \zeta \in [-1, 1]; \quad N^1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1), \quad n = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2,$$

$$N^2(\zeta) = 1 - \zeta^2, \quad N^3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1).$$

Funcțiile de formă în cazul interpolării parabolice sînt prezentate în figura 3. Funcțiile de formă intervin în formularea frontierei domeniului (46) precum și (47), (48) ce reprezintă deplasările și tensiunile interioare în raport cu tensiunile $\bar{t}$ și deplasările $\bar{u}$ de pe frontiera domeniului.

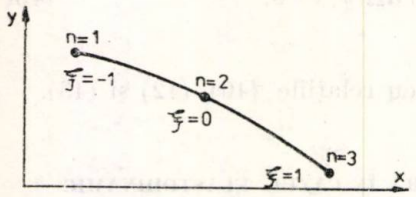


Fig. 2

În cazul elementelor izoparametrice, funcțiile de interpolare geometrice coincid cu variabilele Φ ale unui punct geometric,

$$\Phi(\zeta) = N^n(\zeta)\Phi^n, \quad \Phi = u, t, \tag{49}$$

funcțiile de formă $N^n(\zeta)$ definite prin Φ^n reprezintă valorile discrete ale funcției Φ pentru $n = 1, 2, 3$ ale elementului considerat.

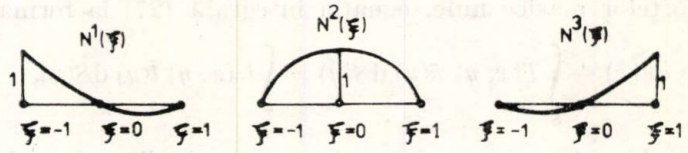


Fig. 3

Pentru a putea rezolva problema prin metoda ecuațiilor integrale, frontiera S se discretizează în elemente de tip parabolic ($n = 3$) astfel încît ecuația integrală (46) poate fi scrisă în forma

$$\bar{c}\bar{u}(x) + \sum_{e=1}^{E} \left(\int_{S_e} \bar{T} N^n \, \mathrm{d}S_e \right) \bar{u}_e = \sum_{e=1}^{E} \left(\int_{S_e} \bar{U} N^n \, \mathrm{d}S_e \right) \bar{t}_e, \tag{50}$$

unde

$$\bar{u}(x) = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}, \quad \bar{u}_e^T = \{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{u}_3, \bar{v}_3\}_e^T,$$
$$\bar{t}_e^T = \{\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{X}_3, \bar{Y}_3\}_e^T,$$

$\bar{u}, \bar{v}$ — deplasările transformate ale nodului în care ecuația integrală este definită;

$\bar{u}_e$ — vectorul deplasărilor transformate în nodurile care definesc elementul e;

$\bar{t}_e$ — vectorul tensiunilor transformate în nodurile care definesc elementul e.

În formă compactă relația (50) poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{c}\bar{u}(x) + \sum_{e=1}^{E} \bar{H}_e \bar{u}_e = \sum_{e=1}^{E} \bar{G}_e \bar{t}_e, \tag{51}$$

în care $\bar{H}_e$ și $\bar{G}_e$ sînt matrice ale funcțiilor de formă

$$B_e = \int_{S_e} \begin{Bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{Bmatrix} \mathrm{d}S_e \tag{52}$$

pentru $\bar{B} = \bar{T}, \bar{U}$.

Scriind ecuația (51) pentru toate punctele de pe frontiera discretizată se obține următorul sistem de ecuații algebrice (similar cu cel obținut în cazul elastostatic);

$$\bar{c}\bar{u} + \hat{H}\bar{u} = \bar{G}\bar{t} \tag{53}$$

sau

$$\bar{H}\bar{u} = \bar{G}\bar{t}.$$

În același mod pot fi scrise relațiile (47), (48),

$$\bar{u}(x) = -\sum_{e=1}^{E} \bar{H}_e \bar{u}_e + \sum_{e=1}^{E} \bar{G}_e \bar{t}_e, \quad \bar{\sigma}(x) = -\sum_{e=1}^{E} \bar{S}_e \bar{u}_e + \sum_{e=1}^{E} \bar{D}_e \bar{t}_e. \tag{54}$$

Deplasările și tensiunile din relația (53) sînt exprimate în raport cu coordonatele globale. În general, în practică este util ca acestea să fie exprimate în raport cu sistemul local de axe. În plus trebuie calculați termenii matricei $\bar{c}$.

În calculul termenilor matricei $\bar{c}$ se pleacă de la relația (45a). În cazul elementelor bidimensionale (fig. 4),

$$\mathrm{d}S_\varepsilon = r \, \mathrm{d}\alpha, \quad r_{,i} = i' = \delta_{i1} \cos\alpha + \delta_{i2} \sin\alpha,$$
$$n_i = r_{,i} = i'. \tag{55}$$

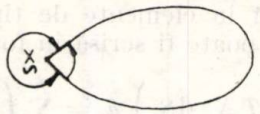


Fig. 4

Folosind expresiile (45a) și (55) se obține

$$\bar{c}_{ji} = (1/2\pi G)\left\langle \lambda \int i'j'\, \mathrm{d}\alpha \lim_{r\to 0} [r\bar{\psi}_{,r} - r\bar{\chi}_{,r} - \bar{\chi}] + \right.$$

$$\left. + G\int i'j'\, \mathrm{d}\alpha \lim_{r\to 0} [r\bar{\psi}_{,r} - 2r\bar{\chi}_{,r} + \bar{\chi}] + G\delta_{ij}\int \mathrm{d}\alpha \lim_{r\to 0} [r\psi_{,r} - \bar{\chi}] \right\rangle =$$

$$= (1/2\pi)\,\langle (c_t^2/c_l^2 - 1)\,[\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2}) +$$

$$+ \sin^2\alpha\,(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}) - \alpha\,\delta_{ij}\rangle, \qquad (56)$$

unde α reprezintă unghiul exterior al frontierei în punctul singular x. În cazuri particulare, pentru frontiere netede ($\alpha = \pi$), $\bar{c}_{ij}^{*} = -0{,}5\ \delta_{ij}$, astfel încît matricea $\bar{c}_{ij}$ care apare în relația (27) este dată de

$$\bar{c}_{ji} = \delta_{ij} + \bar{C}_{ji}. \qquad (57)$$

Derivatele lui $\bar{\psi}$ și $\bar{\chi}$ din (56) în raport cu variabila r sînt

$$\bar{\psi}_{,r} = K_1(\xi_l r)\,[2\xi_l/\xi_t^2 r^2] + K_1(\xi_t r)\,[-\xi_t - 2/\xi_t r^2] + K_0(\xi_e r)\,[\xi_l^2/\xi_t^2 r] +$$

$$+ K_0(\xi_t r)\,[-1/r],$$

$$\bar{\chi}_{,r} = K_1(\xi_l r)\,[\xi_l^3/\xi_t^2 + 4\xi_l/\xi_t^2 r^2] + K_1(\xi_t r)\,[-\xi_t - 4/\xi_t r^2] +$$

$$+ K_0(\xi_t r)\,[-2/r] + K_0(\xi_t r)\,[2\xi_t^2/\xi_t^2 r].$$

După ce a fost stabilit sistemul de ecuații (53) pentru problema de rezolvat este necesar să cunoaștem tensiunile și/sau deplasările într-un număr de noduri pe fontieră (în raport cu condițiile de contur de tip Dirichlet, Neumann sau mixte).

Rearanjînd sistemul de ecuații (53) în raport cu necunoscutele se obține un sistem de tipul

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b}. \qquad (58)$$

Coeficienții ecuației (51) sînt definiți în (52), iar ecuațiile (54) pot fi scrise în funcție de aceștia sub forma

$$\bar{H}_e = \int_{S_e} \bar{T}(\zeta)\,N(\zeta)\,\mathrm{d}S_e, \quad \bar{G}_e = \int_{S_e} \bar{U}(\zeta)\,N(\zeta)\,\mathrm{d}S_e, \quad \bar{S}_e = \int_{S_e} \bar{S}(\zeta)\,N(\zeta)\,\mathrm{d}S_e,$$

$$\bar{D}_e = \int_{S_e} \bar{D}(\zeta)\,N(\zeta)\,\mathrm{d}S_e$$

sau în formă compactă

$$I = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad f = (\bar{T}, \bar{U}, \bar{S}, \bar{D}). \tag{59}$$

Evaluarea numerică a integralelor (59) este realizată prin intermediul formulelor de cvadratură Gauss cu m puncte.

$$I = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\,\omega_i,$$

unde α_i ω_i, sînt coordonate naturale și ponderile în punctele i.

Numărul punctelor m este ales în funcție de precizia dorită și el influențează direct rezultatele sistemului de ecuații (58). Pentru îmbunătățirea preciziei se utilizează tehnica divizării elementelor în subelemente. Folosind tehnica subelementelor, fiecare element de pe frontieră S_e este divizat în subelemente S_{Δ_e} avînd coordonatele naturale (ζ_1, ζ_2). În acest caz, integralele (59) au expresia

$$I = \sum_{se=1}^{SE} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{se=1}^{SE} \int_{\alpha=-1}^{\alpha=1} f[0{,}5\,\{\alpha(\zeta_2 - \zeta_1) + (\zeta_2 + \zeta_1)\}]\,(\zeta_2 - \zeta_1)/2\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \sum_{se=1}^{SE} 0{,}5\,(\zeta_2 - \zeta_1) \sum_{i=1}^{m} f\{0{,}5\,[\alpha(\zeta_2 - \zeta_1) + (\zeta_2 + \zeta_1)]\}\,\omega_i\,, \tag{60}$$

unde SE reprezintă numărul subelementelor în care elementul inițial e a fost subdivizat. Prin această tehnică toate integralele sînt rezolvate numeric, iar eroarea este evaluată în funcție de numărul subelementelor obținut prin divizarea elementelor din discretizarea inițială.

Cînd sistemul de forțe este aplicat armonic se obțin rezultate asemănătoare ca în cazul problemelor statice putîndu-se utiliza metoda directă a elementelor de frontieră. În acest caz deplasările și tracțiunile pot fi definite prin

$$u_i(\underset{\sim}{x}, t) = \bar{u}_i(\underset{\sim}{x})\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad t_i(\underset{\sim}{x}, t) = \bar{t}_i(\underset{\sim}{x})\,\mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{61}$$

Substituind expresiile (61) în (1), (4), (5), rezultă

$$(c_l^2 - c_t^2)\,\bar{u}_{j,ij} + c_t^2\,\bar{u}_{i,jj} + \omega^2\,\bar{u}_i = -\,\bar{F}_i,$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \rho[(c_l^2 - 2c_t^2)\,\bar{u}_{r,r}\,\delta_{ij} + c_t^2[\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})], \quad \bar{t}_i^n = \bar{\sigma}_{ij}\,n, \tag{62}$$

relații ce sînt similare cu ecuațiile (8), (9), (10) în care parametrul de transformare Laplace este definit prin $i\omega$. Soluția ecuației (58) este obținută pentru necunoscutele pe frontiera $(\bar{u}_i, \bar{t}_i)$. Folosindu-se relațiile (54) se pot obține deplasările și tensiunile în punctele interne.

O problemă deosebit de importantă ce poate fi rezolvată prin metoda elementelor de frontieră este cea a impactului.

În cazul elementelor acționate prin impact rezultă o problemă tranzitorie care se poate rezolva în aceeași manieră. Tracțiunile pe frontieră se exprimă prin

$$t_i(\underset{\sim}{x}, t) = t_i(\underset{\sim}{x})\,\delta(t = 0),$$

unde $\delta(t = 0)$ reprezintă funcția delta Dirac. Folosind transformata Laplace se obține

$$\bar{t}_i(\underset{\sim}{x}, k) = \mathcal{L}([t_i(\underset{\sim}{x}, t)] = t_i(\underset{\sim}{x}), \quad k \geqslant 0,$$

problema reducîndu-se la rezolvarea ecuației (58) în raport cu parametrul k.

5. PROGRAMUL DINFRON

În baza teoriei prezentate în capitolele precendente se poate scrie un program pe calculator ce rezolvă prin metoda elementelor de frontieră în regim dinamic cele mai diverse probleme inginerești care lucrează în condițiile stării plane de tensiune sau stării plane de deformație.

Programul poate fi adaptat pe calculatoare de tip FELIX sau CORAL.

Schema logică a programului este dată în figura 5. Prin subrutinele de grafică programul poate trasa geometria structurii discretizate în elemente de frontieră, forma deformată precum și mișcarea unor puncte conținute în domeniu.

6. APLICAȚII

1. Diafragma pătrată acționată de forțe de impact conținute în planul median.

Pe baza teoriei prezentate și cu ajutorul programului DINFRON se prezintă unele rezultate pentru o diafragmă avînd dimensiunile și rezemările arătate în figura 6. Pentru rezolvarea problemei s-au luat următoarele caracteristici mecanice și elastice convenționale : greutatea specifică $\rho = 1$ N/cm^3, coeficientul Poisson $\nu = 0{,}2$ și modulul de elasticitate longitudinal $E = 1$ daN/cm^2. În rezolvarea problemei se tratează două aspecte

— diafragmă acționată de o forță $p_i = 10^3$ daN/cm aplicată sub forma unui impact pe două laturi, celelalte două laturi fiind libere ;

— diafragmă acționată de o forță $p_i = 10^3$ daN/cm aplicată sub formă de impact pe două laturi, laturile opuse fiind simplu rezemate (fig. 6*a*).

Discretizarea este aceeași în ambele cazuri și anume opt elemente izoparametrice cu 16 puncte. În figurile 7*a* și 7*b* sînt date mișcările orizontale ale punctelor de pe marginile libere (3—7 și 11—15) în versiunea transformatei Laplace pentru un parametru k precum și tensiunile σ_{11} în direcția x din punctul A. Pentru valori ale lui k cuprinse între 0,1—0,3 deplasările scad de la 7,96 la 3,43 cm, iar tensiunile de la 946—198 daN/cm^2. Corespunzător proprietăților materialului dat, vitezele calculate ale undelor sînt $c_l = 1{,}0541$ m/s, $c_t = 0{,}6455$ m/s.

Curbele date în figura 7 sînt în concordanță cu rezultatele teoretice pentru sisteme cu un singur grad de liberate dinamică. În figurile 8*a* și 8*b* sînt prezentate mișcarea orizontală și tensiunile σ_{11} din punctul central A în cazul diafragmei simplu rezemate pe laturile paralele cu axa x.

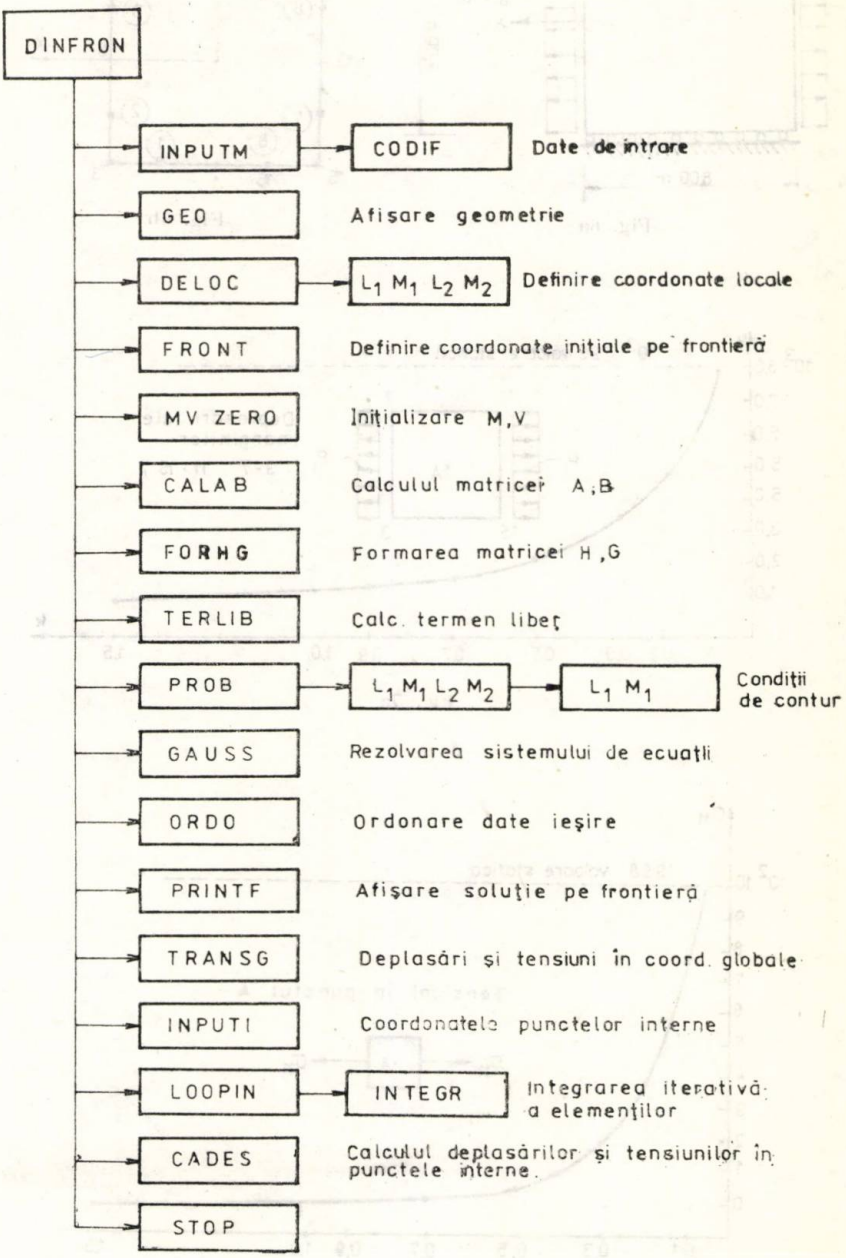


Fig. 5

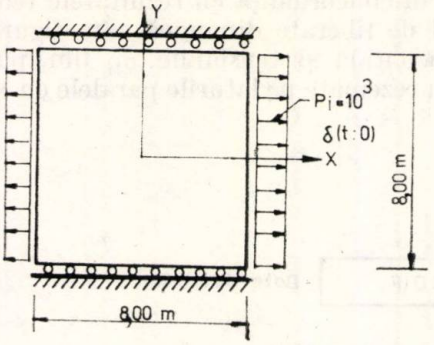


Fig. 6a

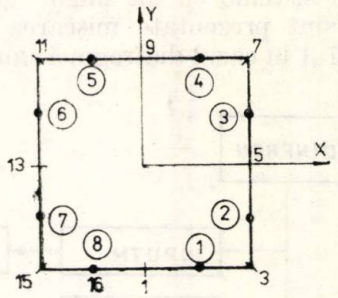


Fig. 6b

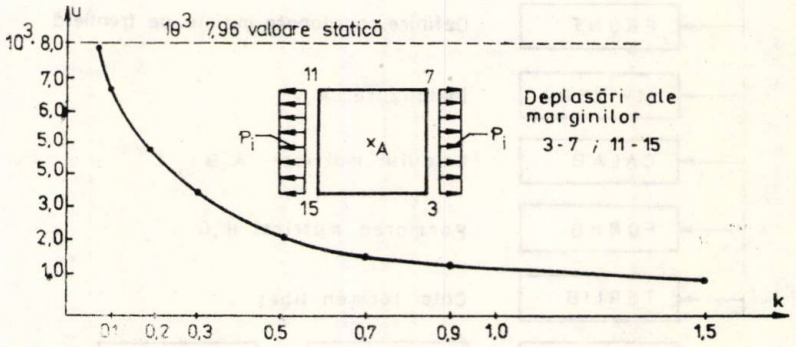


Fig. 7a

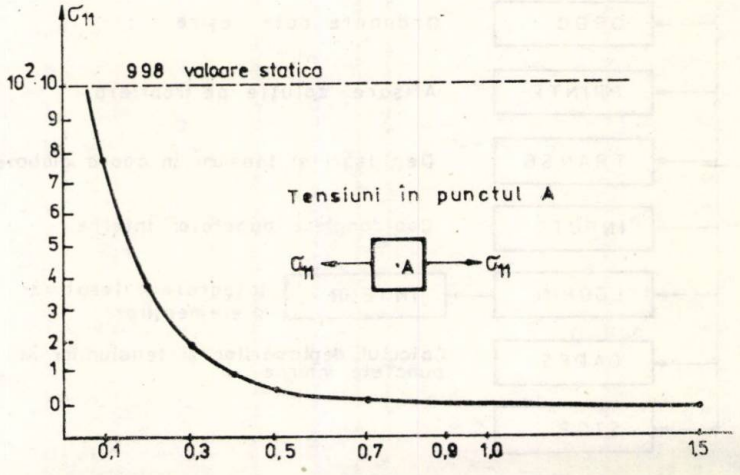


Fig. 7b

Se constată că pentru valori ale parametrului k între 1—1,5 deplasările sînt aproape constante (fig. 8*a*), iar tensiunile în punctul A sînt nule (fig. 8*b*).

2. Bară întinsă crestată simetric

În cazul acestei aplicații se studiază variația tensiunilor în zona crestată pentru o forță de impact $p_i = 1000$ daN/cm. Studiul se poate efectua numai pentru o jumătate de bară deoarece se consideră simetria față de axa x (fig. 9). Caracteristicile mecanice și elastice ale materialului

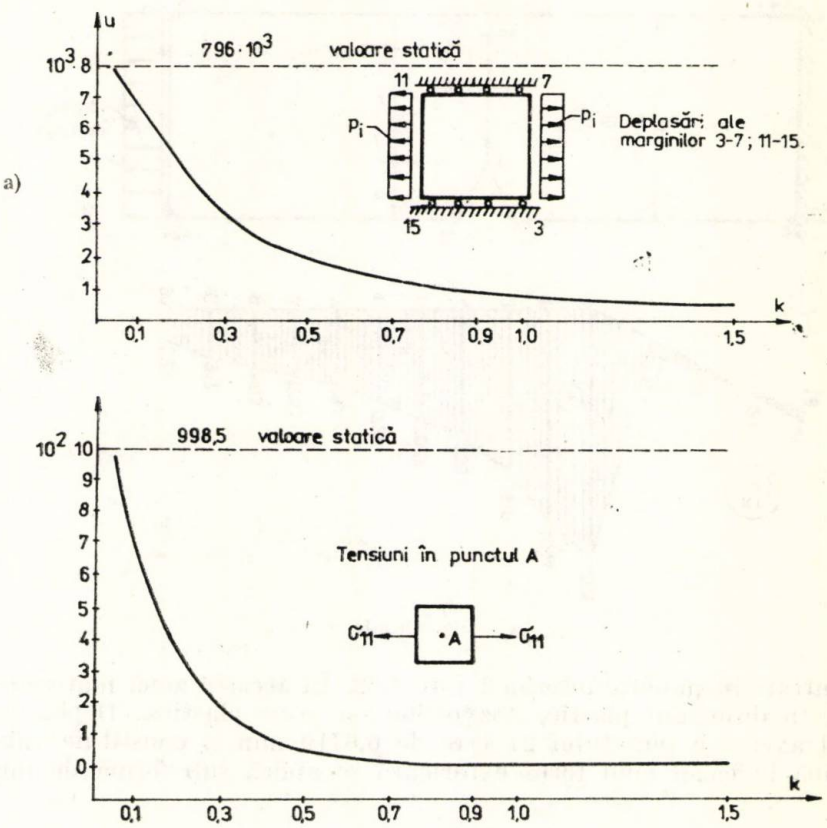


Fig. 8a,b

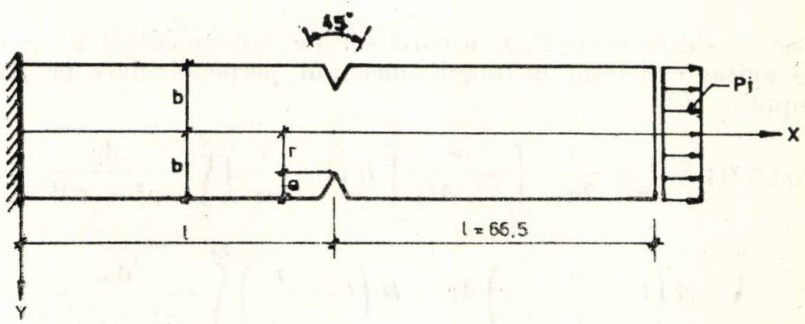


Fig. 9

sînt: modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm^2, greutatea specifică $\rho = 0{,}0785$ N/cm^3, iar coeficientul lui Poisson $\nu = 0{,}36$.

Discretizarea în elemente de frontieră este făcută pentru o semibandă de lățime $b = 15$ cm și este dată în figura 10. Variația tensiunii în zona crestării pentru $p = 1000$ daN/cm (cazul static) sînt arătate în figura 10*b*, unde se constată pentru raportul $a/r = 1/3$ ca factorul de

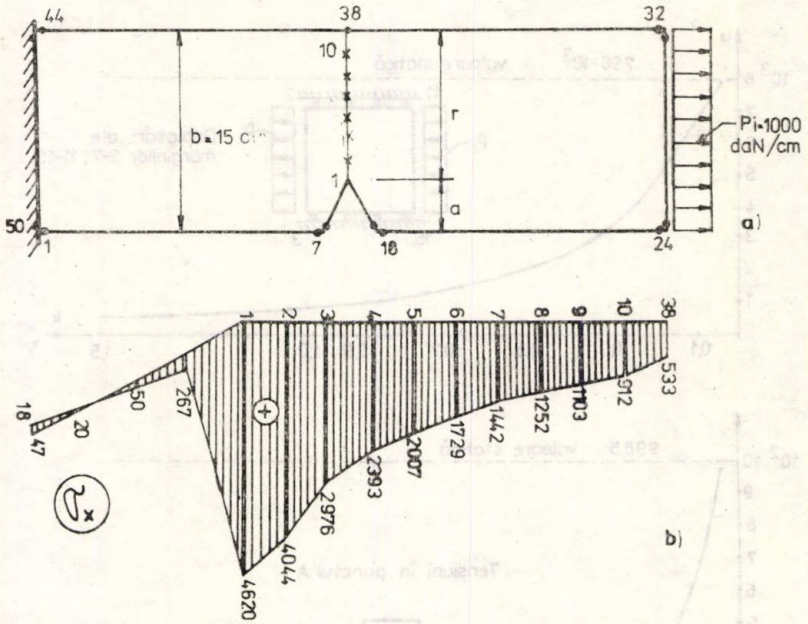


Fig. 10 a,b

concentrare în punctul interior 1 este 4,62. În această zonă materialul lucrează în domeniul plastic, dezvoltîndu-se zona plastică. Deplasarea în sensul axei x a punctului 21 este de 0,6719 mm și constituie valoarea maximă în cazul cînd forța exterioară se aplică sub formă de impact.

7. METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ ÎN DOMENIUL TIMPULUI

Se consideră ecuația (1) a cărei soluție fundamentală în cazul unui impuls unitar distribuit în lungul unei linii perpendiculare pe planul Ω a timpul τ este

$$v_{ij}(x, t;\ \xi|f) = \frac{1}{2\pi\rho}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\left[H\left(t-\frac{r}{c_l}\right)\int_r^{c_l t}\frac{\mathrm{d}\mu}{(\mu^2-r^2)^{1/2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_0^{t-(\mu/c_l)} vf\left(t-\frac{\mu}{c_l}-v\right)\mathrm{d}v - H\left(t-\frac{r}{c_t}\right)\int_r^{c_t t}\frac{\mathrm{d}\mu}{(\mu^2-r^2)^{1/2}}\times\right.\right.$$

$$\times \int_0^{t-(\mu/c_t)} vf\left(t-\frac{\mu}{c_t}-v\right)\mathrm{d}v\Big] + \frac{\delta_{ij}}{c_t^2} H\left(t-\frac{r}{c_t}\right)\int_r^{c_t t} f\left(t-\frac{\mu}{c_t}\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{(\mu^2-r^2)^{1/2}}\Big\}, \tag{63}$$

$$r_i = x_i - \xi_i, \quad r^2 = (x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i), \quad \mu^2 = r^2 + x_3^2, \quad i = 1, 2, \tag{64}$$

unde x_3 este perpendiculara pe planul corpului, iar H este funcția Heaviside. Folosind teorema reciprocității dinamice în cazul forțelor masice nule și condiții de contur stabilite se obține ecuația integrală (25) într-o formă specifică,

$$c(\xi)\, u_j(\xi, t) = \int_S \{v_{ij}\,[x, t;\, \xi \mid t_{(n)i}(x, t)] - \sigma_{(n)ij}[x, t;\, \xi \mid u_i(x, t)]\}\, \mathrm{d}S(x), \tag{65}$$

unde $\sigma_{(n)ij}$ este tensorul tensiunilor obținut din legea lui Hooke.

Pentru frontiere netede $\xi(\xi \in S)$, $c(\xi) = \delta_{ij}/2$ pentru punctul interior $(\xi \in \Omega)$, $c(\xi) = \delta_{ij}$ și pentru punctul exterior $(\xi \notin \Omega)$, $c(\xi) = 0$. În vederea rezolvării ecuației (65) pe cale numerică domeniul Ω este discretizat în mod corespunzător. În același timp se presupune că forța exterioară este aplicată sub forma unor impulsuri de durată Δt (fig. 11). În figura 12 se arată discretizarea unei fundații rezemate pe teren în Q elemente de lungime ΔS_q. Dacă se evaluează deplasările pe frontieră, u_j,

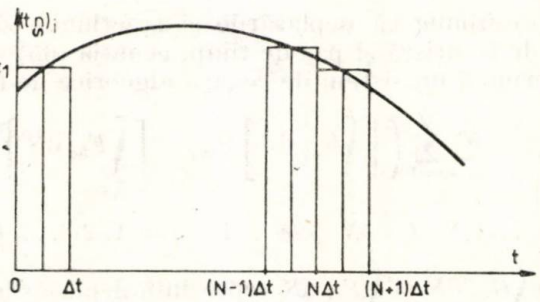


Fig. 11

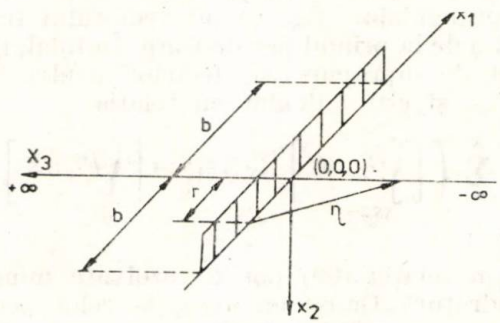


Fig. 12

pentru un impuls al forțelor exterioare $t_{(n)i}$ răspunsul total poate fi obținut prin suprapunerea efectelor pentru cele N impulsuri Δt. În acest caz este necesară doar determinarea soluției $v_{ij}(x, t;\ \xi\,|t_{(n)i})$ numai pentru pasul de timp $(t_{(1)i},\ n = 1)$. Folosind discretizarea în spațiu și timp, ecuația (63) se scrie sub forma simplificată

$$v_{ij}(x, t;\ \xi\,|t_{(n)j}) = \frac{1}{2\pi\rho}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\left[H\left(t-\frac{r}{c_l}\right)\int_r^{c_l t}\frac{F_l\,\mathrm{d}\mu}{(\mu^2-r^2)^{1/2}} - \right.\right.$$

$$- H\left(t-\frac{r}{c_t}\right)\int_r^{c_t t}\frac{F_t\,\mathrm{d}\mu}{(\mu^2-r^2)^{1/2}}\Bigg] t_1(n) +$$

$$\left. + \frac{\delta_{ij}}{c_t^2}\, H\left(t-\frac{r}{c_t}\right)\int_r^{c_t t}\frac{t_{(\mu)i}\left(\mu_1 t-\dfrac{\mu}{c_t}\right)}{(\mu^2-r^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\mu\right\}, \tag{66}$$

unde

$$F_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{\mu}{c_k}\right)^2, & 0 < t-\dfrac{\mu}{c_k} < \Delta t, \\ \left(t-\dfrac{\mu}{c_k}\right)\Delta t - \dfrac{1}{2}(\Delta t)^2, & \Delta t < t-\dfrac{\mu}{c_k}, \end{cases} \quad k = l, t. \tag{67}$$

Dacă se presupune că deplasările și tracțiunile sînt constante pe fiecare element de frontieră și pas de timp, ecuația (65) scrisă pentru cele p segmente determină un sistem de ecuații algebrice de forma

$$\frac{1}{2}u_p^{N_p} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\left(\left[\int_{\Delta S} G_{nq}\,\mathrm{d}S\right]\{t_{lq}\} - \left[\int_{\Delta S} F_{nq}\,\mathrm{d}S\right]\{u_{lq}\}\right), \tag{68}$$

unde $n = 1, 2, \ldots, N,\ l = N + n - 1,\ q = 1, 2, \ldots, Q.$

Integralele $\int_{\Delta S} G_{nq}\,\mathrm{d}S$ și $\int_{\Delta S} F_{nq}\,\mathrm{d}S$ reprezintă deplasările, respectiv tracțiunile în centrul unui element p în pasul de timp n determinate de un impuls unitar dreptunghiular (fig. 13) al vectorului tracțiune ce acționează pe elementul q de la primul pas de timp. În final, răspunsul total al sistemului este dat de suprapunerea efectelor pentru $(N - m)\,\Delta t$ pași arătați în figura 13. și este calculat cu relația

$$\frac{1}{2}u^{N_p} = \sum_{q=1}^{Q}\sum_{n=m}^{N}\left(\left[\int_{\Delta S} G_{lq}\,\mathrm{d}S\right]\{t_{N-l+1}\} - \left[\int_{\Delta S} F_{lq}\,\mathrm{d}S\right]\{u_{N-l+1}\}\right), \tag{69}$$

unde $l = n - m + 1.$

Integralele din relația (69) pot fi rezolvate numeric cu ajutorul formulelor de cvadratură Gauss cu excepția celor pentru care $p = q$, care se calculează pe cale analitică. Dacă se consideră o fundație continuă

sub un zid acționată de o forță variabilă, se discretizează terenul de sub talpa fundației precum și zonele adiacente acesteia (fig. 1.4). Pentru cele Q segmente de frontieră (fig. 14) se scrie ecuația (69), care exprimă matriceal devine

$$\frac{1}{2}\{u_N\} = \left[\int_S G_m \, dS\right]\{t_N\} + \{PG_N\} - \{PF_N\}, \tag{70}$$

unde $\{u_N\}$ și $\{t_N\}$ sînt vectorii deplasărilor și tracțiunilor la timpul $N \cdot \Delta t$ produse de un impuls la timpul $m\Delta t$. Componentele vectorilor $\{u_N\}$ și $\{PF_N\}$ sînt

$$\{PG_N\} = \delta_{Nm} \sum_{n=m+1}^{N} \left[\int_S G_l \, dS\right]\{t_{N-l+1}\},$$

$$\{PF_N\} = \delta_{Nm} \sum_{n=m+1}^{N} \left[\int_S F_l \, dS\right]\{u_{N-l+1}\}, \tag{71}$$

în care δ_{Nm} este delta Kronecker, iar diferența $\{PG_N\} - \{PF_N\}$ poate fi interpretată ca o influență a tuturor pașilor de timp anteriori ($n < N$)

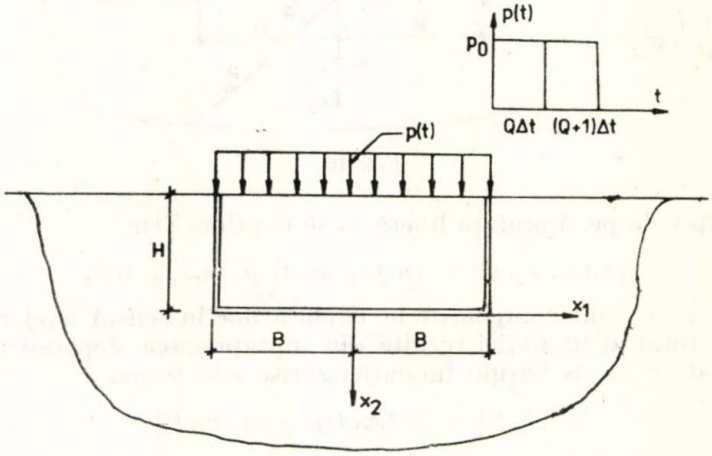


Fig. 13

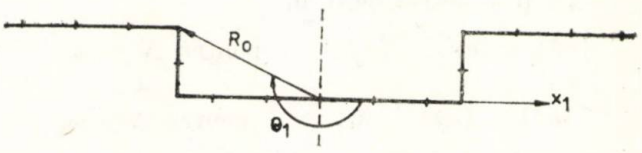


Fig. 14

în răspunsul fundației. Compatibilitatea deplasărilor la interfața sol-fundație este dată de

$$\{u_c^N\} = [S]\{D_N\}, \tag{72}$$

unde $\{u_c^N\}$ este vectorul deplasărilor în centrul elementelor de frontieră pe zona fundației în direcția axelor x_1 și x_2, iar $\{D_N\}$ este vectorul răspunsului amplitudinilor verticale $\{\Delta_2^N\}$, orizontale $\{\Delta_1^N\}$ și rotaționale $\{\Phi_3^N\}$. Elementele matricei $[S]$ depind de mărimile geometrice R_0 și θ_1 (fig. 14). Între forțele $\{P_m\}$ sub forma de impuls la timpul m și tensiunile de contact există relația

$$\{P_m\} = [K]\{t_m\}, \tag{73}$$

unde termenii matricei $[K]$ sînt funcție de mărimile geometrice ale fundației. Ecuațiile (70), (72) și (73) formează un sistem de ecuații algebrice liniare în care drept necunoscute sînt considerate deplasările și tracțiunile din zona de contact a fundației cu terenul. În continuare se consideră o fundație rigidă rezemată pe terenul elastic omogen și izotrop acționat de forțe seismice, de jos, în sus, după o direcție θ (fig. 15).

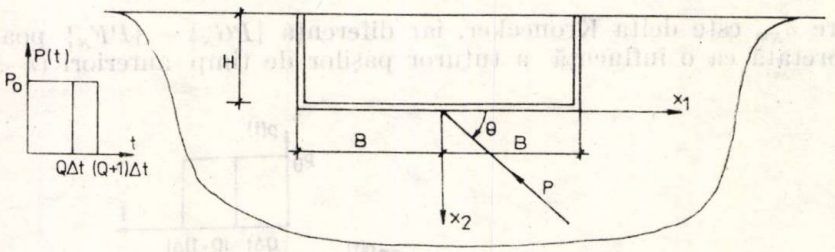


Fig. 15

Deplasările pe suprafața liberă u_l se exprimă prin

$$\{u_1(x_1, x_2, t)\} = [u_{l_1}(x_1, x_2, t)\ u_{l_2}(x_1, x_2, t)]^T, \tag{74}$$

în care u_{l_1} și u_{l_2} sînt componentele deplasărilor în sensul axelor x_1 și x_2. Răspunsul total al fundației rezultă din suprapunerea deplasărilor libere și cele produse de oscilațiile fundației scrise sub forma

$$\{u(x_1, t)\} = \{u_l(x_1, t)\} + \{u_f(x_1, t)\}. \tag{75}$$

Dacă linia de contact a fundației continue este discretizată în elemente egale, răspunsul fundației continuie pentru N pași de timp acționată de impulsuri dreptunghiulare este dat de deplasările libere ce apar la pasul de timp m descompuse în

$$\begin{aligned} \{u^N\} &= \{u_l^N\} + \{u_f^N\} \qquad \text{pentru } N = m, \\ \{u^N\} &= \{u_f^N\} = \{0\} \qquad \text{pentru } N > m, \end{aligned} \tag{76}$$

unde vectorii $\{u^N\}$, $\{u_l^N\}$ și $\{u_f^N\}$ reprezintă deplasările totale de pe suprafața liberă și din mijlocul fiecărui segment. Deplasările $\{u_f^N\}$ din mijlocul

segmentelor rezultate din discretizarea frontierei sînt date în raport cu tracțiunile totale prin

$$\frac{1}{2}\{u_f^N\} = \left[\int_S G_N \, dS\right]\{t_N\}. \tag{77}$$

Ținînd seama de ecuațiile de mai sus, vectorul forțelor exterioare dat în ecuația (73) poate fi exprimat cu ajutorul cîmpului deplasărilor $\{u_f^N\}$ de pe frontiera discretizată. Expresiile obținute, combinate cu relațiile (72) și (76), formează un sistem de ecuații algebrice care poate fi rezolvat în raport cu vectorul deplasărilor. Cu cele prezentate mai sus, răspunsul unei fundații în interacțiune cu semiplanul elastic este dat de ecuația

$$\{D_N\} = \left([K]\left[\int_S G_N \, dS\right]^{-1}[S]\right)^{-1}[K]\left[\int_S G_N \, dS\right]^{-1}\{u_f^N\}. \tag{78}$$

EXEMPLU NUMERIC

Se consideră fundația continuă sub un perete avînd o lățime de 153 cm și rezemată pe un teren de fundare cu modulul de elasticitate longitudinal $E = 1{,}264 \cdot 10^6$ daN/cm², densitatea $\rho = 5{,}418$ daN/s².cm³ și coeficientul Poisson $\nu = 0{,}33$. Fundația este solicitată de o forță sub formă de impuls și moment cu valorile

$$P_{10} = P_{20} = 2\,678 \text{ daN/cm}, \qquad M_{30} = 816{,}4 \text{ daN} \cdot \text{cm},$$

iar durata de timp $\Delta t = 16 \cdot 10^{-6}$.

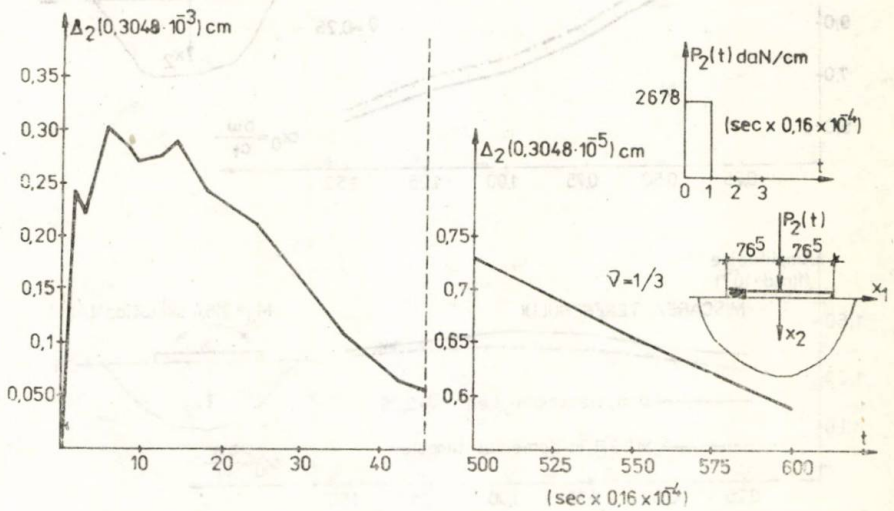


Fig. 16

Pentru a putea rezolva problema, talpa fundației a fost discretizată în opt elemente egale, iar pentru creșterea preciziei, fiecare element este divizat în cinci subelemente. În acest caz componentele tensorului $\left[\int_{\Delta S} G_{nq}\, dS\right]$

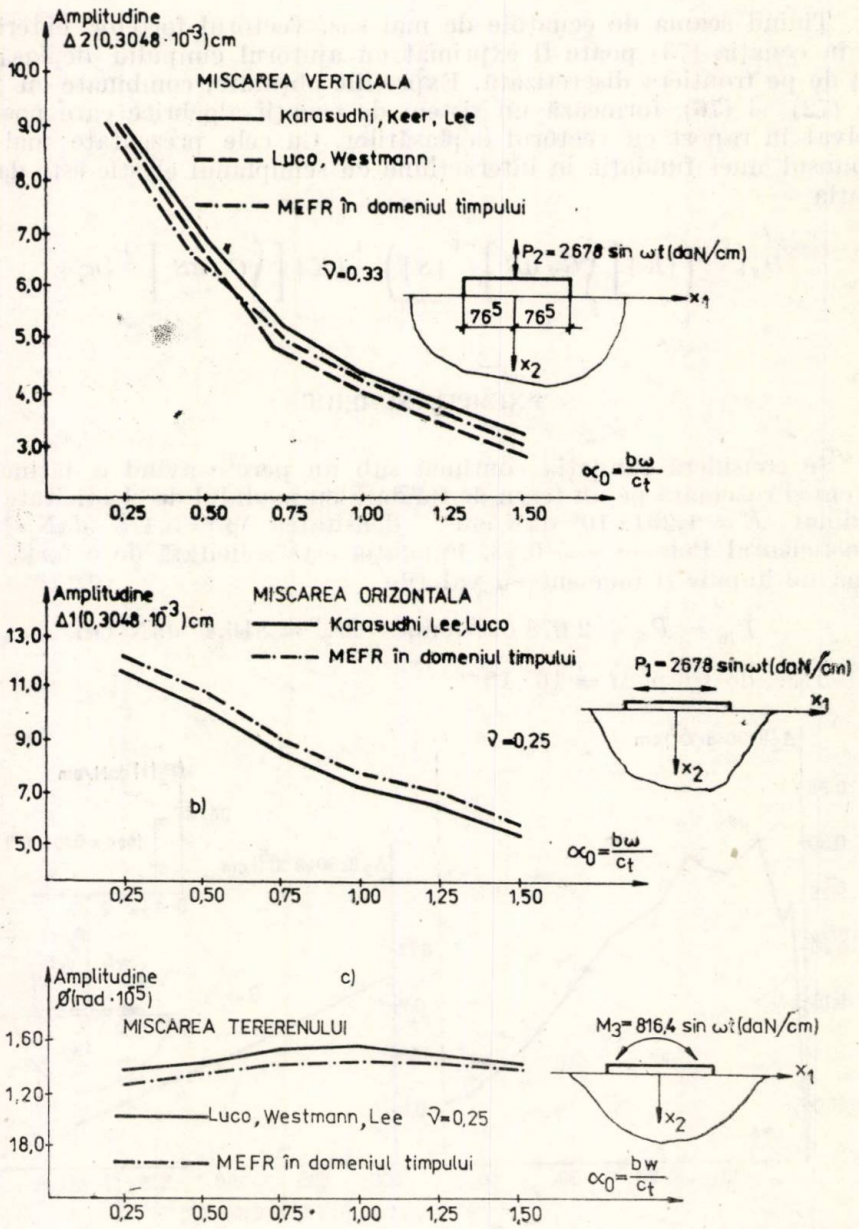


Fig. 17

din ecuaţia (68) sînt obţinute prin însumarea tuturor valorilor corespunzătoare fiecărui subelement. Mişcarea verticală a terenului este dată în funcţie de timpul măsurat în fracţiuni de secunde (fig. 16).

Studiul preciziei metodei elementelor de frontieră într-o analiză dinamică în domeniul timpului s-a făcut plecînd de la răspunsul fundaţiei acţionată de forţe armonice de forma

$$P_1(t) = P_{10} \sin \omega t, \quad P_2(t) = P_{20} \sin \omega t, \quad M_3(t) = M_{30} \sin \omega t.$$

Pentru studiul preciziei rezultatelor obţinute prin metoda elementelor de frontieră acestea au fost comparate cu rezultatele obţinute de Karasudhi, Keer şi Lee [15] precum şi de Luco şi Westerman [16]. În figura 17 sînt date rezultatele comparative. În figura 18 sînt prezentate variaţiile staţionare şi tranzitorii ale deplasărilor unei fundaţii excitate armonic.

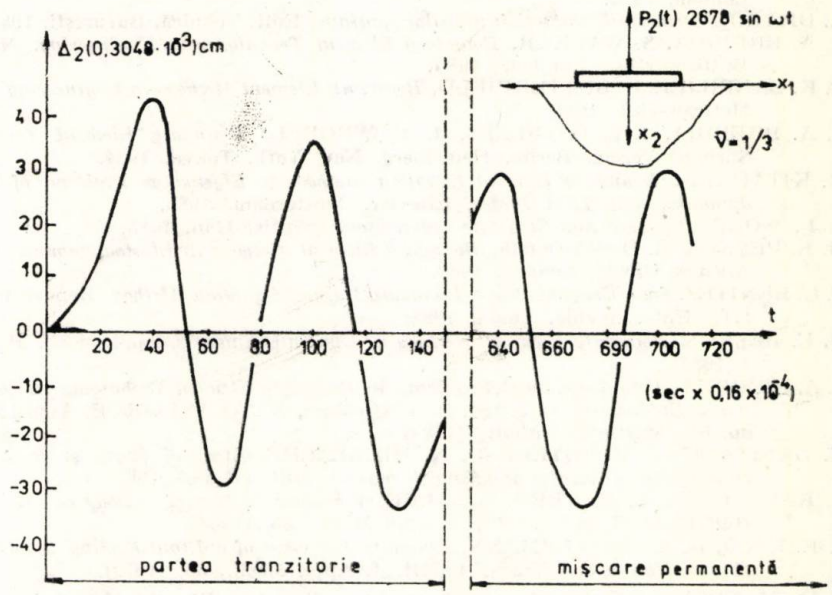


Fig. 18

8. CONCLUZII

Metoda elementelor de frontieră cere discretizarea numai a frontierei spre deosebire de metoda diferenţelor finite şi a elementelor finite care cer şi discretizarea domeniului. Metoda elementelor de frontieră ia în consideraţie automat condiţia de radiaţie eliminînd o discretizare extinsă sau contururi nereflectante ca în celelalte metode de domeniu.

Se pot rezolva probleme în regim dinamic numai pentru materiale elastice sau vîscoelastice în domeniul micilor deplasări.

În domeniul timpului, răspunsul se obține în mod direct și natural nenecesitînd utilizarea transformatelor și inversele acestora. Se pot considera forțe de tip impact, cu acțiune variabilă sau seismică fără dificultate, detectîndu-se fenomenele tranzitorii.

Metoda elementelor de frontieră se poate cupla cu metoda elementelor finite pentru analiza dinamică a problemelor neliniare de material sau geometrice.

Primită în redacție la 20 aprilie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. A. E. H. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, ediția 4-a, Dover, New-York, 1944.
2. J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1973.
3. A. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Elastodynamics*, vol. **II**, *Linear Theory*, Academic Press, London, 1975.
4. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. Tehnică, București, 1983.
5. C. A. BREBBIA, S. WALKER, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newness-Butterworths, London, 1980.
6. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1981.
7. C. A. BREBBIA, J. C. F. TELLES, L. C. WROBEL, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
8. M. KITAHARA, *Boundary Integral Equation Methods to Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, Elsevier, Amsterdam, 1985.
9. J. P. WOLF, *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall, 1985.
10. D. E. BESKOS, G. D. MANOLIS, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, George Allen & Unwin, London, 1987.
11. F. G. BENITEZ, *Some Considerations Boundary Integral Equation Method*, Report 1468/83, ETS Univ. Sevilla, Spain, 1983.
12. D. E. BESKOS, *Boundary Element Methods in Dynamic Analysis*, Appl. Mech. Rev., **40**, 1 (1987).
13. C. A. BREBBIA, Time Dependent Problems, în *Boundary Element Techniques in Computer Aided Engineering* (sub. red. C. A. Brebbia), NATO ASI serie E, Appl. Science no. 84, Martinus Nijhoff, (1984).
14. M. GAFIȚANU, V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini*, Edit. Tehnică, 1987.
15. P. KARASUDHI, L. M. KEER, S. L. LEE, *Vibratory Motion of a Body on an Elastic Half-Plane*, Trans. ASME, J. Appl Mech., **35**, (1968).
16. J. E. LUCO, R. A. WESTERMANN, *Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half-Space*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **39**, (1972).
17. G. D. MANOLIS, *A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches, Problems in Elastodynamics*, Int. J. Num. Methods Eng., **19** (1983).
18. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Three Dimensional State Stress and Strain of the Reinforced Concrete Short Cantilevers Dynamically Charged by FEM and BEM*, Int. Conf. Concrete Structures, Split., Jugoslavia, 1984.
19. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Mixed Approach FEM, BEM, Experimental for Coupled Structures in Static, Dynamic Conditions*, 2nd Int. Conf. Computational Method and Experimental Measurements, New-York-Southampton, 1984.
20. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, C. POPOVICI, *Analiza dinamică prin metoda elementelor de frontieră*, Simpozionul Național : *Aplicații ale calculatoarelor în proiectarea și cercetarea în construcții*, Sibiu, vol. **1**, 1984, p. 235—239.
21. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Static and Dynamic Analysis by FEM and BEM of the Reinforced Concrete Hybrid Structures*, IKM, Weimar, vol. **4**, 1984, p. 21—25
22. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Tensiuni și deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor de frontieră. I. Analiza statică*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985).

23. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *CAD for Steel Walls in Dynamic Nonlinear with FEM*, Bul. Inst. Polit. Iași, **XXII**, 1 — 4, s.V (1986).

24. V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Modal Fourier Analysis in Boundary Element Method and Hybrid Structures*, Bul. Inst. Polit. Iași, **XXXIII**, 1—4, s.V, (1987).

25. V. P. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *BEM and Photoelastometrics in Stress Concentration Study of the Bending and Stretching Strip*, Al IV-lea Smpozion National de Tensometrie, Brașov, 1986.

26. C. C. PSYRAKOS, D. E. BESKOS, *Dynamic Response of Rigid Strip Foundations by a Time Domain Boundary Element Method*, Int. J. Num. Meth. Eng., **23** (1986).

27. K. TAKAKUDA, *On Integral Equation Methods for Elastic Boundary Value Problem*, 3rd Report : *Direct Methods for Dynamic Problems*, Bull. JSME, **27**, 226 (1984).

STRATEGII PRIVIND REALIZAREA PROGRAMELOR PENTRU ANALIZA NELINIARĂ A STRUCTURILOR

de C. PACOSTE și D. DUBINĂ

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

În lucrare se face o analiză de sinteză a stadiului actual al cercetărilor privind elaborarea modelelor de calcul neliniar geometric al structurilor și a procedurilor numerice caracteristice acestui tip de analiză. Se discută modelele euleriene și lagrangeene și procedurile numerice pentru analiza neliniară în domeniile pre- și postcritic, cu referiri atît la cazul punctelor critice de limitare a echilibrului, cît și a celor de bifurcare a echilibrului. Ca bază a concluziilor din finalul lucrării, se prezintă rezultatele obținute de autori cu ajutorul programului ANGES. Programul implementează ca model de calcul formularea lagrangeană actualizată, exemplele test prezentate fiind de referință în literatura de specialitate.

1. INTRODUCERE

Modelele de calcul utilizate în proiectarea structurilor sînt în general modele liniare. În realitate, în natură nu există comportare liniară perfectă. Dacă utilizarea unui model de calcul liniar are avantaje practice concretizate prin relații de calcul simple, la îndemîna inginerului proiectant, este însă tot atît de adevărat că ele ar trebui să fie justificate, ca nivel de aproximare și domeniu de valabilitate, prin analize neliniare, conforme cu realitatea.

Dezvoltarea mijloacelor de calcul electronic face în prezent posibil studiul fenomenelor cu caracter neliniar. Procesul de constituire a modelului de calcul precum și ierarhizarea nivelelor de aproximare, inerente acestui proces, sînt sintetizate, în Γ principiu, în figura 1 [1].

Primul nivel de aproximare este ocupat de sistemul însuși, definit ca o reprezentare umană conștientă a naturii înconjurătoare și, prin urmare, în mod sigur afectat de subiectivismul și calitatea percepției observatorului.

Cel de al doilea nivel de aproximare cuprinde, pe de o parte, un set de ipoteze simplificatoare — comportarea materialului, acțiuni, alcătuirea structurii — vizînd definirea „modelului fizic" al structurii reale, iar pe de altă parte, elaborarea, pe baza „modelului fizic" constituit, a unui „model matematic", la rîndul său afectat de un alt set de ipoteze simplificatoare.

Un „model fizic" căruia i se atașează un „model matematic" pentru a-i descrie comportarea formează „modelul de calcul" al structurii.

În final, pe cel de al treilea nivel de aproximare se situează „metoda de calcul". În funcție de raportul dintre metoda de calcul și modelul de calcul, aceasta este considerată „exactă" sau „aproximativă" după cum modelul de calcul este „conservat" sau „aproximat".

---

*) Lucrarea a fost prezentată în ședința Comisiei de stabilitate a structurilor metalice, care a avut loc la Facultatea de Construcții din Timișoara în data de 15.04.1988.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 5, 1988, P. 457—477

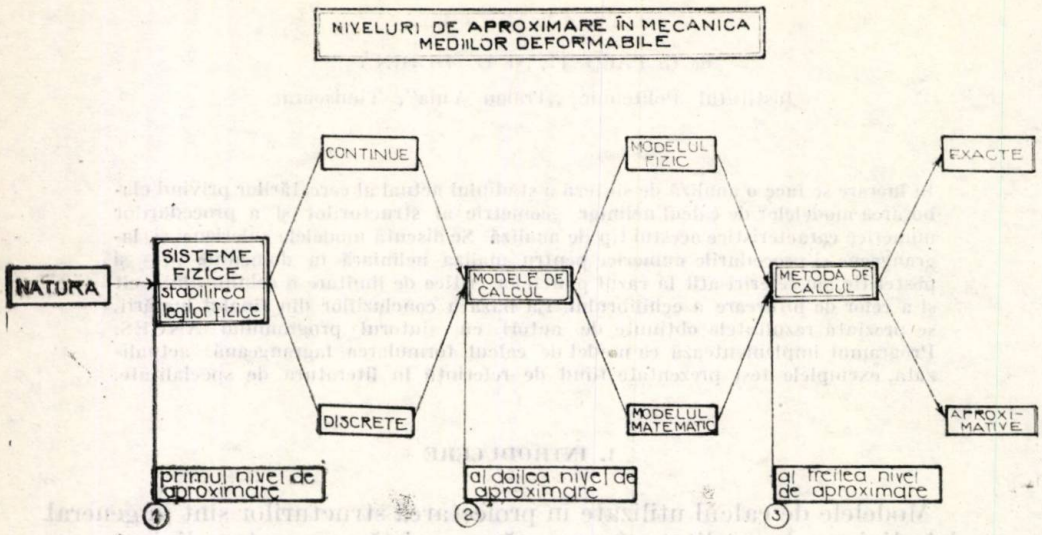


Fig. 1 — Ordonarea nivelelor de aproximare în mecanica mediilor deformabile.

Cercetările ultimilor ani, privind evaluarea cît mai riguroasă a răspunsului structural la acţiuni statice sau dinamice au evidenţiat preocuparea pentru ridicarea calităţii ipotezelor admise în modelarea fizică şi matematică, prin luarea în considerare a influenţei fenomenelor cu caracter neliniar. Au fost astfel definite „modele de calcul neliniar" geometric sau fizic în funcţie de caracterul neliniarităţii avute în vedere.

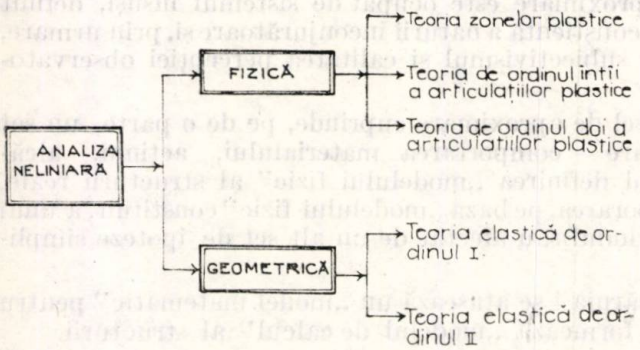


Fig. 2 — Teorii de calcul în analiza neliniară a structurilor

Dezvoltarea acestor „modele de calcul neliniar" s-a concretizat în elaborarea unui mare număr de programe de analiză neliniară dintre care citãm : ABAQUS, ADINA, ANSYS, CASTEM, FINELG, MARC, NASTRAN, NONSAP. Utilizarea intensivă a programelor menţionate urmăreşte în principal două scopuri :

a. să permită determinarea încărcării critice de pierdere a stabilităţii sau a curbei de comportare a structurii, pînă la rupere, oferind astfel o evaluare corectă a gradului de securitate.

b. să permită efectuarea unor analize privind influența anumitor parametri (imperfecțiuni structurale sau geometrice, legi constitutive etc) asupra comportării structurii.

Restrîngînd discuția asupra structurilor alcătuite din bare drepte, în figura 2 sînt prezentate principalele modalități de abordare a analizei neliniare, așa cum reies din raportul prezentat de prof. Vogel la cel de al doilea Colocviu regional de stabilitate a structurilor metalice [2].

Obiectul prezentului studiu îl constituie analiza elastică de ordinul al doilea a structurilor alcătuite din bare drepte.

2. MODELE DE CALCUL NELINIAR ELASTIC

În dezvoltarea acestui capitol, discuția va fi restrînsă la cazul modelelor de calcul cu elemente finite intensiv folosite în cazul problemelor de analiză neliniară din mecanica structurilor.

Două strategii distincte stau la baza formulării acestei categorii de modele de calcul neliniar : modelul Euler și modelul Lagrange.

În cazul modelului Euler, mișcarea instantanee a punctelor materiale este definită prin intermediul cîmpului vitezelor, exprimate ca funcții de coordonate spațiale. Considerînd un set de puncte oarecare din spațiu — definind nodurile unei rețele de elemente finite —, se va studia mișcarea particulelor care în deplasarea lor trec prin aceste puncte. Această formulare este, în special, folosită în cazul problemelor de curgere vîscoasă sau vîscoelasticitate. Formularea euleriană poate fi extinsă prin integrarea cîmpului vitezelor pe parcursul mișcării punctelor materiale pentru a se obține deplasările și deformațiile corespunzătoare.

În cadrul modelului Lagrange, mișcarea este caracterizată prin intermediul cîmpului deplasărilor considerate ca necunoscute. Folosirea formulării lagrangeene cu precădere în rezolvarea problemelor teoriei elasticității implică, în contextul studiului de față, o prezentare mai detaliată.

2.1. FORMULAREA LAGRANGE ÎN ANALIZA GEOMETRIC NELINIARĂ CU ELEMENTE FINITE

Formularea lagrangeană a modelelor de analiză geometric neliniară cu elemente finite cunoaște două variante principale : formularea lagrangeană actualizată și formularea lagrangeană totală.

2.1.1 Formularea lagrangeană actualizată

În cadrul formulării lagrangeene actualizate toate variabilele care definesc modelul de calcul (deplasări, deformații, eforturi, volum, suprafață), precum și operațiile de diferențiere și integrare, sînt raportate la configurația de echilibru curentă la momentul t, γ^t.

Se definesc două sisteme de coordonate : un sistem de coordonate global și un sistem de coordonate local atașat fiecărui element care se

deplasează împreună cu elementul fără însă a se deforma împreună cu el. În figura 3 se prezintă sistemele de coordonate globale (x_1 O x_2) şi locale ($\bar{x}_1$ O $\bar{x}_2$) la momentele 0, t, t, $+ \Delta t$ pentru un element de bară plană.

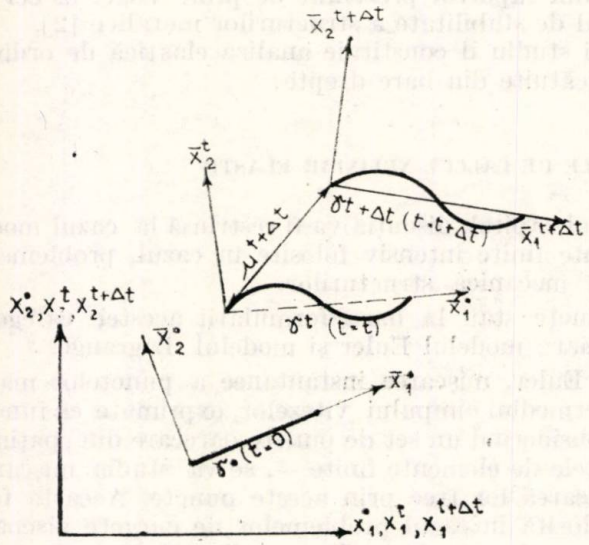


Fig. 3 — Sisteme de axe locale şi globale.

Folosind principiul lucrului mecanic virtual pentru exprimarea ecuaţiei de echilibru la momentul $t + \Delta t$ se obţine [3], [4]:

$$\int_V S_{ij}^{t+\Delta t}\, \delta E_{ij}^{t+\Delta t}\, \mathrm{d}V^t = L_{ext}^{t+\Delta t}, \tag{1}$$

în care

$S_{ij}^{t+\Delta t}$ reprezintă componentele tensorului tensiunilor Piola-Kirchoff la momentul $t + \Delta t$;

$E_{ij}^{t+\Delta t}$ — componentele tensorului deformaţiilor Green-Lagrange;

$L_{ext}^{t+\Delta t}$ — lucrul mecanic virtual al forţelor exterioare la momentul $t + \Delta t$.

Observaţii: Toate mărimile care intervin în ecuaţia (1), aşa cum a fost enunţat anterior, sînt raportate la configuraţia de echilibru la momentul t, γ^t.

Elementele tensorilor tensiunilor şi de formaţiilor $S_{ij}^{t+\Delta t}$ şi $E_{ij}^{t+\Delta t}$ pot fi, în continuare, descompuse după cum urmează:

$$S_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{*t} + \sigma_{ij}^t, \tag{2}$$

$$E_{ij}^{t+\Delta t} = \varepsilon_{ij}^t, \tag{3}$$

în care

σ_{ij}^{*t} reprezintă componentele tensorului tensiunilor al lui Cauchy la momentul t;

σ_{ij}^{t} — componentele tensorului tensiunilor incrementale Piola-Kirchoff de ordinul al doilea;

ε_{ij}^{t} — componentele tensorului deformațiilor incrementale Green-Lagrange.

Deoarece evaluarea componentelor tensorului Green-Lagrange folosește deplasările de la configurația γ^t la configurația $\gamma^{t+\Delta t}$, din ecuația (3) obținem

$$\delta(E_{ij}^{t+\Delta t}) = \delta(\varepsilon_{ij}^{t}). \tag{4}$$

Elementele tensorului Green-Lagrange ε_{ij}^{t} pot fi scrise în funcție de componentele liniare și neliniare astfel:

$$\varepsilon_{ij}^{t} = e_{ij}^{t} + \eta_{ij}^{t}, \tag{5}$$

în care

$$e_{ij}^{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i^t}\right), \tag{6}$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_i^t} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_j^t}, \tag{7}$$

$$u_i = u_i^{t+\Delta t} - u_i^t, \tag{8}$$

unde

u_i reprezintă incrementele deplasărilor de la configurația γ^t la $\gamma^{t+\Delta t}$;

$u_i^{t+\Delta t}$ și u_i^t — componentele deplasărilor totale după axele locale de coordonate în configurația γ^t.

Legea constitutivă este dată de relația

$$\sigma_{ij}^{t} = C_{ijkl}^{t}\varepsilon_{kl}^{t}, \tag{9}$$

în care

C_{ijkl}^{t} sînt componentele tensorului incremental de ordinul al patrulea al coeficienților elastici.

Ecuația (1) este neliniară în incrementele deplasărilor u_i, rezolvarea ei implicînd pentru început o liniarizare ce poate fi obținută prin folosirea aproximației

$$\delta\varepsilon_{ij}^{t} = \delta e_{ij}^{t}. \tag{10}$$

Introducînd relaţiile (2), (3), (5), (9), (10) în ecuaţia (1), obţinem

$$\int_{V^t} C^t_{ijkl} e^t_{kl} \delta e^t_{ij} \mathrm{d}V^t + \int_{V^t} \sigma^{*t}_{ij} \delta \eta^t_{ij} \mathrm{d}V^t = L_{ext} - \int_{V^t} \sigma^{*t}_{ij} \delta e^t_{ij} \mathrm{d}V^t. \tag{11}$$

Ecuaţia (11) reprezintă ecuaţia de echilibru incremental, corespunzătoare unui element în stare deformată, liniarizată în incrementele deplasărilor u_i raportate la sistemul local de coordonate.

Folosirea funcţiilor de interpolare pentru deplasările u_i conduce la obţinerea prin derivare a matricelor de transformare deplasări-deformaţii şi, în final, la o exprimare matriceală a ecuaţiei (11).

2.1.2. Formularea lagrangeană totală

Deosebirea dintre formularea lagrangeană totală şi cea actualizată se referă la sistemul de referinţă faţă de care sînt definite variabilele şi operaţiile de diferenţiere şi integrare. Astfel, în cadrul formulării langrangeene totale, raportarea variabilelor se face la poziţia iniţială nedeformată de echilibru, γ^0 la timpul $t = 0$. Considerînd această diferenţă, scrierea ecuaţiei de echilibru prin intermediul principiului lucrului mecanic virtual rămîne formal identică cu ecuaţia (1):

$$\int_{V^0} S^{t+\Delta t}_{ij} \delta E^{t+\Delta t}_{ext} \mathrm{d}V^0 = L^{t+\Delta t}_{ext}, \tag{12}$$

în care toate mărimile au aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul precedent, fiind însă raportate la configuraţia γ^0 $(t = 0)$.

Elementele tensorilor tensiunilor şi deformaţiilor incrementale se descompun în mod analog după cum urmează:

$$S^{t+\Delta t}_{ij} = S^t_{ij} + \sigma^t_{ij}, \tag{13}$$

$$E^{t+\Delta t}_{ij} = E^t_{ij} + \varepsilon^t_{ij}, \tag{14}$$

unde mărimile implicate au aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul anterior, dar sînt raportate la configuraţia γ^0.

Analiza relaţiei (13) evidenţiază, spre deosebire de cazul precedent, folosirea unitară a unui acelaşi tip de tensor Piola-Kirchoff de ordinul al doilea.

Analizînd ecuaţia (14), se obţine imediat relaţia

$$\delta E^{t+\Delta t}_{ij} = \delta\, \varepsilon^t_{ij}. \tag{15}$$

Descompunînd componentele tensorului tensiunilor incrementale ε^t_{ij} în componentele lor liniare şi neliniare, se poate scrie o relaţie analoagă relaţiei (5) şi anume:

$$\varepsilon^t_{ij} = e^t_{ij} + \eta^t_{ij}, \tag{16}$$

în care

$$e_{ij}^t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i^0} + \frac{\partial u_k^t}{\partial \bar{x}_i^0}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_j^0} + \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_i^0}\cdot\frac{\partial u_k^t}{\partial \bar{x}_j^0}\right), \tag{17}$$

iar

$$\eta_{ij}^t = \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_i^0}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_j^0}, \tag{18}$$

u_i — incrementele deplasărilor de la configurația γ^t la $\gamma^{t+\Delta t}$ raportat la configurația γ^0;

u_i^t — componentele deplasărilor totale după axele locale de coordonate din configurația γ^0.

Legea constitutivă are expresia:

$$\sigma_{ij}^t = C_{ijkl}^t \varepsilon_{kl}. \tag{19}$$

Ecuația (12) este neliniară în incrementele deplasărilor u_i liniarizarea ei realizîndu-se printr-o aproximație de forma:

$$\delta \varepsilon_{ij}^t = \delta e_{ij}^t. \tag{20}$$

Înlocuind în ecuația (12) relațiile (13), (14), (16), (19) și (20) obținem

$$\int_{V^0} C_{ijkl}^t e_{kl}^t \delta e_{ij}^t \mathrm{d}V^0 + \int_{V^0} S_{ij}\delta\eta_{ij}\mathrm{d}V^0 = L_{ext}^{t+\Delta t} - \int_{V^0} S_{ij}^t \delta e_{ij}^t \mathrm{d}V^0. \tag{21}$$

Ecuația (21) reprezintă pentru cazul formulării lagrangeene totale ecuația de echilibru incremental corespunzătoare unui element în stare deformată, liniarizată în incrementele deplasărilor u_i raportate la sistemul local de coordonate.

Analizînd comparativ cele două modalități de formulare, trebuie arătat de la bun început că exprimările matriceale ce derivă din ecuațiile incrementale de echilibru (21) și (11) sînt identice în cadrul ambelor formulări ale modelului lagrangean.

Din punct de vedere al utilizării practice a formulării lagrangeene totală și actualizată, cîteva considerații se impun a fi făcute:

a) Expresia deformațiilor incrementale liniare (6) folosită în formularea lagrangeană actualizată nu include efectul deplasărilor inițiale așa cum se întîmplă în relația (17).

b) Deoarece în formularea lagrangeană actualizată raportarea deformațiilor se face la configurația curentă valorile acestora sînt mici. Din acest motiv de multe ori în problemele de interes practic se poate neglija componenta neliniară a matricei de rigiditate tangentă. Acest lucru nu mai este valabil în cazul formulării lagrangeene totale. În plus, deoarece în formularea langrangeană totală rotirile au valori finite, acestea nu mai pot fi tratate ca mărimi vectoriale în spațiu.

c) În formularea lagrangeană actualizată matricea orientării barei trebuie actualizată în fiecare etapă de iterație spre deosebire de cazul formulării lagrangeene totale în care aceasta se menține constantă.

d) În cazul formulării actualizate incrementele eforturilor unitare, de tip Piola-Kirchoff trebuie transformate în componente de tip Cauchy. Din acest punct de vedere formularea totală are avantajul unei exprimări unitare care simplifică calculul eforturilor.

Opțiunea între cele două formulări mai sus menționate apare în lumina observațiilor făcute ca dependentă de tipul problemei de analizat. În ceea ce privește analiza elastică de ordinul al doilea a structurilor din bare, opinia autorilor este că formularea lagrangeană actualizată este mai eficientă.

În încheierea acestui paragraf se face mențiunea că în lucrarea [24] de Ville de Goyet introduce „Descrierea corotațională totală" ca variantă a formulării lagrangeene totale. Analizînd însă ipotezele care stau la baza formulării lui de Ville de Goyet, se poate afirma că ea nu diferă semnificativ de formularea lagrangeeană actualizată.

2.2. EFECTUL IMPERFECȚIUNILOR GEOMETRICE

Elaborarea unui model de calcul neliniar cît mai apropiat de structura reală presupune, pe lîngă adoptarea unei anume modalități de formulare, luarea în considerare a imperfecțiunilor geometrice (abateri de la rectilinitate, rotiri de noduri, deplanări) ce apar inevitabil în situația reală.

Considerarea imperfecțiunilor în cadrul modelului de calcul implică probleme sub două aspecte și anume:

a) modelarea efectului imperfecțiunilor considerate;

b) adoptarea unui sens pentru imperfecțiunile avute în vedere. Acest al doilea aspect devine deosebit de dificil în cazul structurilor complexe.

În ceea ce privește modelarea efectului imperfecțiunilor, o soluție eficientă din punct de vedere practic și suficient de corectă este aceea de a modela efectul lor prin încărcări echivalente. Această manieră de tratare oferă incontestabile avantaje în elaborarea efectivă a programelor de calcul.

Adoptarea unui anume sens pentru imperfecțiunile geometrice considerate este, datorită caracterului lor aleator, o sarcină deosebit de dificilă.

O modalitate ce duce la un calcul acoperitor este aceea de a considera imperfecțiunile geometrice afine cu prima formă proprie de pierdere a stabilității structurii. Această manieră presupune însă cunoașterea acestei forme proprii și deci implică complicații deosebite în realizarea unui program de analiză neliniară. Pe de altă parte, caracterul aleator al imperfecțiunilor face ca, în situația reală, acestea să nu fie totdeauna afine cu prima formă proprie de pierdere a stabilității.

O altă modalitate pleacă de la observația că deformata oricărei structuri poate fi exprimată în funcție de formele proprii de pierdere a stabilității. Se poate alege astfel sensul imperfecțiunilor geometrice afin cu

deformata rezultată dintr-un calcul elastic de ordinul I. De remarcat că pentru un nivel de neliniaritate suficient de ridicat—nivel la care efectul imperfecțiunilor devine important — datorită amplificării ponderei componentei date de prima formă proprie de pierdere a stabilității în deformata structurii, această alegere tinde către prima variantă. În plus, această manieră de alegere are avantajul simplității în formulare dat fiind faptul că prima etapă de rezolvare a oricărei analize de ordinul al II-lea este un calcul liniar elastic.

2.3. MODELAREA CONEXIUNILOR

O altă modalitate de îmbunătățire a modelelor de calcul neliniar pentru structuri din bare este de a lua în considerare ipoteza conexiunilor elasice dintre bare.

O tratare exhaustivă a acestei ipoteze și a implicațiilor ei în cadrul modelului de calcul poate fi găsită în [5].

3. PROCEDURI NUMERICE ÎN CALCULUL NELINIAR

Analiza procedurilor numerice dezvoltată în acest paragraf va fi diferențiată în funcție de stabilitatea și convergența soluțiilor în jurul punctelor critice. Discuția va fi localizată pentru început la cazul punctelor limită urmînd a fi extinsă ulterior și la cazul punctelor de bifurcare.

3.1. PROCEDURI NUMERICE PENTRU ANALIZA ÎN DOMENIUL PRECRITIC

Pentru determinarea răspunsului structurii în domeniul precritic o varietate întreagă de metode sînt prezentate de literatura de specialitate. Algoritmul general pentru construirea unor asemenea proceduri este prezentat în figura 4.

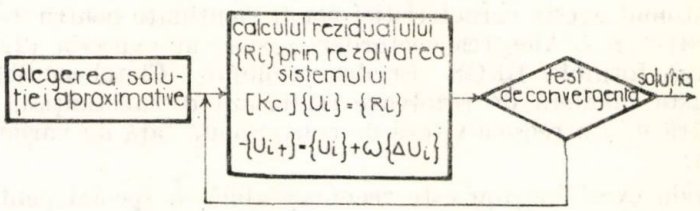


Fig. 4 — Algoritm general de rezolvare a problemelor neliniare

Dintre acestea se amintesc : metoda incrementală, metoda punctului mediu Runge-Kuta, metoda substituției, metoda Newton-Raphson, metoda incrementală cu iterații de echilibru Newton-Raphson.

Cea mai frecvent utilizată dintre metodele menționate este metoda incrementală cu iterații de echilibru Newton-Raphson în fiecare treaptă

de încărcare. Inconvenientul metodei constă în repetatele reactualizări și inversări ale matricei sistemului, $[K]$, fapt care duce la un mare consum de timp. Din acest motiv eforturile cercetătorilor au fost, în ultima vreme, îndreptate către optimizarea algoritmului Newton-Raphson.

O primă propunere în această direcție (metoda Newton-Raphson modificată) a fost aceea de a nu mai reactualiza matricea $[K]$ în fiecare etapă de iterație. Se poate demonstra [6] că, în general, procesul de calcul rămîne convergent.

Economia de timp realizată este semnificativă dar viteza de convergență a metodei scade și, uneori, aceasta diverge (fig. 5).

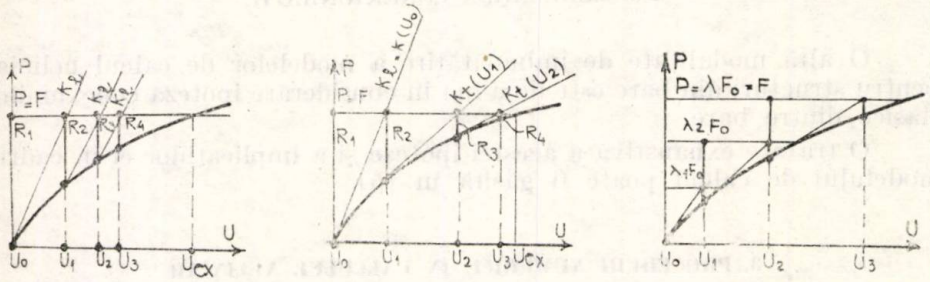


Fig. 5 — Imagini ale algoritmilor Newton-Raphsom: a) $N-R$ modificată; b) $N-R$ standard; c) Metoda incrementală cu o iterație N—R.

O altă propunere (metoda cvasi-Newton), deosebit de interesantă caută un compromis între cele două variante anterior menționate. Matricea sistemului este reactualizată în fiecare etapă de iterație, dar această actualizare este făcută pe cît de simplu se poate, folosindu-se expresia matricei $[K]$ din etapa precedentă [6]. Noua matrice este căutată de forma:

$$[K_i]^{-1} = ([I] + \{\omega_i\} \cdot \{v_i\}^T)\,[K_{i-1}]^{-1}([I] + \{v_i\}\,\{\omega_i\}^T) \qquad (22)$$

în care $[I]$ este matricea unitate, iar $\{\omega_i\}$ și $\{v_i\}$ sînt doi vectori care definesc direcția după care este actualizată (de iterare) matricea $[K]$ în pasul i.

Dacă matricea inițială $[K_0]$ este simetrică și pozitiv definită, atunci în mod automat aceste caracteristici vor fi menținute pentru toate matricele succesive $[K_i]$. Alegerea vectorilor ω_i și v_i în expresia (22) poate fi făcută după formula BFGS (Bryden, Goldfars, Fletcher, Shanno [6]).

Această manieră de rezolvare realizează o substanțială economie de timp fără însă a reduce viteza de convergență față de varianta clasică a metodei.

Metoda cvasi-Newton este recomandabilă în special pentru problemele de analiză statică neliniar-geometrică [7]. De asemenea, metoda s-a dovedit compatibilă cu tehnica frontală [8].

3.2. PROCEDURI NUMERICE DE ANALIZĂ ÎN DOMENIUL POSTCRITIC

Determinarea răspunsului structural în jurul punctelor critice de limitare a echilibrului prezintă serioase dificultăți legate de convergența algoritmilor utilizați. După cum este binecunoscut metodele iterative de

tip Newton-Raphson (clasic, modificat, cvasi-Newton) nu furnizează soluții convergente în vecinătatea acestor puncte.

În ultimii ani au fost propuse o serie întreagă de tehnici capabile să depășească acest inconvenient (fig. 6).

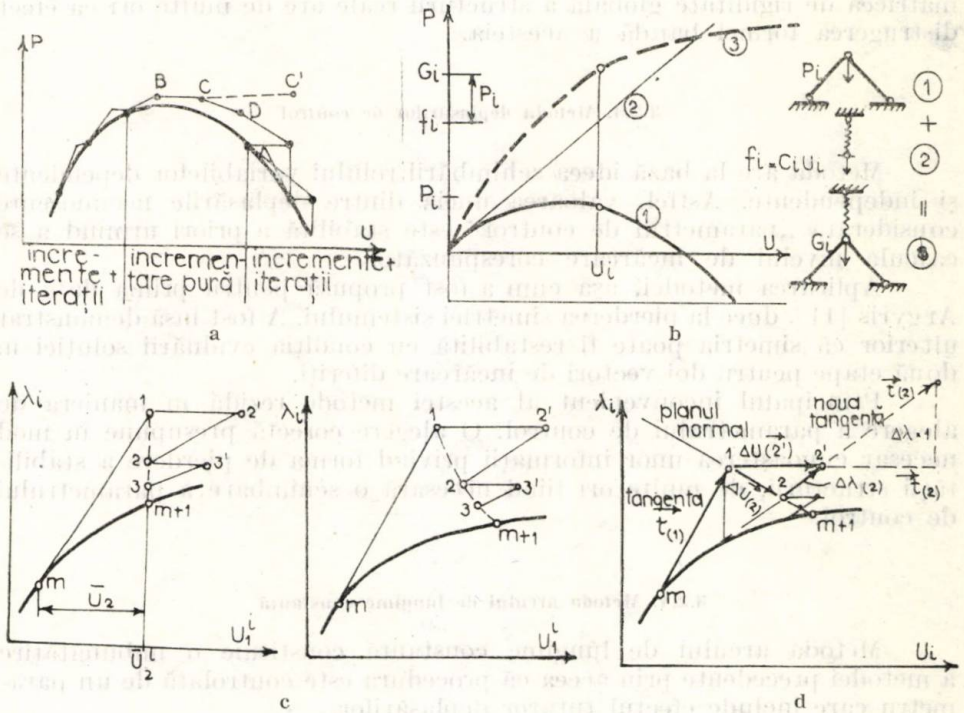


Fig. 6 — Metode incremental iterative postcritice : a) Metoda suprimării iteraților de echilibru ; b) Metoda resoartelor artificiale ; c) Metoda deplasărilor de control ; d) Metoda arcului de lungime constantă.

3.2.1. Metoda suprimării iteraților de echilibru

Această metodă propusă de Bergan [9] presupune suprimarea iteraților de echilibru și folosirea unei tehnici de incrementare pură în jurul punctului critic. Procesul este controlat prin așa-numitul parametru curent al rigidității care ia valori apropiate de zero în vecinătatea punctului critic. Dacă în rezolvarea sistemului sînt detectate elemente negative pe diagonala principală atunci se aplică incremente de încărcare de sens contrar celor inițiale.

Metoda este extrem de simplu de implementat în programe de calcul neliniar dar are inconvenientul că necesită incremente de încărcare foarte mici pentru a evita devieri pronunțate de la curba de echilibru.

3.2.2. Metoda resoartelor artificiale

Ideea acestei proceduri propusă de Wright și Gaylord [10] este de a menține matricea structurii pozitiv definită prin adăugarea la elementele

ei a unor rigidități, corespunzătoare unor resoarte artificiale introduse în nodurile structurii. Definirea acestor rigidități artificiale se face prin încercări și deci comportă un grad de dificultate ridicat. În plus pentru structurile cu multe grade de libertate cuplarea rigidităților artificiale la matricea de rigiditate globală a structurii reale are de multe ori ca efect distrugerea formei bandă a acesteia.

3.2.3. Metoda deplasărilor de control

Metoda are la bază ideea schimbării rolului variabilelor dependente și independente. Astfel, valoarea uneia dintre deplasările necunoscute considerată „parametrul de control" este stabilită a priori urmînd a se calcula nivelul de încărcare corespunzător.

Aplicarea metodei, așa cum a fost propusă pentru prima dată de Argyris [11], duce la pierderea simetriei sistemului. A fost însă demonstrat ulterior că simetria poate fi restabilită cu condiția evaluării soluției în două etape pentru doi vectori de încărcare diferiți.

Principalul inconvenient al acestei metode rezidă în maniera de alegere a parametrului de control. O alegere corectă presupune în mod necesar cunoașterea unor informații privind forma de pierdere a stabilității structurii, de multe ori fiind necesară o schimbare a parametrului de control.

3.2.4. Metoda arcului de lungime constantă

Metoda arcului de lungime constantă constituie o îmbunătățire a metodei precedente prin aceea că procedura este controlată de un parametru care include efectul tuturor deplasărilor.

Fie ecuația incrementală

$$[K_t]\{\Delta U\} = \Delta\lambda\{P\}, \tag{23}$$

în care

$[K_t]$ este matricea de rigiditate globală tangentă a structurii;
$\{\Delta U\}$ — vectorul incrementelor deplasărilor nodale;
$\{P\}$ — vectorul încărcărilor incrementale;
$\Delta\lambda$ — parametrul incremental al încărcărilor.

Mărimea pasului de incrementare $\Delta\lambda$ este limitată de ecuația de condiție [12],

$$\{\Delta U_{(1)}\}^T\{\Delta U_{(1)}\} + \Delta\lambda_{(1)}^2 = \mathrm{d}S^2, \tag{24}$$

în care indicele inferior marchează etapa de iterație corespunzătoare.

Expresia (24) reprezintă lungimea generalizată a arcului corespunzătoare tangentei la curbă în punctul n.

Iterațiile de echilibru se desfășoară în continuare într-un plan perpendicular pe tangenta la curbă în punctul n. Din punct de vedere matematic acest proces se exprimă prin ecuația de condiție:

$$\vec{t}_{(1)} \cdot \Delta\vec{U}_{(j)} = 0 \tag{25}$$

sau, în formă matriceală,

$$\{\Delta U_{(1)}\}^T\{\Delta U_{(j)}\} + \Delta\lambda_{(1)}\Delta\lambda_{(j)} = 0. \tag{26}$$

Înlocuirea ecuațiilor de condiție în expresia matricei de rigiditate distruge simetria și forma bandă a acesteia. Dificultatea poate fi însă depășită [13] dacă soluția este pusă sub forma:

$$\{\Delta U_{(j)}\} = \Delta\lambda_{(j)}\{\Delta U^{(1)}_{(j)}\} + \{\Delta U^{(2)}_{(j)}\}, \tag{27}$$

în care $\{\Delta U^{(1)}_{(j)}\}$ reprezintă soluția ecuației (23) în care $\Delta\lambda = 1$, iar $\{\Delta U^{(2)}_{(j)}\}$ reprezintă soluția aceleiași ecuații în care termenul liber este dat de forțele neechilibrate $\{R_j\}$.

Înlocuind apoi ecuația (27) în ecuația de condiție (26) se obține

$$\Delta\lambda_{(j)} = -\frac{\{\Delta U_{(1)}\}\{\Delta U^{(2)}_{(j)}\}}{\{\Delta U^T_{(1)}\}\{\Delta U^{(1)}_{(j)}\} + \Delta\lambda_{(1)}}. \tag{28}$$

Din analiza ecuației (28) se poate observa că folosirea unor valori mari pentru $\Delta\lambda_{(1)}$ tinde să apropie metoda de metodele incremental-iterative clasice, iar folosirea unor valori mici apropie metoda de cea a deplasărilor de control.

Schematic, etapele unui algoritm ce utilizează metoda arcului de lungime constantă s-ar prezenta astfel [12]:

a. În primul pas de încărcare se definește „lungimea arcului dS" prin alegerea unui vector al încărcărilor incrementale de referință $\{P\}$.

b. Pe parcursul oricărui pas de incrementare:

1. Se rezolvă sistemul (23) pentru $\Delta\lambda = 1$ și se determină $\{\Delta U_{(1)}\}$. Din ecuația (26) se determină apoi $\Delta\lambda_{(1)}$.

2. Se verifică termenii diagonali ai matricei sistemului. Ori de cîte ori este întîlnit un termen negativ se inițiază descărcarea structurii.

3. Se reactualizează matricea de rigiditate tangentă și se rezolvă sistemul pentru $\Delta\lambda = 1$ și pentru vectorul forțelor neechilibrate $\{R_i\}$. Se determină apoi $\Delta\lambda_{(j)}$ din ecuația (28) și $\{\Delta U_{(j)}\}$ din ecuația (27).

4. Se actualizează cîmpul forțelor și al deplasărilor.

5. Se testează convergența soluției. Dacă soluția este convergentă se trece la pasul de incrementare următor, iar dacă nu, procesul este reluat de la punctul 3.

Un aspect deosebit de important al algoritmului prezentat este alegerea unui anumit criteriu pentru aprecierea convergenței soluției obținute. În literatura de specialitate sînt prezentate în acest sens trei propuneri:

a) Cook [14] propune aprecierea convergenței soluției după o relație de forma:

$$\frac{|\Delta U|}{|U|} \leqslant \varepsilon \tag{29}$$

în care

ΔU este deplasarea incrementală maximă (rotire sau translație);

U — deplasarea totală corespunzătoare;

ε — factor de precizie cuprins între 10^{-6} și 10^{-2}.

b) Bathe [4], [7] propune o relație de convergență în norma euclidiană a vectorilor $\{\Delta U\}$ și $\{U\}$ de forma:

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leqslant \varepsilon \tag{30}$$

în care pentru ε se recomandă valoarea 10^{-3}.

c) Al treilea criteriu de convergență ce poate fi utilizat se referă la norma euclidiană a forțelor neechilibrate.

$$\frac{\|R_i\|}{\|R_{i-1}\|} \leqslant \varepsilon \tag{31}$$

în care pentru ε se poate adopta valoarea 0.1.

3.3. PROBLEMA PUNCTELOR DE BIFURCARE

În cazul structurilor la care pierderea stabilității se produce prin limitarea echilibrului, procedurile numerice prezentate anterior oferă curba de comportare atît în domeniul precritic, cît și în cel postcritic, atîta timp cît aceasta este suficient de netedă. În cazul instabilității prin bifurcarea echilibrului, procedurile menționate nu permit determinarea directă a curbelor de echilibru secundare. Aceste dificultăți pot fi însă depășite, fie de o manieră indirectă prin considerarea unor imperfecțiuni

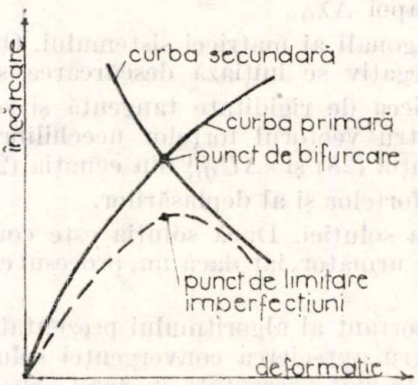


Fig. 7 — Punct de bifurcare simplă.

geometrice inițiale (fig. 7), fie prin introducerea în cîmpul deplasărilor corespunzătoare încărcării critice a unor componente ale formei proprii de pierdere a stabilității asociate.

Plecînd de la posibilitatea exprimării curbelor secundare de echilibru sub o formă parametrică [15], pentru rezolvarea problemelor de

bifurcare literatura de specialitate mai propune și alte tehnici avînd la bază diferite combinații între metoda perturbării și tehnicile incremental iterative folosite curent. Tehnicile menționate furnizează rezultate suficient de corecte în cazul punctelor de bifurcare simple [16]. În cazul bifurcărilor cuplate însă, rezultatele sînt destul de nesigure, experimentările numerice fiind încă într-o fază incipientă.

4. MATRICEA DE RIGIDITATE ÎN CALCULUL NELINIAR GEOMETRIC

Deducerea matricelor de rigiditate elementare pentru analiza neliniar geometrică a structurilor alcătuite din bare va fi dezvoltată în cadrul formulării lagrangeene actualizate.

Deplasările elementelor se descompun în deplasările de corp rigid și deplasări din deformații. Deplasările de corp rigid sînt luate în considerare prin intermediul matricei de rotație a barei astfel încît va fi necesară numai deducerea matricei de rigiditate elementară locală.

4.1. ELEMENT FINIT DE BARĂ DREAPTĂ ÎN SPAȚIU

Deducerea matricei de rigiditate prezentată în acest paragraf este făcută pentru cazul barelor drepte de secțiune constantă fără a lua în considerare efectul răsucirii împiedicate, sau a deformațiilor de lunecare. Raportarea barei la sistemul local de axe (fig. 8) permite menținerea ipotezei micilor deformații astfel încît pentru funcțiile de formă vor fi menținute expresiile folosite în calculul de ordinul I și anume :

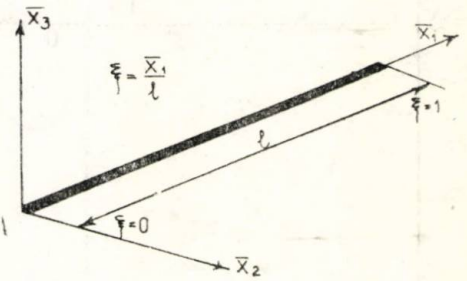


Fig. 8 — Element finit de bară în coordonate locale.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \xi, \\
N_2 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\
N_3 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\
N_5 &= -l\xi + 2l\xi^2 - l\xi^3, \\
N_6 &= l\xi - 2l\xi^2 + l\xi^3, \\
N_7 &= \xi, \\
N_8 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\
N_9 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\
N_{11} &= l\xi^2 - l\xi^3, \\
N_{12} &= -l\xi^2 + l\xi^3.
\end{aligned}
\qquad (32a-j)
$$

Folosind relaţiile (5), (6) şi (7) se deduce cu uşurinţă expresia matricei de transformare $[B_{NL}]$ corespunzătoare calculului geometric neliniar şi apoi matricea de rigiditate tangenţială $[K_t]$ din evaluarea expresiei

$$[K_t] = \int_0^1 [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] \, d\xi, \tag{33}$$

în care

$[D]$ este matricea de elasticitate a barei.

Se obţine astfel următoarea formă pentru matricea de rigiditate tangentă locală a barei :

$$[K_t] = [K_L] + [K_{NL}], \tag{34}$$

în care $[K_L]$ este matricea de rigiditate a barei din calcul liniar elastic, iar $[K_{NL}]$ are forma :

$$[K_{NL}] = N \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{6}{5l} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\
 & & \frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{2l}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{l}{30} & 0 \\
 & & & & & \frac{2l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{30} \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{6}{5l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\
 & & & & & & & & \frac{6}{5l} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{2l}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2l}{15}
\end{array}\right] \tag{35}$$

în care N reprezintă efortul axial din element.

4.2. ELEMENT STRUCTURAL DE BARĂ COMPRIMATĂ ŞI ÎNCOVOIATĂ

Deducerea matricei de rigiditate tangentă în acest caz se bazează pe rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ce descriu comportarea unei bare drepte supusă la forţe axiale şi încovoiere [17]. Bara este presupusă

dreaptă cu secțiune constantă. Rotirile și translațiile nodurilor pot fi oricît de mari dar deformațiile relative ale elementului sînt considerate a fi mici.

Elementele matricei de rigiditate tangentă se obțin din elementele matricei de rigiditate corespunzătoare calculului liniar elastic prin aplicarea unor funcții de corecție. Aceste funcții sînt fie funcții trigonometrice pentru cazul barelor comprimate, fie funcții hiperbolice pentru cazul barelor întinse, caz în care forța axială are un efect stabilizator.

O tratare exhaustivă a acestui model precum și expresia matricei de rigiditate tangentă și a funcțiilor de corecție corespunzătoare poate fi găsite în [18], [19].

Pentru cazul în care deformațiile din răsucire împiedicată nu pot fi neglijate, în [20] este prezentată expresia matricei de rigiditate secantă ce derivă din modelul considerat în cadrul acestui paragraf. Sînt de asemenea prezentate rezultatele unor ample studii parametrice ce stabilesc domeniul de aplicabilitate al acestei matrice.

Rezultatele testărilor numerice efectuate de autorii acestui studiu au demonstrat că matricele de rigiditate ce derivă din teoria de bară comprimată și încovoiată descriu cu mai mare acuratețe comportarea structurii față de cazul folosirii matricei dată de relația (35). Aceasta din urmă prezintă însă avantajul simplității.

5. PROBLEME SPECIFICE REALIZĂRII UNUI PROGRAM DE ANALIZĂ NELINIARĂ

Realizarea unor programe eficiente de analiză neliniară trebuie să aibă în mod necesar în vedere cîteva caracteristici ce derivă din structura algoritmilor utilizați.

a) Majoritatea tehnicilor de rezolvare curent utilizate au un caracter incremental-iterativ. Sînt de aceea necesare repetate actualizări și inversări ale matricei de ridgiditate a structurii, fapt ce mărește considerabil timpul de rulare.

b) Necesarul de memorie al unui program de analiză neliniară este considerabil mai mare decît în cazul analizelor liniare datorită stocărilor de tablouri suplimentare (soluții din etapele precedente de iterație, forțe neechilibrate, matrice de rotație etc). În plus de aceasta, ori de cîte ori este posibil, rezolvarea sistemului trebuie efectuată în memoria internă pentru a spori viteza de execuție a programului.

c) Obținerea unor soluții corecte, în special în jurul punctelor critice, unde matricea sistemului este slab condiționată, impune folosirea dublei precizii și deci un consum sporit de memorie. Pe de altă parte, urmărirea cu acuratețe a curbei de comportare a structurii impune de multe ori utilizarea unor pași de incrementare mici sporind timpul de execuție al programului.

Implementarea acestor programe, pe minicalculatoarele de tip Coral sau Independent de largă răspîndire în țara noastră trebuie în plus să țină seama de caracteristicile de soft și hard ale acestor echipamente :

a) Lungimea maximă a unui modul executabil nu trebuie să depășească 64 K. Sînt de aceea necesare segmentări pronunțate ale progra-

melor şi asigurarea comunicării modulelor prin intermediul unor fişiere pe disc, fapt care lungeşte însă în mod exhaustiv execuţia.

b) Rezolvarea analizei în memoria internă, în condiţiile utilizării dublei precizii necesită folosirea facilităţilor de lucru cu memoria virtuală prin intermediul instrucţiunii VIRTUAL a limbajului FORTRAN 77, respectiv prin procedeul „ferestrelor virtuale" cu subrutine de căutare şi accesare a variabilelor.

6. PROGRAM DE CALCUL PENTRU ANALIZA NELINIAR GEOMETRICĂ A STRUCTURILOR DIN BARE

În cadrul unui contract de cercetare realizat cu IPCT Bucureşti [25], autorii prezentului articol au elaborat un program de calcul destinat analizei elastice de ordinul al doilea a structurilor spaţiale alcătuite din bare.

Programul este denumit ANGES (Analiza Neliniar Geometrică a Structurilor) şi este destinat să fie inclus în sisemul ASEF [25]. Modelul de calcul utilizat în ANGES este bazat pe formularea langrangeană actualizată avînd implementate două tipuri de matrice de rigiditate tangentă corespunzătoare modelului element finit de bară dreaptă şi modelului de bară comprimată şi încovoiată.

Au fost implementate două tipuri de proceduri numerice :

— metoda incrementală cu iteraţii de echilibru Newton — Raphson în ambele variante (clasic şi modificat) pentru determinarea răspunsului structural în domeniul precritic ;

— metoda Riks-Wempner modificată pentru determinarea răspunsului structural în domeniul postcritic.

Stocarea matricei de rigiditate este făcută în tehnica „sky-line", iar algoritmul de rezolvare a sistemului de ecuaţii este bazat pe descompunerea Crout.

Toate cele trei criterii de convergenţă menţionate în paragraful 3.2.4. pot fi utilizate pentru testarea convergenţei soluţiilor.

Aşa cum a fost conceput de autorii săi programul are o arhitectură deschisă dezvoltării ulterioare. Aceste dezvoltări vizează :

- adăugarea a noi tipuri de elemente finite : element de placă plană, placă curbă subţire, placă curbă subţire axial simetrică.
- elaborarea de pre şi post procesoare grafice.
- extinderea tipului de neliniaritate abordat prin introducerea modelului de comportare fizic neliniar şi cuplarea celor două tipuri de neliniarităţi.
- rezolvarea problemelor de analiză dinamică neliniară.

În versiunea sa actuală programul este destinat atît proiectării, cît şi cercetării.

7. EXEMPLE NUMERICE

Exemplele numerice prezentate în acest paragraf au fost realizate cu module program implementate pe un microcalculator de tip SINCLAIR QL. Exemplele analizate sînt de referinţă în literatura de speciali-

tate. Pentru exactitatea comparațiilor au fost păstrate unitățile de măsură originale conform literaturii citate.

a. Cadrul din figura 9 a fost analizat folosindu-se metoda Riks-Wempner în trei variante de discretizare. Rezultatele prezintă o bună concordanță cu cele publicate în literatura de specialitate [21].

Din analiza variantelor de discretizare se observă că modelul de bară comprimată și încovoiată aproximează comportarea neliniară a cadrului cu mai multă acuratețe decît varianta cu element finit de bară dreaptă.

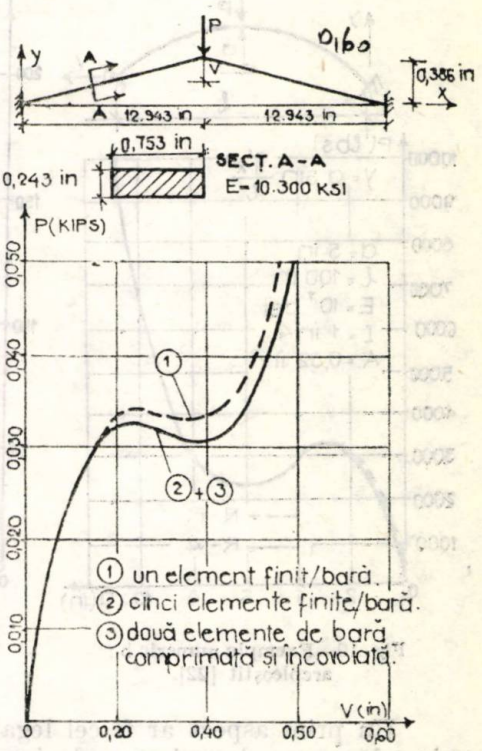


Fig. 9 — Exemplu numeric a : cadru plan [21].

b) Arcul pleoștit din figura 10 a fost analizat utilizîndu-se șase elemente finite de bară comprimată și încovoiată atît cu ajutorul metodei Riks-Wempner, cît și cu ajutorul metodei Newton-Raphson. În domeniul precritic cele două curbe obținute, practic se suprapun. Rezultatele au fost comparate cu cele publicate în [22].

c) Cadrul din figura 11 cu toate cele șase noduri de pe contur articulate a fost analizat utilizîndu-se o discretizare cu două elemente finite pe bară cu ajutorul metodei Riks-Wempner.

Așa cum se observă din figură, datorită preciziei insuficiente a calculatorului (12 cifre semnificative) ramura descendentă a curbei de echilibru nu a putut fi urmărită. O dată cu atingerea punctului critic soluția a deviat către o poziție de echilibru mai îndepărtată. Rezultatele au fost comparate cu cele furnizate de [22].

Exemplele numerice prezentate probează capacitatea procedurilor numerice folosite de a urmări cu suficientă exactitate comportarea structurilor atît în domeniul precritic, cît și în cel postcritic. Pe de altă parte, timpii foarte mari de rulare (5—8 ore), chiar și în cazul exemplelor simple prezentate, precum și rezultatele obținute în cazul exemplului c probează necesitatea implementării programului pe un sistem de calcul care să ofere caracteristici de viteză și precizie mult superioare. În consecință în momentul de față se lucrează la implementarea algoritmului pe un calculator de tip ROBOTRON.

8. CONCLUZII

Concepția de organizare precum și performanțele demonstrate fac din programul ANGES un instrument puternic și adaptabil diferitelor cerințe.

Procedurile numerice implementate permit utilizarea cu succes a programului atît în probleme de interes practic în proiectarea curentă, cît şi în dezvoltarea unor cercetări şi studii parametrice de interes ştiinţific.

Direcţiile de cercetare ulterioară vizează mai multe aspecte distincte.

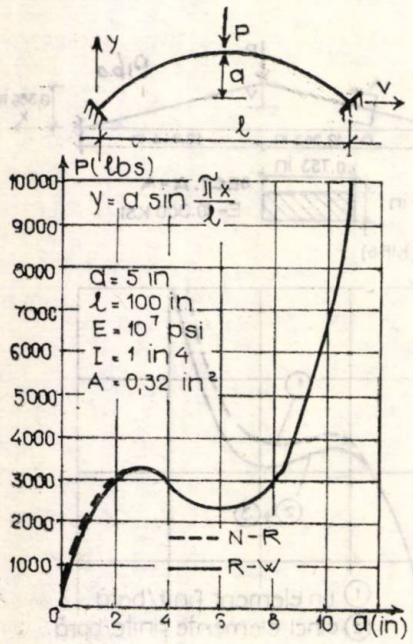


Fig. 10—Exemplu numeric b : arcpleoştit [22].

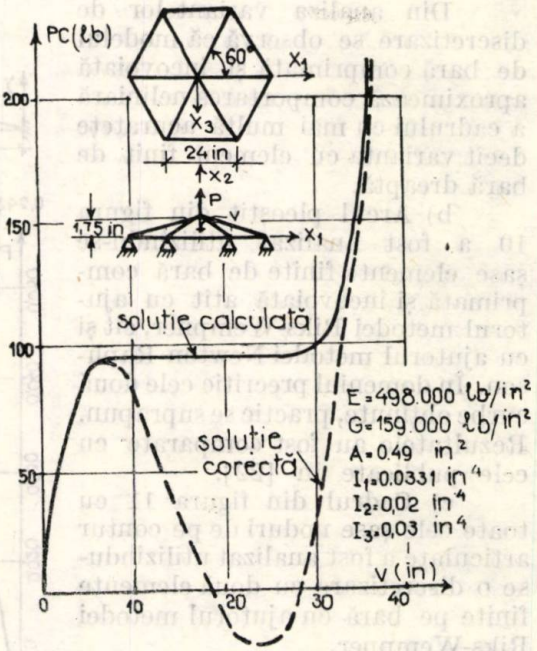


Fig. 11 — Exemplu numeric c : structură spaţială [22].

Un prim aspect ar fi cel legat de dezvoltarea programului în sine prin adăugarea de noi proceduri numerice şi de noi tipuri de elemente finite. În momentul de faţă sînt în curs de implementare metodele cvasi-Newton şi cea a gradientului conjugat.

O a doua direcţie ar fi legată de extinderea modelului de calcul neliniar pentru cazul neliniarităţilor de material precum şi cuplarea celor două tipuri de neliniarităţi. Un model ce ar putea fi luat în discuţie este cel propus de autori în [23] care are la bază o descriere a comportării materialului printr-o curbă de tip Ramberg-Osgood. Pe baza acestei curbe definite parametric se determină coeficienţii de corecţie ce afectează matricea de rigiditate elastică pentru a ţine seama de comportarea neliniară a materialului. Deşi modelul este limitat de atingerea, într-una dintre bare, a momentului plastic, el prezintă incontestabile avantaje practice legate de simplitatea evaluării coeficienţilor de corecţie.

O a treia direcţie se referă la experimentări numerice comparative ale diferitelor proceduri implementate în program, precum şi la studierea implicaţiilor legate de influenţa criteriilor de convergenţă folosite asupra rezultatelor obţinute.

Primit în redacţie la 20 aprilie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. IVAN, D. DUBINĂ, C. PACOSTE, *Metode matriceale folosite în calculul structurilor*, Rev. Construcții, 6/7 (1987).
2. U. VOGEL, *General Report for the Session on Frames*, Proc. of Second Regional Colloquium on Stability of Steel Structure, Hungary, September 25—26, 1986.
3. K. I. BATHE, S. BOLOURCHI, *Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **14** (1979).
4. K. I. BATHE, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall inc., New Jersey, 1982.
5. E. M. LUI, W. F. CHEN, *Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames*, Engineering Structures, **8**, 2 (1986).
6. G. STRANG, *The Quasi-Newton Method in Finite Element Calculations*, Proc. of International Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, North Holland Publishing Company, Austin, 1979.
7. K. I. BATHE, A. CIMENTO, *Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations*, preprint, SMIRT Conference, Berlin, 1979.
8. M. GERADIN, M. HOGGE, *Quasi Newton Iteration in Nonlinear Structural Dynamics*, preprint, SMIRT Conference, Berlin, 1979.
9. P. G. BERGAN, *Solution Algorithm for Nonlinear Structural Problems*, Int. Conf. on Engng. Appl. of the F. E. Method, A. S. Computas, Norway 1979.
10. E. W. WRIGHT, E. H. GAELORD, *Analysis of Unbraced Multistory Steel Rigid Frames*, Proc. ASCE, Struct. Div., **97**, (1971).
11. I. H. ARGYRIS, *Continua and Discontinua*, Proc. Ist. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wreight Patterson A.F.B., 1965, pp 11—189.
12. E. RAMM, *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*, Conf. on Non linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, p. 63—86.
13. M. WESSELS, *Das statische und dynamiche Durchschlags-problem der imperfekten Hachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung*. Dissertation, Honover, Mitteilungen des Instituts für Statik, **23**, (1977).
14. R. D. COOK *Concepts and Applications of Finite Elemens Analysis*, 2nd edition, John Wiley and sons, London, 1981.
15. D. DUBINĂ, C. PACOSTE, *Modele și metode de calcul exacte și aproximative în mecanica structurilor*, St. cerc. mec. apl., **46**, (1987).
16. E. RIKS, *Bifurcation and Stability — A Numerical Approach*, Proc. of Int. Conf on Inovative Methods for Nonlinear Problems, Pineridge Press int Ltd., 1984.
17. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw — H. 11, New York, 1961.
18. C. ORAN, *Tangent Stiffness in Plane Frames*, Journal of the Structural Division, ASCE **99**, 4/6 (1973).
19. AL. GHEORGHIU, *Statica construcțiilor*. vol. **3**, Editura Tehnică, București, 1980.
20. N. BĂLUȚ, C. PACOSTE, L. MOLDOVAN, *Stabilitatea cadrelor metalice etajate*, Contract ICCPDC, Timișoara, 1987.
21. F. W. WILIAMS, *An Approach to the Non-linear Behaviour of the Members of a Rigid Jointed Plane Framowork with Finite Deflections*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **17**, 4, (1964).
22. J. L. MEEK, H. S. IAN, *Geometrically Non-Linear Analysis of Space Frames by an Incremental-Iterative Technique*, Proc. of Fourth World Congress on Accuracy, Training and Reliability in FEM Technology, John Robinson, Great Britain, 1984.
23. C. PACOSTE, D. DUBINĂ, *Personal Computers in Non-Linear Analysis of Structural*, Proc. of Int. Congress in Challenge to structural Engineering IABSE, Helsinki 1988.
24. V. DE VILLE DE GOYET *Etude du comportement à la ruine des structures spatiales composées de poutres à section non symmétrique*, Construction Métallique, **4** (1977).
25. D. DUBINĂ, C. PACOSTE, *Dezvoltarea programului ASEF pentru analiza structurilor cu elemente finite*, contract ICCPDC — Filiala Timișoara, 1988.

LEGĂTURI CINEMATICE ÎNTRE DEPLASĂRI ÎN METODA ELEMENTELOR FINITE

de S. D. MUȘAT

Universitatea din Galați

În lucrare se prezintă un mod de a opera în cadrul metodei elementelor finite în situațiile în care între deplasările nodale ale unor (tipuri de) elemente finite se stabilesc legături cinematice exprimabile prin relații liniare, legături introduse în calcul prin formarea unei *matrice a legăturilor*. Devine astfel posibilă abordarea prin metoda elementelor finite, printre altele, a problemei vibrațiilor de torsiune a lanțurilor cinematice pentru transmiterea mișcării de rotație.

1. ASPECTE GENERALE, MATRICEA LEGĂTURILOR

În mod obișnuit în metoda elementelor finite singurul tip de legătură impus deplasărilor nodale este legătura de egalitate între deplasări, care corespunde asigurării continuității deplasărilor, legătură realizată prin modul de formare automată a matricei de rigiditate și, eventual, a matricei de inerție, pentru întreaga structură.

În practică apar însă și situații în care între deplasările nodale aparținînd unor elemente finite distincte se stabilesc legături cinematice mai complexe. Ne referim în continuare la legături cinematice exprimabile prin relații algebrice liniare.

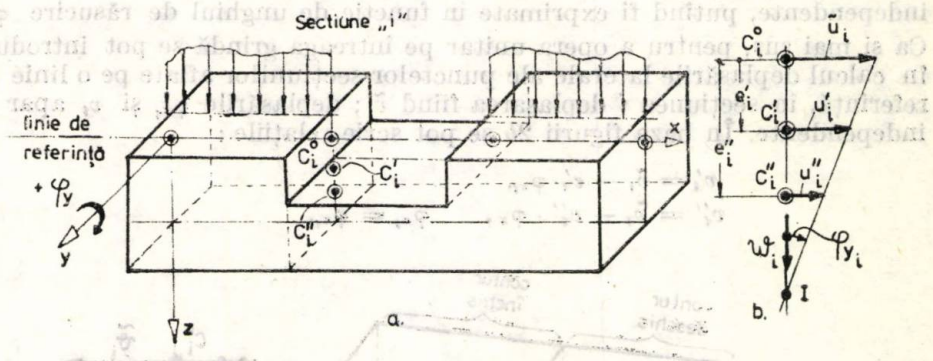


Fig. 1a, b

Astfel, în cazul unei grinzi drepte solicitată cu sarcini transversale, alcătuită din tronsoane de secțiuni diferite, dacă într-o secțiune i (fig. 1*a*) centrele de greutate ale secțiunii dreapta și cea stînga nu coincid, atunci respectarea ipotezei secțiunilor plane face ca în afara deplasărilor specifice încovoierii plane, w_i și φ_{y_i} să se dezvolte și deplasări axiale u_i' și u_i''. Aceste deplasări nu sînt toate independente, u_i' și u_i'' putînd fi exprimate în funcție de φ_{y_i}. Pentru a opera unitar la nivelul întregii grinzi divizată în

elemente finite se pot introduce în calcul deplasările punctelor secțiunilor aflate pe o aceeași linie de referință. Deplasarea axială în secțiunea i pe linia de referință fiind $\tilde{u}_i$, deplasările w_i, φ_{y_i}, $\tilde{u}_i$ apar ca deplasări independente; în concordanță cu figura 1*b* se pot scrie relațiile :

$$u'_i = \tilde{u}_i - e'_i \cdot \varphi_{y_i},$$
$$u''_i = \tilde{u}_i - e''_i \cdot \varphi_{y_i},$$
$$w_i = w_i,$$
$$\varphi_{y_i} = \varphi_{y_i},$$

sau, în formă matriceală,

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ u''_i \\ w_i \\ \varphi_{y_i} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -e'_i \\ \hline 1 & 0 & -e''_i \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i \\ w_i \\ \varphi_{y_i} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

în care cantitățile e'_i, e''_i sînt considerate algebric, conform figurii 1*b*.

Fie acum o grindă cu pereți subțiri, presupusă încărcată numai cu momente de torsiune, alcătuită dintr-o succesiune de porțiuni cu contur deschis cu porțiuni cu contur închis, așa cum se întîlnește la grinda navă (fig. 2). Într-o secțiune i de trecere de la contur deschis la contur închis centrele de încovoiere-răsucire nu se confundă (fig. 2*a*). Respectarea ipotezei conturului nedeformabil face ca centrele de răsucire C'_i și C''_i să capete deplasări laterale v'_i, v''_i, adică solicitarea cu momente de torsiune duce și la apariția încovoierii grinzii. Deplasările v'_i și v''_i nu sînt ambele independente, putînd fi exprimate în funcție de unghiul de răsucire φ_{x_i}. Ca și mai sus, pentru a opera unitar pe întreaga grindă se pot introduce în calcul deplasările laterale ale punctelor secțiunilor aflate pe o linie de referință, în secțiunea i deplasarea fiind $\tilde{v}_i$; deplasările φ_{x_i} și v_i apar ca independente. În baza figurii 2*b* se pot scrie relațiile :

$$v'_i = \tilde{v}_i - e'_i \cdot \varphi_{x_i},$$
$$v''_i = \tilde{v}_i - e''_i \cdot \varphi_x, \qquad \varphi_{x_i} = \varphi_{x_i},$$

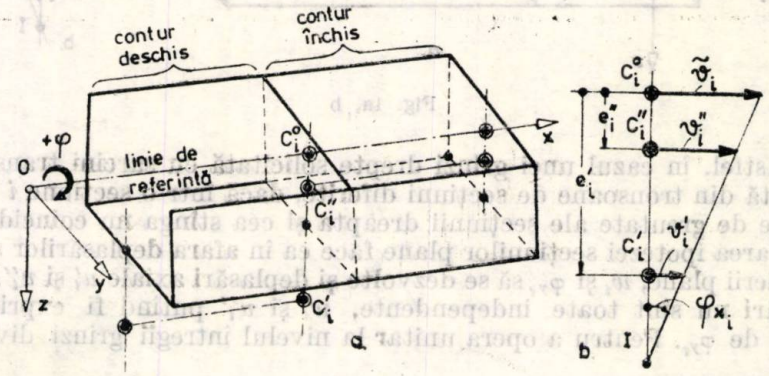


Fig. 2a, b

sau, în exprimare matriceală,

$$\begin{Bmatrix} v_i' \\ v_i'' \\ \varphi_{x_i} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -e_i' \\ \hline 1 & -e_i'' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \varphi_{x_i} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

în care cantitățile e_i', e_i'' sînt și aici privite algebric, conform figurii 2*b*.

Notînd, în cazul general, cu $\{x\}$ un vector cuprinzînd toate deplasările nodale, independente sau nu, și cu $\{\tilde{x}\}$ un vector în care s-au reținut numai deplasările independente, relațiile (1), (2) se pot scrie în forma

$$\{x\} = [L]\{\tilde{x}\}, \tag{3}$$

unde $[L]$ este *matricea legăturilor*.

2. ECUAȚIILE METODEI ELEMENTELOR FINITE ÎN PREZENȚA LEGĂTURILOR CINEMATICE

În aplicarea metodei elementelor finite, pentru situațiile de tipul celor arătate mai sus se poate proceda astfel. Se tratează toate deplasările din noduri (secțiuni nodale) ca independente, construindu-se matricea de rigiditate $[K]$ și cea de inerție $[M]$ pentru întreaga structură. Ecuațiile de echilibru dinamic pentru întreaga structură se vor scrie matriceal

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}, \tag{4}$$

unde $\{x\}$ este vectorul deplasărilor nodale, privite ca independente, pentru întreaga structură, $\{F\}$ — vectorul forțelor reduse la noduri pentru întreaga structură.

Se construiește relația (3) la nivelul întregii structuri și se introduce în (4), cu $\{\tilde{x}\}$ reprezentînd vectorul deplasărilor independente la nivelul întregii structuri. Se obține

$$[M][L]\{\ddot{\tilde{x}}\} + [K][L]\{\tilde{x}\} = \{F\}. \tag{5}$$

Pentru a reface simetria matricelor se preînmulțește relația (5) cu $[L]^T$,

$$[L]^T[M][L]\{\ddot{\tilde{x}}\} + [L]^T[K][L]\{\tilde{x}\} = [L]^T\{F\}. \tag{6}$$

Notînd

$$[\tilde{M}] = [L]^T[M][L],$$
$$[\tilde{K}] = [L]^T[K][L],$$
$$\{\tilde{F}\} = [L]^T\{F\},$$

ecuația matriceală (6) devine

$$[\tilde{M}]\{\ddot{\tilde{x}}\} + [\tilde{K}]\{\tilde{x}\} = \{\tilde{F}\}, \tag{7}$$

cu $[\tilde{M}]$ și $[\tilde{K}]$ matrice simetrice.

Odată determinat vectorul $\{\tilde{x}\}$, pe baza relației (3) se poate determina vectorul $\{x\}$ și astfel se poate trece la evaluarea solicitărilor în fiecare element finit.

3. APLICAȚIE LA STUDIUL VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE ALE SISTEMELOR RAMIFICATE

O categorie de sisteme vibrante cu vibrații de torsiune avînd o largă răspîndire în construcția de mașini o reprezintă lanțurile cinematice pentru transmiterea mișcării de rotație, care, de cele mai multe ori, sînt ramificate putînd fi și închise (fig. 3). Pentru astfel de sisteme toate metodele utilizate în prezent neglijează masa legăturii elastice, ceea ce nu este întodeauna acceptabil. Ca mod de rezolvare, pentru cazurile simple se procedează la echivalări energetice (vezi, de exemplu, [2]). Metoda are un grad restrîns de generalitate fiind greu de aplicat la sistemele complexe, nepretîndu-se la o rezolvare automată. Pentru rezolvarea sistemelor complexe este folosită teoria grafurilor (vezi, de exemplu [3]) care presupune un volum mare de calcul. Studiul vibrațiilor libere și a celor forțate pentru astfel de sisteme poate fi făcut prin metoda elementelor finite (care permite și introducerea în calcul a masei tronsoanelor elastice) după procedura arătată mai sus, cu folosirea *matricei legăturilor*.

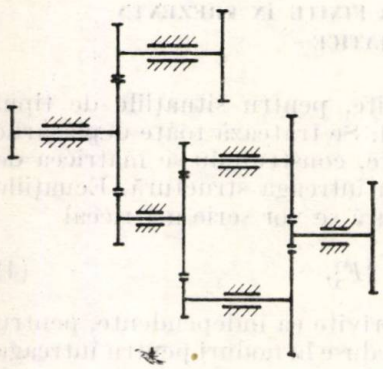


Fig. 3

Se admit inițial ca grade de libertate unghiurile de rotație ale tuturor volanților, indiferent de legătura cinematică care există între ele (rostogolire fără alunecare); aceasta este echivalent cu a considera sistemul descompus în subsisteme decuplate. Se stabilesc ecuațiile de mișcare pentru sistemul cu subsistemele decuplate, adică se stabilesc matricele de inerție $[J]$ și de rigiditate $[K]$ și vectorul excitațiilor $\{\mathcal{M}(t)\}$ pentru această situație. Sistemul ecuațiilor diferențiale de mișcare va fi în această situație

$$[J]\{\varphi\} + [K]\{\varphi\} = \{\mathcal{M}(t)\},$$

unde $\{\varphi\}$ este vectorul cuprinzînd unghiurile de rotație în secțiunile nodale, privite toate ca independente. Notînd cu $\{\tilde{\varphi}\}$ vectorul unghiurilor de rotație independente, matricea legăturilor din relația

$$\{\varphi\} = [L]\{\tilde{\varphi}\} \tag{9}$$

se obține folosind rapoartele de transmitere ale angrenărilor. Ecuația matriceală (8) se scrie în acest caz

$$[\tilde{J}]\{\ddot{\tilde{\varphi}}\} + [\tilde{K}]\{\tilde{\varphi}\} = \{\tilde{\mathcal{M}}(t)\} \tag{10}$$

cu

$$[\tilde{J}] = [L]^T [J] [L], \quad [\tilde{K}] = [L]^T [K] [L], \quad \{\tilde{\mathcal{M}}(t)\} = [L]^T \{\mathcal{M}(t)\}.$$

Pentru studiul vibrațiilor libere sistemul în amplitudinile vibrației libere este

$$([\tilde{K}] - p^2 [\tilde{J}]) \{\tilde{\Phi}\} = \{0\} \tag{11}$$

cu $\{\tilde{\Phi}\}$ reprezentînd vectorul formei proprii de vibrație, iar ecuația pulsațiilor,

$$|[\tilde{K}] - p^2 [\tilde{J}]| = 0, \tag{12}$$

cu soluțiile p_k, $k = 1, \ldots, n-1$, reprezentînd pulsațiile proprii ale sistemului presupus cu n grade de libertate, cu roțile montate pe arbori (fiind deci posibilă rotația rigidă).

Studiul vibrațiilor forțate se poate face folosind, de exemplu, analiza modală.

4. EXEMPLIFICARE

Pentru exemplificarea aplicării procedurii de mai sus fie sistemul din figura 4 la care se urmărește atît determinarea modurilor proprii de vibrație, cît și amplitudinile în vibrația forțată pentru vibrațiile de torsiune.

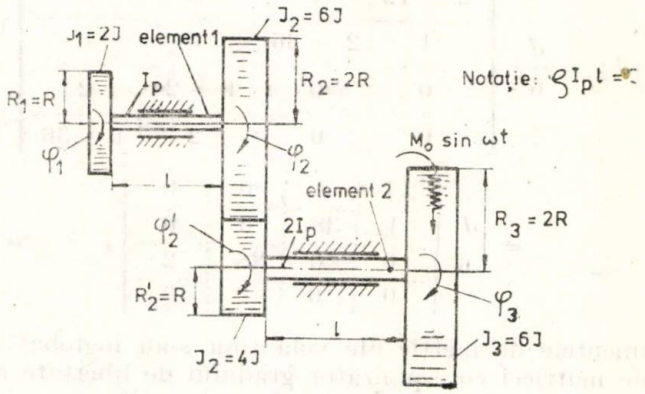


Fig. 4

Se consideră sistemul divizat în elemente finite, un element finit de tronson elastic fiind ales cu lungimea egală cu cea a întregului tronson. Vectorul cuprinzînd toate necunoscutele rotiri este $\{\varphi\} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_2', \varphi_3 \rangle^T$, iar vectorul cuprinzînd numai necunoscutele (rotirile) independente $\{\tilde{\varphi}\} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle^T$. Relația de legătură cinematică (rostogolire fără alunecare la angrenare exterioară) se va scrie

$$\varphi_2' = -\frac{R_2}{R_2'} \varphi_2 = -2\varphi_2.$$

Matricea legăturilor va fi

$$[L] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Matricea de inerție pentru un element finit de bară circulară solicitată la torsiune, cu deplasări generalizate pentru rotirile secțiunilor nodale și cu interpolare liniară pentru rotirile în cîmpul elementului (vezi de exemplu [1]) este

$$[m] = \rho \frac{I_p l}{6} \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right],$$

unde ρ este densitatea materialului, l—lungimea elementului finit, I_p — momentul de inerție polar al secțiunii transversale.

Matricea de rigiditate pentru același element finit (vezi, de exemplu, [1]) este

$$[k] = \frac{GI_p}{l} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right].$$

Matricea de inerție pentru întreg sistemul, cu subsistemele decuplate, este

$$[J] = \frac{J}{6} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2+12 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2+36 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4+24 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4+36 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{J}{6} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 14 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 38 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 28 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 40 \end{array}\right],$$

în care momentele de inerție ale volanților s-au înglobat în elementele diagonale ale matricei corespunzător gradului de libertate al secțiunii în care se găsește volantul.

Matricea de inerție pentru sistemul real este

$$[\tilde{J}] = \frac{J}{6} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} 14 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 38 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 28 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 40 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{J}{6} \left[\begin{array}{c|c|c} 14 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 38 & -4 \\ \hline 0 & -4 & 40 \end{array}\right].$$

Matricea de rigiditate cu subsistemele decuplate are forma

$$[K] = \frac{GI_p}{l}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Matricea de rigiditate a sistemului real,

$$[\widetilde{K}] = \frac{GI_p}{l}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & -2 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] =$$

$$= \frac{GI_p}{l}\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 9 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Vectorul excitațiilor,

$$\{\widetilde{\mathcal{M}}(t)\} = M_0\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\}\sin\omega t = M_0\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\}\sin\omega t.$$

Ecuația pulsațiilor,

$$\left|\frac{GI_p}{l}\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 9 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 2 \end{array}\right] - p^2\frac{J}{6}\left[\begin{array}{ccc} 14 & 1 & 0 \\ 1 & 38 & -4 \\ 0 & -4 & 40 \end{array}\right]\right| = 0,$$

are soluțiile nenule

$$p_1 = 0{,}64\sqrt{\frac{GI_p}{Jl}}, \qquad p_2 = 1{,}28\sqrt{\frac{GI_p}{Jl}}.$$

Sistemul în amplitudinile vibrațiilor libere conduce la vectorii formelor proprii de vibrație,

$$\{\widetilde{\Phi}_1\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2{,}24 \\ -0{,}74 \end{array}\right\}, \qquad \{\widetilde{\Phi}_2\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0{,}045 \\ 0{,}232 \end{array}\right\}.$$

Relațiile analizei modale pentru calculul amplitudinilor în vibrația forțată provocată de excitații armonice sincrone și sinfazice sînt :

$$\widetilde{A}_i = \sum_{k=1}^{n_p} T_k\,\widetilde{\Phi}_{ik}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{p_k}\right)^2}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

cu

$$T_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{jk} M_{Oj}}{p_k^2 \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{jk}^2 J_j}, \quad k = 1, \ldots, n_p,$$

unde n este numărul gradelor de libertate ($n = 3$), iar n_p numărul pulsațiilor sistemului ($n_p = 2$).

Dezvoltînd, factorii T_k se găsesc:

$$T_1 = -0{,}05 \frac{M_0 l}{GI_p}, \quad T_2 = 0{,}06 \frac{M_0 l}{GI_p}.$$

Considerînd pulsația excitației $\omega = 0{,}8\, p_1$, amplitudinile în vibrația forțată se găsesc:

$$\widetilde{A}_1 = -67 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}, \quad \widetilde{A}_2 = 314 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}, \quad \widetilde{A}_3 = 116 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}.$$

Amplitudinile de vibrație în secțiunile extreme ale tronsoanelor elastice, necesare în evaluarea solicitărilor dinamice, în baza relației (10) se obțin:

$$A_1 = -67 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}, \quad A_2 = 314 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p},$$

$$A_2' = -628 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}, \quad A_3 = 116 \cdot 10^{-3} \frac{M_0 l}{GI_p}.$$

Primit în redacție la 18 ianuarie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. CH. MASSONET ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. Tehnică, București, 1985.
2. V. MORARU, ș.a., *Vibrațiile și stabilitatea mașinilor unelte*, Edit. Tehnică, București, 1985.
3. A. RÎPIANU, I. CRĂCIUN, *Calculul dinamic și de rezistență al arborilor drepți și coliți*, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1985.

FILTRAREA NELINIARĂ A GAZELOR PRIN MEDIILE POROASE

de AL. D. STAN, MARIA STOICESCU și A. ODOUSOTE
Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În lucrare se analizează filtrarea unidimensională și neliniară în lungul unui mediu poros și experimental s-au determinat parametrii acestei filtrări.
Pentru filtrarea neliniară și nestaționară s-a integrat numeric ecuația de mișcare, iar rezultatele au fost comparate cu acelea de la o filtrare staționară.
În lungul mediului poros presiunea crește mai repede la o filtrare neliniară decît la aceea liniară dacă ambele sînt staționare.

În practica distribuției sînt situații în care gazele se scurg prin mediile poroase la gradienți mari de presiune, imprimîndu-le acestora un caracter neliniar de filtrare. Este, de asemenea, posibil ca filtrarea să prezinte elementele variabile în timp ceea ce-i conferă acesteia un caracter nestaționar. Pentru situația unor filtrări liniare sînt prezentate mai multe studii dintre care citäm doar lucrarea [4], unde au fost stabilite elementele mișcării. În situația unei filtrări staționare și neliniare în lucrarea noastră [3] am determinat parametrii unei asemenea filtrări. Acești parametri s-au obținut după modelele prezentate în lucrarea [1].

1. FILTRAREA STAȚIONARĂ ȘI NELINIARĂ. REZULTATE EXPERIMENTALE

Așa cum se sugera în literatura de specialitate, pentru o scurgere neliniară viteza de filtrare se poate pune sub forma

$$v = A \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

unde A și n sînt coeficienți ce trebuie determinați pentru fiecare mediu poros în parte. Avînd ca punct de plecare ecuația de continuitate, pentru o mișcare staționară, relația (1), și o evoluție izotermă a gazului, se obține ecuația diferențială

$$p \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} = C_1, \tag{2}$$

unde constanta de integrare C_1 a inclus și constanta A din ecuația (1). Modulul din ecuația (1) s-a omis considerînd că pe măsură ce presiunea se micșorează se reduce și lungimea mediului poros.

Condițiile la limită ale ecuației (2) sînt

$$p = p_1 \text{ la } x = l,$$

$$p = p_2 \text{ la } x = 0, \tag{3}$$

p_1 și p_2 sînt două presiuni de referință la capetele mediului poros cu lungimea l.

Ridicînd la puterea n și prin integrare se obține imediat relația

$$p^{n+1} = C_1 x + C_2. \tag{4}$$

Constanta C_1 din ultima relație include și constantele numerice anterioare.

Considerînd condițiile la limită (3), constantele C_1 și C_2 se determină cu ușurință și au valorile

$$C_1 = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{l}, \quad C_2 = p_2^{n+1}.$$

Cu acestea, rezultă expresia presiunii prin funcție de lungimea x a mediului poros,

$$p = \left[p_2^{n+1} + \frac{x}{l}(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{5}$$

Admițînd că $p_1 > p_2$, se pot introduce presiunea p și lungimea x sub formă adimensională cu ajutorul relațiilor

$$\bar{p} = \frac{p}{p_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}. \tag{6}$$

Cu acestea, ecuația (5) se pune sub forma

$$p = [p_2^{n+1} + x(1 - p_2^{n+1})]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{7}$$

iar condițiile limită se scriu tot sub formă adimensională

$$p = 1 \text{ la } x = 1,$$
$$p = p_2 \text{ la } x = 0. \tag{8}$$

În relațiile (7) și (8) am omis, pentru simplificarea scrierii, indicele de barare.

Avînd în vedere că gradientul de presiune, așa cum se observă din ecuația (1), este un element important pentru viteza de filtrare, în cele ce urmează, ne ocupăm de variația acestui parametru dacă filtrarea este neliniară. Gradientul de presiune teoretic se obține cu ușurință din ecuația (5) și are mărimea

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{l} \cdot \frac{1}{p^n} \tag{9}$$

sau sub formă adimensională

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - p_2^{n+1}}{p^n}. \tag{10}$$

Apare evident că pentru variația acestui parametru în lungul mediului poros este necesară cunoașterea coeficienților A și n.

În acest scop, s-au efectuat mai multe experimente în laboratorul de mecanica fluidelor din cadrul I.P.G. Ploiești, unde s-a utilizat un tub umplut cu nisip măsurîndu-se presiunea la capetele și în lungul mediului poros precum și debitul scurs prin tub.

În figura 1 se redă variația debitului de aer scurs prin tub în funcție de presiunea diferențială $(p_1^2 - p_2^2)/p_0 l$, p_0 fiind presiunea atmosferică, iar l lungimea tubului care a fost egală cu 1,50 m. S-a considerat util să se reprezinte debitul Q în funcție de presiunea diferențială $(p_1^2 - p_2^2)/p_0 l$ deoarece la valori mici ale acestui parametru mișcarea este liniară. Din datele experimentale obținute se observă că liniaritatea se menține pînă la o presiune diferențială aproximativ egală cu 22,5 kgf/cm²/cm.

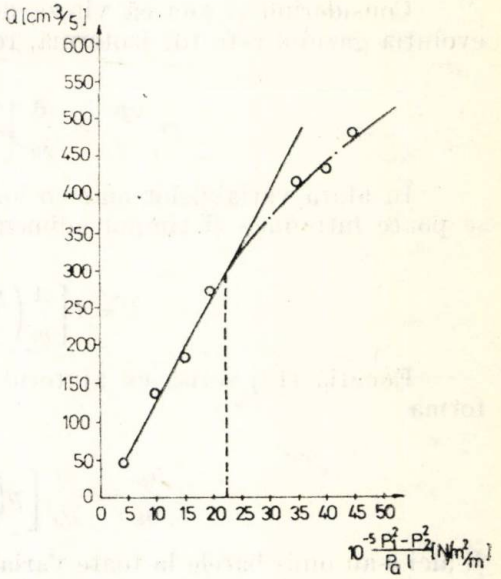


Fig. 1

Pentru domeniul de filtrare neliniar prelucrarea datelor experimentale a condus la obținerea coeficienților A și n egali cu 13226,54 $cm^{3/n+1}kgfs^{-1/n}$ și, respectiv, 1,3649.

Mărimea lui n se înscrie în gama de valori indicate de către literatura de specialitate [1]. Cu aceste valori, rezultă că se poate calcula cu ușurință variația gradientului de presiune în lungul mediului poros utilizînd relația (9) sau forma adimensională a acesteia (10). Același gradient de presiune s-a calculat și experimental. De exemplu, pentru două presiuni înregistrate experimental p_i și p_{i+1} din punctele situate la distanța l_i gradientul de presiune s-a calculat cu ajutorul relației,

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = -\frac{p_i - p_{i+1}}{l_i}. \qquad (11)$$

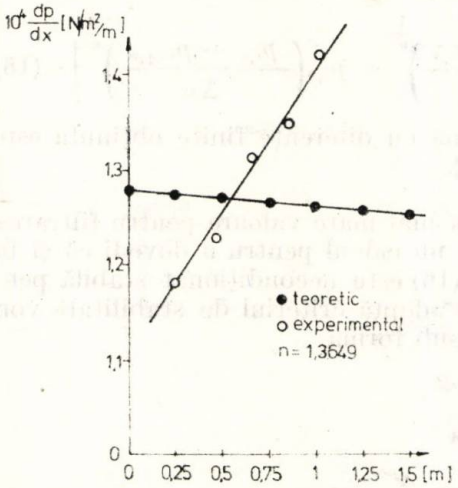


Fig. 2

În figura 2 se redă variația gradientului de presiune calculat cu relația (9) și aceea determinată din valorile experimentale ale presiunii în lungul mediului poros.

Se observă o bună concordanță între cei doi gradienți cu excepția punctelor de la extremitățile mediului poros.

2. FILTRAREA NELINIARĂ NESTAŢIONARĂ

Ca punct de plecare al studiului mişcării nestaţionare îl constituie ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{12}$$

ρ este densitatea, iar m porozitatea mediului poros.

Considerînd şi aici că viteza de filtrare este dată de relaţia (1) şi evoluţia gazului este tot izotermă, rezultă ecuaţia

$$m\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Ap\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\frac{1}{n}}\right]. \tag{13}$$

În afara variabilelor adimensionale utilizate la mişcarea staţionară se poate introduce şi timpul adimensional cu relaţia

$$\bar{t} = t\left[\frac{A}{m}\left(\frac{p_1}{l}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\frac{1}{l}. \tag{14}$$

Ecuaţia (13) scrisă cu ajutorul variabilelor adimensionale va avea forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\frac{1}{n}}\right]. \tag{15}$$

Şi aici s-au omis barele la toate variabilele.

Ecuaţia (15) este neliniară şi din acest motiv nu poate fi soluţionată decît numeric. Dacă se aproximează derivatele spţiale prin diferenţe regresive, schema cu diferenţa asociată ecuaţiei (15) are forma

$$\frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left[p_{i-1,n}\left(\frac{p_{i-1,n} - p_{i,n}}{\Delta x}\right)^{\frac{1}{n}} - p_{i,n}\left(\frac{p_{i,n} - p_{i+1,n}}{\Delta x}\right)^{\frac{1}{n}}\right]. \tag{16}$$

Pentru cazul particular $n = 1$, schema cu diferenţe finite obţinută este stabilă pentru orice $0 \leqslant r \leqslant 0{,}5$ [5].

Cu r s-a notat raportul $\Delta t/\Delta x^2$.

În situaţia în care n ar avea cea mai mare valoare pentru filtrarea neliniară şi anume 2 se poate efectua un calcul pentru a dovedi că şi în acest caz schema cu diferenţe finite (16) este necondiţionat stabilă pentru orice valoare a lui $r \geqslant 0$. Dacă se adoptă criteriul de stabilitate von Neumann [5], soluţia se poate pune sub forma

$$\zeta^n e^{im\beta h},$$

iar schema (16) conduce la egalitatea

$$\zeta = 1 + r\sqrt{\Delta x}\,\zeta^{\frac{n}{2}}\,T(\beta h), \tag{17}$$

unde am notat

$$T(\beta h) = e^{-im\beta h}\sqrt{e^{i(m-1)\beta h} - e^{im\beta}} - \sqrt{e^{im\beta} - e^{i(m+1)\beta h}}$$

Pentru fiecare exponențială admițînd dezvoltarea

$$e^x \approx 1 + x, \tag{18}$$

termenul $T(\beta h)$ devine

$$T(\beta h) = -i\beta h\sqrt{-i\beta h}. \tag{19}$$

Revenind la ecuația (17) se observă cu ușurință că pentru valoarea considerată a lui $n = 2$ rezultă

$$r = \frac{1 - \zeta}{\sqrt{\Delta x}\, i\beta h\sqrt{-i\beta h}\,\zeta}. \tag{20}$$

Considerînd și acum valoarea absolută a termenului

$$|i\beta h\sqrt{-i\beta h}| = (\beta h)^{3/2}\,|i\sqrt{-i}| = (\beta h)^{3/2}, \tag{21}$$

rezultă că pentru valori mici ale parametrului $\sqrt{\Delta x}(\beta h)^{3/2}$ și $|\zeta| \leqslant 1$, ceea ce înseamnă că schema cu diferențe (16) este absolut stabilă, parametrul r poate avea valori foarte mari, teoretic egale cu infinit.

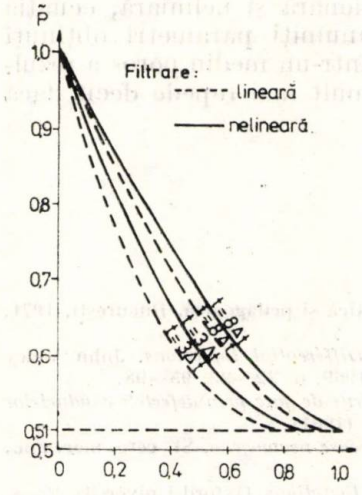


Fig. 3

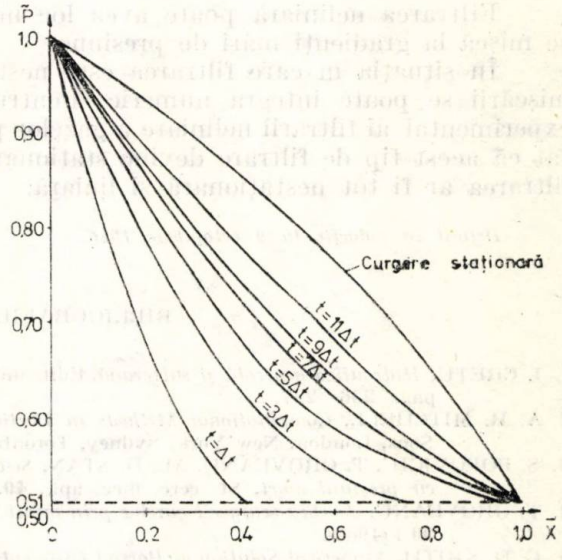


Fig. 4

De altfel, tot valori foarte mari are r dacă $|\zeta| = 0$ și $r = 0$ pentru cazul limită cînd $\zeta = 1$.

Datorită acestor considerente este de presupus că schema cu diferențe finite (16) este stabilă în intervalul $0 \leqslant r \leqslant 0{,}5$ pentru orice valoare a lui n dacă în acest interval ea este stabilă pentru valorile extreme pe care le poate lua n și anume 1 și 2.

Pentru $n = 1{,}3649$, $r = 0{,}25$ și $\Delta x = 0{,}25$ în figura 3 se redă în funcție de lungimea adimensională a mediului poros și timpul adimensional variația presiunii adimensionale.

Pe același grafic se prezintă și variația presiunii în lungul mediului poros pentru o filtrare neliniară și staționară. Pentru acest ultim caz s-a folosit relația (5).

În figura 4 se redă variația presiunii în lungul mediului poros pentru filtrarea liniară ($n = 1$) și pentru aceea neliniară ($n = 1{,}3649$) pentru pașii temporali $t = 3\Delta t$ și $t = 8\ \Delta t$, Δt fiind mărimea unui pas temporal obținut din condiția ca $r = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0{,}25$. Δx a fost luat egal cu 0,25, de unde rezultă $\Delta t = (0{,}25)^3 = 0{,}015625$. Avînd în vedere modul cum s-a introdus timpul adimensional, relația (14), rezultă valoarea pasului de timp $\Delta t = 6{,}635 \times 10^{-3}$ s. Această valoare s-a obținut considerînd că porozitatea este egală cu 0,25.

Se observă că pentru ambele valori ale timpului considerat, presiunea în lungul mediului poros crește mai repede pentru o filtrare neliniară decît la aceea liniară, ambele fiind considerate nestaționare.

3. CONCLUZII

Filtrarea neliniară poate avea loc în mediile poroase dacă gazele se mișcă la gradienți mari de presiune.

În situația în care filtrarea este nestaționară și neliniară, ecuația mișcării se poate integra numeric. Pentru anumiți parametri obținuți experimental ai filtrării neliniare a gazelor printr-un mediu poros a rezultat că acest tip de filtrare devine staționar mult mai repede decît dacă filtrarea ar fi tot nestaționară și liniară.

Primit în redacție la 9 octombrie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, *Hidraulică generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, pag. 236—237.
2. A. R. MITCHELL, *Computational Methods in Partial Differential Equations*, John Wiley Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1969, p. 22—23, 95—98.
3. S. POPOVICIU, T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari*, St. cerc. mec. apl., **40**, 4 (1981).
4. T. OROVEANU, *Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **30** I (1960).
5. G. D. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, New York, London, 1965, p. 15—21.

DISPOZITIVE MECANICE DE AMESTECARE. ÎNCĂRCAREA HIDRODINAMICĂ A TURBINEI CU PALE DREPTE (STANDARD) ȘI A ARBORELUI DISPOZITIVULUI DE AMESTECARE. I

de GH. D. PASAT

Institutul Politehnic București

Lucrarea își propune aprofundarea studiului încărcării dispozitivelor mecanice de amestecare, prin considerarea încărcării hidrodinamice rezultate ca urmare a curgerii induse de amestecătorul de tip turbină standard. Prezentarea succintă a datelor și rezultatelor din literatură [1, 2, 4] permite realizarea unei analize privind limitele atinse în ceea ce privește modelarea încărcării dispozitivelor mecanice de amestecare. Pe baza acestei analize și a observațiilor și cercetărilor proprii se propune un nou model de încărcare.

1. ANALIZA MODELĂRII ÎNCĂRCĂRII HIDRAULICE A DISPOZITIVELOR MECANICE DE AMESTECARE

Încărcarea hidraulică a dispozitivelor mecanice de amestecare poate fi rezumată, potrivit stadiului actual al cunoștințelor, după cum urmează, pornindu-se de la faptul că această încărcare se datorește, în principal, contactului permanent dintre organul de amestecare cu mediul de lucru fluid, asupra căruia acționează.

Ca urmare a acțiunii amestecătorului în mediul fluid, se dezvoltă o curgere caracterizată printr-un cîmp de viteze specifice. Specificitatea cîmpului de viteze rezultă din suprapunerea, peste viteza macroscopică de recirculație, a vitezelor fluctuante, datorite instabilității în funcționare a organului de amestecare (amestecătorului) sau anizotropiei mediului de lucru (sisteme : gaz-lichid, lichid-solid sau lichid-gaz-solid). Aceste viteze fluctuante sînt specifice turbulenței și sînt necesare din motive de tehnica proceselor pentru îmbunătățirea transferului de substanță și/sau a transferului termic.

Ca urmare a caracterului stohastic (aleator) al vitezei, asupra elementelor active ale organului de amestecare acționează un cîmp de presiuni, care se caracterizează, de asemenea, printr-o fluctuație stohastică. Dezvoltarea cîmpului de presiuni conduce la apariția încărcării hidrodinamice a organului de amestecare, a arborelui și, în general, a dispozitivului mecanic de amestecare.

Datorită elasticității dispozitivului, apar vibrații de frecvențe specifice fiecărei construcții în parte. În anumite condiții de lucru (prezența gazului, excentricități de montaj, dezechilibre reziduale) are loc excitarea vibrațiilor care pot conduce la fenomene de rezonanță, care la rîndul lor pot avea retroacțiune asupra curgerii turbulente care excită amestecătorul.

Complexitatea problemei face ca, în stadiul actual al cunoștințelor, încărcarea hidraulică a dispozitivelor mecanice de amestecare să nu poată fi calculată cu exactitate, în toate detaliile. Este posibil însă, să se efec-

tueze *evaluări* asupra fenomenelor de rezonanță, care pot apărea în funcționarea dispozitivelor mecanice de amestecare, ca urmare a curgerii turbulente induse de turbină.

a) Modelul Burger [1] privind încărcarea hidraulică a dispozitivelor mecanice de amestecare se bazează pe o analiză detaliată a forțelor și momentelor care încarcă atît organul de amestecare, cît și arborele dispozitivului. Gruparea acestor încărcări, în funcție de modalitatea de rezemare și de acționare, pe de o parte, și pe de alta, în funcție de efectele hidrodinamice ale curgerii induse de organul de amestecare, au permis realizarea primului studiu sistematic al încărcărilor hidraulice a reactoarelor prevăzute cu dispozitive mecanice de amestecare.

Din prima grupă de încărcări fac parte :

— forța centrifugă, care apare datorită dezechilibrelor amestecătorului,

$$F_{ef} = m_a \cdot e \cdot \omega^2; \tag{1}$$

— momentul giroscopic al amestecătorului, care apare datorită deformației elastice a arborelui, în fond datorită înclinării discului organului de amestecare, care conduce la o mișcare de precesie a acestuia :

$$M_k = \left(J_I \cdot \frac{\omega}{\lambda} - J_{II}\right) \cdot \lambda^2 \cdot \psi \tag{2}$$

pentru precesie directă, și

$$M_k = \left(J_I \cdot \frac{\omega}{\lambda} + J_{II}\right) \cdot \lambda^2 \cdot \psi \tag{3}$$

pentru precesie inversă ;

— greutatea organului de amestecare, considerînd că masa amestecătorului este concentrată în punctul C (fig. 1) :

$$G_a = m_a \cdot g; \tag{4}$$

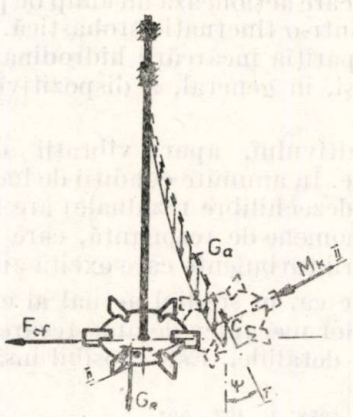


Fig. 1. — Forțe și momente dependente de soluția constructivă.

— greutatea arborelui dispozitivului de amestecare considerîndu-se că masa arborelui este distribuită (forța de greutate G_{arb}, figura 1);

— forțele transmise de sistemul de acționare F_r (curele trapezoidale, roți dințate etc.), care se apreciază în funcție de tipul și modalitatea de acționare.

În grupa încărcărilor hidraulice se includ:

— forțele portante ale amestecătorului și arborelui dispozitivului, care se datoresc reacțiunii mediului (principiul lui Arhimede),

$$F_A = -\rho_L \cdot V_A \cdot g \tag{5}$$

în cazul amestecătorului, și

$$F_{arb} = -\frac{\pi}{4} \cdot d_a^2 \cdot \rho_L \cdot g \tag{6}$$

în cazul arborelui;

— momentul hidrodinamic de răsucire care, apare ca urmare a rotirii amestecătorului, pala transmițînd mediului un impuls $\mathcal{L}$:

$$M = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_V \rho[\vec{r} \cdot \vec{W}]\,dV; \tag{7}$$

— forța hidrodinamică axială, orientată în sens contrar sensului de curgere (fig. 2) și din motive de simetrie a curgerii acționează după axa amestecătorului,

$$F_{ha} = k\, Re^m(\rho_L/\rho) \cdot \eta \cdot nd^2; \tag{8}$$

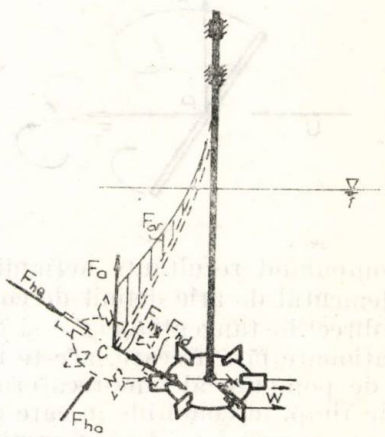


Fig. 2. — Forțe și momente hidrodinamice.

— forța hidrodinamică transversală, care se datorește asimetriei curgerii induse de amestecător:

$$F_{ht} = c_r \cdot c_q \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \rho_L \cdot h_1 \cdot d^2\,[\vec{W} \cdot \vec{r}]; \tag{9}$$

— forța hidrodinamică de inerție, datorită modificării distribuției de presiuni pe elementele (palele) amestecătorului :

$$F_{hu} = - m_{hid} \cdot \ddot{r} \; ; \tag{10}$$

— forța hidrodinamică de amortizare, care se datorește disipării vîscoase a energiei la curgerea fluidului în lungul elementelor amestecătorului și care determină o micșorare a frecvenței proprii a sistemului arbore-amestecător în condiții de imersiune

$$F_{hd} = - \varepsilon_c \cdot |\dot{r}|^m \cdot t^\circ. \tag{11}$$

b) Modelul Kipke [2] se bazează pe analiza curgerii induse de amestecător.

În condițiile ideale, cînd curgerea nu este afectată de frecarea dintre fluid și amestecător, respectiv dintre straturile de fluid, caracterul staționar al curgerii din zona de aspirație se menține și în zona de refulare, ceea ce conduce la o încărcare uniformă a organelor active ale amestecătorului (pale). În condiții reale, curgerile din zona de aspirație nu sînt niciodată pe deplin staționare deoarece, în reactor, curgerea este turbulentă, ceea ce face ca viteza ei să varieze în timp ca mărime și direcție. Drept urmare și cîmpul de presiuni care solicită pala se modifică. La aceasta se mai adaugă și faptul că, în cazul curgerii reale, afectată de frecare, sînt posibile desprinderi ale fluidului în zona de aspirație a palei, desprinderi care posedă caracterul turbioanelor von Karmann (fig. 3) și pot exercita reațiuni asupra cîmpului presiunilor.

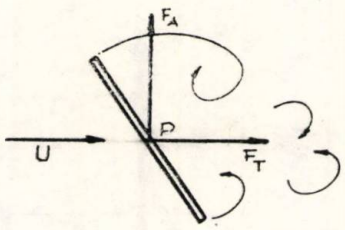


Fig. 3. — Forțe hidrodinamice nestaționare.

Descompunînd rezultanta acțiunii presiunilor (obținută prin integrare pe elementul de arie definit de configurația geometrică a amestecătorului) pe direcțiile tangențială (F_T) și axială (F_A), rezultă că, în condițiile curgerii staționare fără frecare, aceste forțe sînt constante în timp. Deci și debitul de pompare al amestecătorului și momentul de răsucire sînt constante în timp, în condițiile în care nu apare o încărcare radială datorită simetriei curgerii față de axa verticală a amestecătorului. Acest caz corespunde concepției actuale de dimensionare și verificare a elementelor dispozitivului de amestecare (arbore, rulmenți, amestecător, cuplaj motoreductor).

Dacă însă se pornește de la faptul că, datorită nestaționarității curgerii, fiecare pală este solicitată în fiecare moment de o altă rezultantă a presiunilor, componentele corespunzătoare fiind și ele variabile, se con-

stată că la timpul t, poligonul forţelor hidrodinamice tangenţiale pe întreaga turbină (fig. 4) nu se mai închide ; se obţine forţa hidrodinamică rezultantă F_R, care încarcă arborele în direcţie radială.

Datorită caracterului stohastic al turbulenţei, această forţă hidrodinamică radială va fi variabilă în timp, ca şi componentele F_T şi F_A, ca mărime şi direcţie.

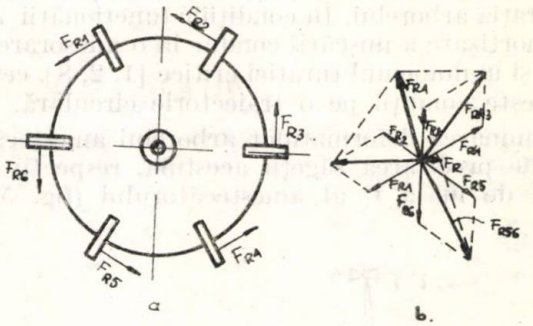


Fig. 4. — Forţe hidrodinamice ce acţionează asupra amestecătorului (a) şi poligonul forţelor (b).

Prin aplicarea analizei dimensionale, ecuaţia lui Bernoulli conduce la [2] :

$$F \sim \rho\, n^2 d^4, \tag{12}$$

ceea ce permite definirea componentelor F_A, F_R, F_T prin intermediul unor coeficienţi :

$$F_A = c_A \cdot \rho\, n^2 d^4; \quad F_R = c_R \cdot \rho\, n^2 d^4, \tag{13}$$

$$F_T = c_T \cdot \rho\, n^2 d^4.$$

Precizarea coeficienţilor c_A, c_R şi c_T permite determinarea componentelor rezultantei presiunilor şi, în final, stabilirea încărcării arborelui dispozitivului de amestecare.

Concluzionînd asupra celor două modele, se poate arăta că modelul Burger, deşi mai complet, este dificil de aplicat, întrucît necesită precizarea unor coeficienţi şi constante de integrare, iar momentul hidrodinamic de răsucire se determină indirect pe baza datelor experimentelor. Modelul Kipke se caracterizează printr-o aplicabilitate rapidă, dacă sînt precizaţi coeficienţii c_A, c_R şi c_T pentru fiecare caz în parte. Datorită dependenţei de configuraţia geometrică a reactorului, a dispozitivului de amestecare şi de turaţie, acest model implică trasarea diagramelor corespunzătoare.

2. MODELUL COMBINAT DE ÎNCĂRCARE A DISPOZITIVULUI MECANIC DE AMESTECARE

Pe baza modelelor prezentate anterior se propune un model de încărcare a dispozitivului mecanic de amestecare, care permite precizarea deformaţiilor din arborele dispozitivului. Această stare de deformaţie depinde de modul de rezemare a arborelui şi de numărul de amestecătoare plasate pe el.

În cazul reactoarelor chimice și biochimice de capacitate medie [3], se recomandă rezemarea în consolă a arborelui, acționarea realizîndu-se de regulă, la partea superioară a reactorului. De o factură mai nouă [4—7] este, în cazul reactoarelor de mare capacitate, plasarea în consolă a arborelui, cu particularitatea că acționarea se face la partea inferioară.

În aceste condiții centrul de masă al amestecătorului C se va deplasa pe o traiectorie cvasicirculară [8], amplitudinea mișcării fiind influențată de turația arborelui. În condițiile funcționării în mediu lichid, fenomenele de amortizare a mișcării conduc la o micșorare a amplitudinii de oscilație, chiar și în domeniul turației critice [1, 2, 8], centrul de masă deplasîndu-se în aceste condiții pe o traiectorie circulară.

Determinarea deformațiilor arborelui amestecătorului montat în consolă, impune precizarea săgeții acestuia, respectiv determinarea poziției centrului de masă C al amestecătorului (fig. 5).

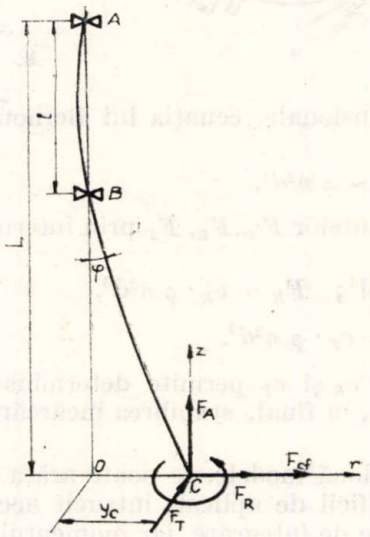


Fig. 5. — Schema încărcării dispozitivului mecanic de amestecare, în cazul rezemării în consolă a arborelui.

Dacă se consideră elasticitatea rezemării, jocurile din lagăre și elasticitatea arborelui, poziția centrului de masă, y_c, va fi :

$$y_c = y_a + y_L + y_R. \tag{14}$$

Mărimea săgeții datorită elasticității arborelui, y_a, este determinată de mărimea componentei radiale a forței rezultante F_R^*, prin considerarea forței hidrodinamice radiale $F_R(t)$ (rel. 13) și a forței centrifuge F_{cf}, datorite dezechilibrelor remanente, de montaj și execuție, e fiind excentricitatea reziduală a centrului de masă :

$$F_{cf} = m_a(y_c + e) \cdot \omega^2, \tag{15}$$

deci, forța radială rezultantă este

$$F_R^* = F_R(t) \pm F_{cf}. \tag{16}$$

Semnul plus corespunde cazului în care forța centrifugă contribuie la mărirea săgeții produse de forța hidrodinamică radială $F_R(t)$, iar semnul minus cînd aceasta conduce la micșorarea săgeții.

Săgeata arborelui, y_a, ce rezultă ca urmare a solicitării cu o forță radială F_R^* este [9]

$$y_a = \frac{F_R^* \cdot L}{3EI}(L - l)^2 \tag{17}$$

(L și l sînt definite în figura 5).

Săgeata datorită elasticității rezemării (rulment) în condiții în care nu există joc în construcție este [10]:

$$y_L = k_1 \cdot d_a^{1-2p} (F_R^*)^p, \tag{18}$$

relație în care coeficientul k_1 depinde de seria și tipul rulmentului (tabel 1), iar exponentul p ține seama de tipul rulmentului ($p = 2/3$ în cazul rulmenților cu un singur rînd de bile și $p = 9/10$ pentru rulmenții cu role conice).

Tabela 1

Valorile coeficientului k_1

Seria rulmentului / Tipul rulmentului	60	62	63	64
Rulment cu bile	0,00188	0,002	0,00204	0,00205
Rulment cu role conice	0,000803	0,00075	0,000645	0,000843

Ca urmare a jocurilor s din lagăre se definește [11] săgeata corespunzătoare, y_R:

$$y_R = \frac{s(L - l)}{l}, \tag{19}$$

Valorile jocurilor s sînt indicate în standarde (STAS 7115—73) sau în cataloagele firmelor producătoare. Ca urmare a montajului, jocul inițial din rulment se micșorează apreciabil în funcție de forțele de strîngere dintre inelul interior și fus, forțe a căror mărime depinde și de cîmpul de toleranțe al montajului [12]. Din punct de vedere al solicitărilor maxime se consideră cazul cel mai dezavantajos, respectiv cel în care nu s-a realizat montajul corect al rulmentului și jocul rămîne același și după montaj.

În condițiile suprapunerii efectelor [13] rezultă, conform relațiilor (14)—(19),

$$y_a = \frac{F_R^* L}{3EI}(L - l)^2 + k_1 d_a^{1-2p} (F_R^*)^p + \frac{s(L - l)}{l}. \tag{20}$$

Determinarea săgeții arborelui permite precizarea stării de tensiuni, deci o dimensionare corectă a arborelui dispozitivului mecanic de amestecare.

3. CONCLUZII

Prin considerarea expresiei săgeții y_a (rel. 20), ca funcție obiectiv este posibilă optimizarea rezemării arborelui în consolă, în sensul obținerii unei săgeți minime, atît la vîrful arborelui, cît și în zona de amplasare a sistemului de etanșare, aflat în imediata apropiere a lagărului inferior B (fig. 5).

Utilizarea metodelor de optimizare va permite precizarea optimului rezemării în consolă a arborilor dispozitivelor de amestecare, optim ce va face obiectul părții a doua a lucrării.

NOTAȚII

c_A, c_R, c_T — coeficienți;
$c_r \cdot c_q$ — coeficienți, relația (9);
d — diametrul amestecătorului, m;
d_a — diametrul arborelui, m;
e — excentricitatea reziduală, m;
E — modulul de elasticitate, N/m^2;
F_A — forța hidrodinamică axială, N;
F_{ef} — forța centrifugă, N;
F_R — forța hidrodinamică radială, N;
F_R^* — forța radială rezultantă, N;
F_T — forța hidrodinamică tangențială, N;
g — accelerația gravitațională, m/s^2;
G_a — greutatea arborelui, N;
h_1 — înălțimea de plasare a amestecătorului, m;
I — momentul de inerție, m^4;
$J_{I,II}$ — momente de inerție, m^4;
k — coeficient , relația (8);
k_1 — coeficient, relația (18);
l — distanța dintre reazeme, m;
L — lungimea arborelui, m;
$\mathcal{L}$ — impulsul, Ns;
m — exponent, relația (11);
m_a — masa amestecătorului, kg;
M — momentul hidrodinamic de răsucire, Nm;
M_k — momentul de precesie, Nm;
n — turația amestecătorului, s^{-1};
p — exponent, relația (18);
r — raza instantanee a centrului de masă, m;
$\dot{r}$ — viteza instantanee a centrului de masă, m/s;

$\ddot{r}$ — acceleraţia instantanee a centrului de masă, m/s^2;
Re — criteriul Reynolds;
s — jocul din rulmenţi, m;
t — timpul, s;
t° — versorul direcţiei transversale;
V_A — volumul amestecătorului, m^3;
y_a — săgeata arborelui, m;
y_c — săgeata centrului de masă, m;
y_L — săgeata datorită elasticităţii reazemului, m;
y_R — săgeata datorită jocurilor din reazeme, m;
W — vectorul vitezei instantanee;
ε_c — coeficientul de amortizare, relaţia (11);
η — viscozitatea dinamică, Pas;
ρ — densitatea materialului amestecătorului, kg/m^3;
ρ_L — densitatea lichidului, kg/m^3;
λ — viteza unghiulară la precesie, rad/s;
ω — viteza unghiulară a amestecătorului, rad/s;
ψ — unghiul de deformaţie a arborelui, rad.;

Primit în redacţie la 5 martie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. S. BURGER, Teză de doctorat, Technische Universität München, 1970.
2. K. D. KIPKE, Chem. Ing. Techn., **56** (1984).
3. GH. D. PASAT, *Optimizarea dispozitivelor de amestecare ale reactoarelor chimice şi biochimice de gabarit mare*, Teză de doctorat, I.P.B., 1986.
4. K. SCHÜGERL, Chem. Ing. Techn., **52** (1980).
5. * * * Prospect STELZER GmbH, Warburg, R. F. Germania.
6. * * * Prospect MORITZ S. A., Chatou, Franţa.
7. I. OLTEANU, GH. D. PASAT, R. TENEA, Rev. Construcţia de maşini, **37** (1985).
8. GH. D. PASAT, A. PANTAZOPOL, St. cerc. mec. apl., **46** (1987).
9. GH. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1974.
10. B. METZNER, Chem. Ing. Tech., **43** (1971).
11. * * * Catalog Westfalia Lünen, Altlünen, R. F. Germania.
12. I. RABINOVICI, GH. BADEA, A. ANGHEL, Rulmenţi, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1977.
13. G. STEIN, B. I. T., **9** (1972).

ASPECTE PRIVIND CALCULUL FUNCȚIONAL AL AMESTECĂTOARELOR CU TAMBUR ROTATIV, CU FUNCȚIONARE DISCONTINUĂ

de GH. I. ENE

Institutul Politehnic București

Lucrarea permite stabilirea principalilor parametri geometrici și funcționali, precum și determinarea puterii necesare acționării amestecătoarelor cu tambur cilindric orizontal rotativ destinate amestecării materialelor pulverulente și granulare.

Relațiile stabilite pot fi utilizate și pentru calculul altor utilaje cu tambur rotativ cu destinații diverse (cuptoare, uscătoare, răcitoare etc.).

1. GENERALITĂȚI

Amestecătoarele cu tambur rotativ, cu funcționare discontinuă, sînt destinate amestecării materialelor pulverulente și granulare. Ele sînt formate dintr-un recipient (tambur) care se rotește în jurul unei axe. Există o mare varietate constructivă de asemenea amestecătoare, ele diferențiindu-se atît prin forma geometrică a recipientului (tambur cilindric, tambur sub forma unei prisme hexagonale, tambur cubic, tambur tetraedric etc.), cît și prin unghiul format între axa geometrică de simetrie a acestuia și axa în raport cu care se realizează rotirea.

Aceste tipuri de amestecătoare a căpătat o largă răspîndire în diferite industrii (chimică, farmaceutică, alimentară etc.) datorită avantajelor pe care le prezintă: simplitate constructivă, exploatare și întreținere simple, posibilitatea amestecării materialelor abrazive, protejarea formei și a dimensiunilor granulelor materialelor amestecate etc.

Dintre numeroasele variante constructive cel mai răspîndit este amestecătorul cu tambur cilindric, orizontal, la care axa de rotire coincide cu axa geometrică de simetrie a cilindrului. La această variantă constructivă ne vom referi în cele ce urmează.

2. STABILIREA PRINCIPALILOR PARAMETRI GEOMETRICI ȘI FUNCȚIONALI

Amestecătorul cu tambur cilindric orizontal (fig. 1) este format dintr-un recipient cilindric orizontal așezat prin intermediul a două bandaje (inele de sprijin), plasate la capete, pe doi arbori prevăzuți cu role de reazem (solidare cu arborii). Antrenarea tamburului în mișcare de rotație este realizată de către un grup de acționare (motor electric și reductor de turație), transmiterea mișcării de rotație de la rolele de reazem la tambur efectuîndu-se prin fricțiune.

La o altă variantă constructivă a amestecătorului cu tambur cilindric orizontal, rezemarea se realizează pe role independente (fiecare rolă are lagăre proprii), iar antrenarea tamburului în mișcare de rotație o

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 5, 1988, P. 503–514

realizează un grup de acționare (motor electric și reductor de turație) prin intermediul unui angrenaj dințat (pinion de atac și coroană cu dantură interioară prevăzută pe unul din bandaje).

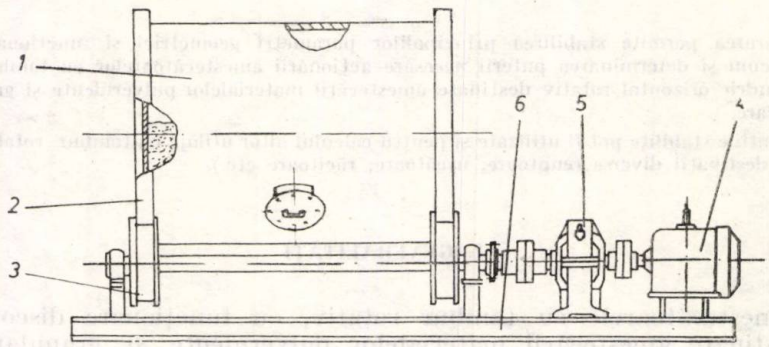


Fig. 1. — Amestecător cu tambur cilindric orizontal rotativ : *1* — tambur ; *2* — bandaj ; *3* — rolă de reazem ; *4* — motor electric de acționare ; *5* — reductor de turație ; *6* — batiu.

CAPACITATEA TAMBURULUI

Practic, capacitatea tamburului (recipientului) poate fi oricît de mare, însă construcția amestecătoarelor cu capacitatea tamburului peste 5 m^3 nu este rațională din punct de vedere economic [1].

Pentru construcțiile existente de asemenea amestecătoare, raportul dintre lungimea și diametrul tamburului are valorile $L/D = 1{,}2 \ldots 1{,}7$, valori mai mari ale acestui raport conducînd atît la amestecarea neuniformă a materialului, cît și la golirea mai dificilă a tamburului [2].

Cunoscînd capacitatea tamburului, V, și valoarea raportului, $\lambda = L/D$, se determină diametrul tamburului :

$$D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi\lambda} V} \qquad (1)$$

și, în continuare, lungimea tamburului L.

TURAȚIA TAMBURULUI

La rotirea tamburului umplut parțial cu material, acesta este ridicat pînă la o anumită înălțime cînd unghiul de înclinare a suprafeței libere a materialului, față de planul orizontal, depășește unghiul taluzului natural al acestuia, situație în care materialul lunecă în jos, în lungul suprafeței libere.

Înălțimea de ridicare este cu atît mai mare cu cît crește turația tamburului. Turația nu poate depăși însă o anumită valoare critică dată de relația (vezi, de exemplu, [3])

$$n_{cr} = \frac{42{,}3}{\sqrt{D}}, \text{ [rot/min]}, \tag{2}$$

unde D este diametrul interior al tamburului, m. În momentul în care turația depășește valoarea critică dată de relația (2), materialul se rotește solidar cu tamburul (nu mai cade) și efectul de amestecare încetează. Amestecătoarelor cu tambur cilindric orizontal existente lucrează, în general, cu o turație

$$n = (0{,}2 \ldots 0{,}4)\, n_{cr}. \tag{3}$$

Ele sînt considerate mașini lente, viteza periferică a tamburului fiind redusă, $v = 0{,}17 \ldots 1{,}00$ m/s [1]. Turația tamburului depinde de o serie de factori, îndeosebi, de proprietățile fizico-mecanice ale materialului amestecat, valoarea ei, stabilindu-se în general, pe cale experimentală.

Turația tamburului se poate determina și cu relația empirică [1]

$$n = (1500 \ldots 2000)\sqrt{d_p/R}, \text{ [rot/min]}, \tag{4}$$

unde d_p este media aritmetică a dimensiunilor granulelor componenților amestecului, iar R — raza interioară a tamburului.

GRADUL DE UMPLERE AL TAMBURULUI

Tamburul se încarcă numai parțial cu materialul supus amestecării, gradul de umplere φ fiind exprimat prin raportul dintre volumul de material și volumul tamburului (sau prin raportul dintre aria secțiunii transversale a stratului de material și aria secțiunii transversale a tamburului). S-a observat că, la valori ale gradului de umplere $\varphi = 0{,}10 \ldots 0{,}80$, apare o circulație intensă a granulelor în planul secțiunii transversale a stratului de material (în segmentul de material). Materialul se ridică împreună cu peretele tamburului pînă la o anumită înălțime, la care unghiul de înclinare a suprafeței libere a stratului de material față de planu orizontal depășește unghiul de taluz natural al materialului. În această situație granulele alunecă cu viteze diferite, în jos, în lungul suprafeței libere, parcurgînd distanțe diferite pînă la înglobarea lor în strat. Apoi ciclul se reia. Rezultă o amestecare intensă a materialului în planul secțiunii transversale a stratului. Concomitent se observă și o amestecare redusă în direcție axială (normală pe planul secțiunii transversale a stratului). Aceasta se explică prin faptul că, datorită ciocnirilor întîmplătoare dintre granule în timpul alunecării lor pe suprafața liberă a stratului, traiectoriile acestora se pot abate din planul secțiunii transversale a stratului, într-o parte sau în cealaltă. Pentru a spori efectul de amestecare în direcție axială se montează în tamburul de amestecare dispozitive speciale cu palete sau cu spire elicoidale.

La valori reduse ale gradului de umplere, $\varphi = 0{,}03 \ldots 0{,}10$, materialul urcă împreună cu peretele tamburului pînă la o anumită înălțime.

suprafața liberă formînd cu planul orizontal un unghi mai mic decît cel al taluzului natural al materialului, de unde alunecă pe peretele tamburului în toată masa lui. În această situație efectul de amestecare este foarte redus.

Amestecătoarele cu tambur cilindric orizontal existente funcționează în mod obișnuit la un grad de umplere $\varphi = 0{,}30 \ldots 0{,}70$ [1].

3. PUTEREA NECESARĂ ACȚIONĂRII

Momentul necesar rotirii tamburului rezultă prin însumarea următoarelor momente parțiale: M_1 — momentul necesar ridicării materialului în tambur; M_2 — momentul necesar învingerii frecărilor în reazeme (frecărilor dintre bandaj și role); M_3 — momentul necesar învingerii frecării în lagărele axelor rolelor. Momentele se raportează la bandaj a cărui turație este cunoscută.

Momentul M_1

Expresia momentului M_1 este (fig. 2)

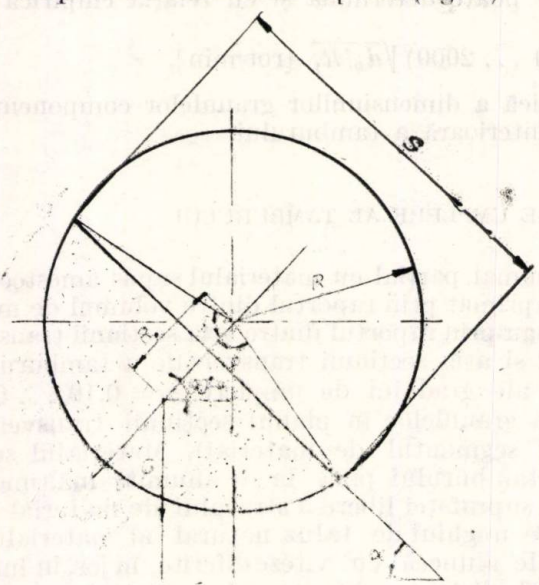


Fig. 2. — La calculul momentului M_1.

$$M_1 = G_{mat} \cdot r, \tag{5}$$

unde G_{mat} este greutatea materialului aflat în tambur, iar r — brațul de pîrghie.

Se observă că

$$r = R_0 \sin \alpha, \tag{6}$$

unde R_0 este raza centrului de masă a segmentului de material, iar unghiul α, care reflectă ridicarea materialului în tambur ca urmare a rotirii acestuia, este, în cazul regimului de funcționare cu circulația granulelor în

planul secțiunii transversale a stratului de material, egal cu unghiul talazului natural al materialului.

Raza centrului de masă are expresia

$$R_0 = \frac{s^3}{12\, A_{mat}}, \tag{7}$$

unde s este lungimea coardei, iar A_{mat} — aria secțiunii ocupate de material (aria secțiunii transversale a stratului de material).

Ținînd seama că

$$s = 2R \sin \delta, \tag{8}$$

și

$$A_{mat} = \delta R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\delta. \tag{9}$$

Expresia (7) poate fi pusă sub forma

$$R_0 = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \delta}{2\delta - \sin 2\delta}. \tag{10}$$

Valorile unghiului δ, pentru diferite grade de umplere a tamburului, se determină rezolvînd ecuația [vezi relația (9)]

$$A_{mat} = \varphi \pi R^2 = \delta R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\delta, \tag{11}$$

care poate fi pusă sub forma

$$\varphi = \frac{2\delta - \sin 2\delta}{2\pi}. \tag{12}$$

Expresia razei centrului de masă R_0 [vezi relația (10)], poate fi pusă și sub forma

$$R_0 = k \cdot R, \tag{13}$$

unde

$$k = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \delta}{2\delta - \sin 2\delta}. \tag{14}$$

Ținînd seama de relațiile (6) și (13), relația (5) devine

$$M_1 = G_{mat} \cdot k \cdot R \cdot \sin \alpha, \tag{13}$$

expresie care este utilă atunci cînd se cunoaște greutatea șarjei de material.

Greutatea materialului se exprimă prin relația

$$G_{mat} = \varphi \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot L \cdot \rho_{mat} \cdot g, \tag{16}$$

unde, în afara notațiilor utilizate anterior, ρ_{mat} este masa volumică a materialului (densitatea aparentă), iar g — accelerația gravitației.

Ținînd seama de relațiile (8) și (11), relația (7) poate fi pusă sub forma

$$R_0 = \frac{(D \sin \delta)^3}{12\varphi \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{D \sin^3 \delta}{2\pi\varphi}. \tag{17}$$

Utilizînd relațiile (16), (17) și (6), expresia (5) devine

$$M_i = \frac{1}{12} (D \sin \delta)^3 L \rho_{mat} g \sin \alpha \tag{18}$$

și este utilă atunci cînd se cunoaște masa volumică a materialului (caracteristică lesne de determinat experimental) și gradul de umplere φ (care determină mărimea unghiului δ).

Pentru calcule inginerești se pot utiliza valorile mărimilor δ, sin δ și k, prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Valorile mărimilor δ, sin δ, k, pentru diferite valori ale gradului de umplere φ.

φ	δ, grade	δ, radiani	sin δ	k
5	36,25	0,632	0,591	0,887
10	46,50	0,811	0,725	0,815
15	54,25	0,946	0,811	0,754
20	60,50	1,055	0,870	0,702
25	66,25	1,156	0,915	0,649
30	71,25	1,243	0,947	0,603
35	76,25	1,330	0,971	0,555
40	81,00	1,413	0,987	0,509
45	85,50	1,492	0,997	0,467
50	90,00	1,570	1,000	0,425
55	94,50	1,649	0,997	0,382
60	99,00	1,727	0,987	0,340
65	103,75	1,810	0,971	0,299
70	108,75	1,898	0,947	0,257
75	113,75	1,985	0,915	0,217
80	119,50	2,085	0,870	0,174
85	125,75	2,194	0,811	0,133
90	133,50	2,330	0,725	0,090

Creșterea coeficientului de umplere φ are efecte contrare asupra greutății șarjei de material G_{mat} și asupra brațului de pîrghie r și anume produce creșterea greutății G_{mat} și reducerea brațului de pîrghie r (ca urmare a apropierii centrului de masă a secțiunii transversale a stratului de material de centrul secțiunii transversale a tamburului).

Relațiile (15) și (16) arată că momentul și deci puterea necesară ridicării materialului în tambur sînt proporționale cu produsul $\varphi \cdot k$, care, ținînd seama de relațiile (12) și (14), are expresia

$$\varphi \cdot k = \frac{2}{3\pi} \sin^3 \delta. \tag{19}$$

Produsul $\varphi \cdot k$ (și deci puterea necesară ridicării materialului în tambur) crește cu creșterea lui φ atingînd un maximum pentru $\varphi = 0{,}5$ (cînd $\sin \delta = 1$), după care descrește, astfel că

$$(\varphi \cdot k)_{\varphi} = (\varphi \cdot k)_{1-\varphi}. \tag{20}$$

Prin urmare creșterea gradului de umplere φ are, în anumite limite, un efect favorabil atît asupra intensificării amestecării, cît și asupra reducerii puterii necesare ridicării materialului în tambur. Sporirea greutății materialului, ca urmare a creșterii coeficientului de umplere, conduce însă la o creștere nesemnificativă a puterii necesare pentru învingerea frecărilor dintre bandaje și rolele de reazem și a frecărilor din lagărele axelor rolelor, așa cum se va constata în continuare (puterea necesară învingerii acestor frecări fiind de ordinul a 5 ... 8% din puterea necesară ridicării materialului în tambur).

Momentul M_2

Greutatea totală a părții rotitoare a tamburului este

$$G = G_{tamb} + G_{mat}, \tag{21}$$

unde G_{tamb} este greutatea tamburului gol.

Reacțiunile în punctele de contact dintre bandaj și rolă, în cazul obișnuit cînd tamburul este rezemat pe două grupuri de reazem formate din cîte două role, este (vezi fig. 3)

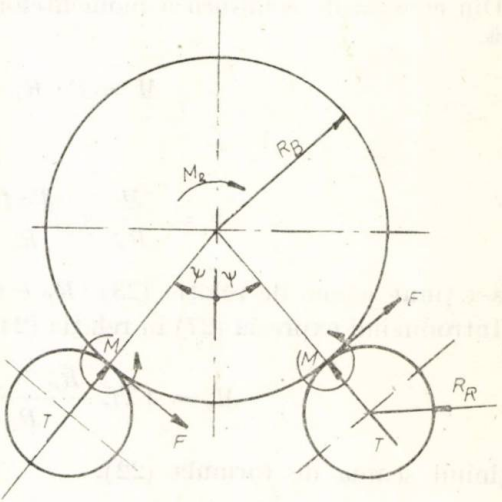


Fig. 3. — La calculul momentului M_2.

$$T = \frac{G/2}{2 \cos \psi} = \frac{G}{4 \cos \psi}, \tag{22}$$

unde ψ este unghiul de așezare a rolelor în raport cu planul vertical. Cu creșterea unghiului ψ încărcarea rolei de reazem crește. Valori reduse ale

unghiului ψ influențează negativ stabilitatea tamburului pe reazeme. Practic, valorile acestui unghi sînt $\psi = 30 \ldots 35°$. La mașinile la care tamburul este antrenat prin frecare (adică rolele de pe o parte sînt montate pe un arbore comun, antrenat) se merge pînă la $\psi = 45°$.

În timpul rotirii tamburului, între bandaj și role apare atît frecare de rostogolire, cît și frecare de alunecare. Momentul rezistent datorită frecării de rostogolire dintre bandaj și rolă este

$$M = T \cdot f_r, \tag{23}$$

unde f_r este coeficientul frecării de rostogolire care, pentru cuplul de materiale oțel/oțel are valoarea $f_r = 5 \cdot 10^{-4}$ m [3].

Momentul rezistent total (datorită tuturor celor patru role de reazem), în raport cu centrul bandajului (axa tamburului), este dat de relația

$$M_2 = 4(M + F \cdot R_B), \tag{24}$$

unde F este forța de frecare de alunecare dintre bandaj și rolă, iar R_B — raza bandajului.

Ținînd seama de relația (23), se obține

$$M_2 = 4(T \cdot f_r + F \cdot R_B). \tag{25}$$

Din ecuația de echilibru a momentelor, scrisă față de centrul rolei, rezultă

$$M = F \cdot R_R \tag{26}$$

sau

$$F = \frac{M}{R_R} = \frac{T \cdot f_r}{R_R}, \tag{27}$$

unde s-a ținut seama de relația (23) (R_R este raza rolei de reazem).

Introducînd expresia (27) în relația (24) se obține

$$M_2 = 4Tf_r \frac{R_B + R_R}{R_R} \tag{28}$$

sau, ținînd seama de formula (22),

$$M_2 = \frac{G}{\cos \psi} \cdot f_r \cdot \frac{R_B + R_R}{R_R}. \tag{29}$$

Expresia (29) este valabilă pentru orice număr de grupuri de reazem deoarece T [relația (22)] este invers proporțional cu numărul de role, iar M_2 [relația (28)] este direct proporțional cu același număr de role.

Momentul M_3

În cazul rolelor independente, forța de frecare de alunecare într-unul din lagăre este

$$F_{f1} = f_a \cdot \frac{T}{2}, \tag{30}$$

unde coeficientul frecării de alunecare are valorile : $f_a = 0{,}01$ pentru lagăre cu rulmenți ; $f_a = 0{,}02$ pentru lagăre de alunecare unse cu ulei ; $f_a = 0{,}06$ pentru lagăre de alunecare unse cu unsoare constantă.

Momentul acestei forțe, în raport cu centrul rolei este (vezi fig. 4)

$$M_{f1} = f_a \cdot \frac{T}{2} \cdot R_F, \tag{31}$$

unde R_F este raza fusului axului rolei.

Forța rezistentă, datorită acestui moment, aplicată rolei, rezultă (fig. 4)

$$F_{r1} = \frac{M_{f1}}{R_R} = \frac{f_a \cdot T/2 \cdot R_F}{R_R}. \tag{32}$$

Momentul rezistent, față de centrul bandajului, este (fig. 4)

$$M_{r1} = F_{r1} \cdot R_B = \frac{T}{2} f_a \cdot \frac{R_F \cdot R_B}{R_R}. \tag{33}$$

Rezultă, pentru momentul rezistent total (datorită lagărelor celor patru role), expresia

$$M_3 = 8 \cdot \frac{T}{2} f_a \frac{R_B \cdot R_F}{R_R} = 4 T f_a \frac{R_B \cdot R_F}{R_R} \tag{34}$$

sau, ținînd seama de relația (22),

$$M_3 = \frac{G}{\cos \psi} f_a \frac{R_B \cdot R_F}{R_R}. \tag{35}$$

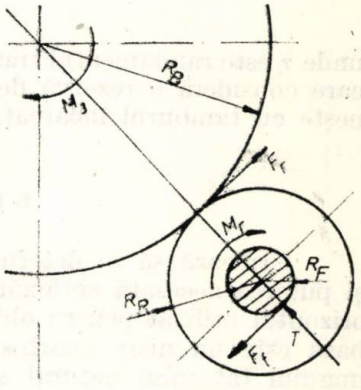


Fig. 4. — La calculul momentului M_3.

Relația (35) este valabilă, din motivele arătate anterior, atît în cazul oricărui număr de grupuri de reazem, cît și în cazul cînd rolele de pe aceeași parte sînt fixate pe un arbore comun.

Pentru calcule se pot utiliza următoarele corelații :

$$\begin{aligned} D_B &= 2R_B = (1{,}12 \ldots 1{,}14)\, D, \\ D_R &= 2R_R = (0{,}25 \ldots 0{,}35)\, D_B, \\ D_F &= 2R_F = (0{,}20 \ldots 0{,}30) D_R, \\ b &= (1{,}20 \ldots 1{,}25) \frac{D_B - D}{2}, \end{aligned} \tag{36}$$

unde D este diametrul tamburului, iar b — lățimea bandajului.

Momentul necesar rotirii tamburului este

$$M_{tot} = M_1 + M_2 + M_3, \quad [\text{N.m}], \tag{37}$$

iar puterea necesară acționării

$$N = M_{tot} \cdot \omega, \quad [\text{W}], \tag{38}$$

unde $\omega = \text{n}/30\ \text{s}^{-1}$ este viteza unghiulară a tamburului (n — turația, rot/min).

Puterea motorului de acționare rezultă

$$N_{mot} = k \frac{N}{\eta}, \tag{39}$$

unde η este randamentul transmisiei, iar $k = 1,1 \ldots 1,2$ este un coeficient care consideră o rezervă de putere necesară deoarece amestecătorul pornește cu tamburul încărcat.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Urmează să se determine caracteristicile geometrice și funcționale și puterea necesară acționării pentru un amestecător cu tambur cilindric orizontal utilizat pentru obținerea unui amestec la care componentul de bază este un nisip cuarțos uscat cu densitatea $\rho_{mat} = 1600\ \text{kg/m}^3$ și unghiul taluzului natural $\alpha = 35°$.

Masa șarjei de material este $M_{mat} = 9000$ kg. Rezultă volumul ocupat de material

$$V_{mat} = M_{mat}/\rho_{mat} = 9000 : 1600 = 5,625\ \text{m}^3.$$

Utilizînd un grad de umplere $\varphi = 0,7$, rezultă volumul tamburului

$$V = \varphi/V_{mat} = 5,625 : 0,7 = 8,035\ \text{m}^3.$$

Se determină, adoptînd pentru raportul L/D valoarea $\lambda = 1,25$, dimensiunile tamburului

$$D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi\lambda} V} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 8,035}{\pi \cdot 1,25}} \approx 2\ \text{m},$$

$$L = \lambda D = 1,25 \cdot 2 = 2,5\ \text{m}.$$

Deoarece $\varphi = 0,7$, rezultă $k = 0,257$ și se poate calcula $M_1 = G_{mat} \cdot k \cdot R \cdot \sin\alpha = 9000 \cdot 9,81 \cdot 0,257 \cdot 1 \cdot \sin 35° = 13\,014$ N.m.

Amestecătorul se caracterizează prin următoarele mărimi constructive și funcționale:

$$M_{tamb} = 3500 \text{ kg}; \quad D_B = 2{,}240 \text{ m}; \quad D_R = 0{,}5 \text{ m}; \quad D_F = 0{,}1 \text{ m};$$

$$\psi = 30°; \quad n_{cr} = \frac{42{,}3}{\sqrt{D}} = \frac{42{,}3}{\sqrt{2}} = 29{,}9 \text{ rot/min}.$$

Se adoptă turația tamburului $n = 7$ rot/min ($n/n_{cr} = 0{,}234$) căreia îi corespunde viteza unghiulară $\omega = \pi \cdot n/30 = \pi \cdot 7/30 = 0{,}733 \text{ s}^{-1}$.

Rezultă

$$M_2 = \frac{G}{\cos \psi} f_r \frac{R_B + R_R}{R_R} = \frac{(9000 + 3500)\, 9{,}81}{\cos 30°} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \times$$

$$\times \frac{1{,}120 + 0{,}250}{0{,}250} = 388 \text{ N.m},$$

$$M_3 = \frac{G}{\cos \psi} f_a \frac{R_B \cdot R_F}{R_R} = \frac{(9000 + 3500)\, 9{,}81}{\cos 30°} \cdot 0{,}01 \times$$

$$\times \frac{1{,}120 \cdot 0{,}050}{0{,}250} = 317 \text{ N.m}.$$

Momentul total este

$$M_{tot} = M_1 + M_2 + M_3 = 13\,014 + 388 + 317 = 13\,719 \text{ N.m}.$$

Se observă că momentul necesar învingerii frecărilor în reazeme reprezintă, față de momentul necesar ridicării materialului în tambur,

$$\frac{M_2 + M_3}{M_1} \cdot 100 = \frac{388 + 317}{13\,014} \cdot 100 = 5{,}4\%.$$

Puterea necesară acționării are valoarea

$$N = M_{tot} \cdot \omega = 13\,719 \cdot 0{,}733 = 10\,056 \text{ W} \cong 10 \text{ kW}.$$

Admițînd $\eta = 0{,}8$ și $k = 1{,}2$, rezultă puterea motorului de acționare

$$N_{mot} = k \frac{N}{\eta} = 1{,}2 \cdot \frac{10}{0{,}8} = 15 \text{ kW}.$$

5. CONCLUZII

Lucrarea permite determinarea caracteristicilor geometrice, funcționale și puterii necesare acționării amestecătoarelor pentru materiale pulverulente și granulare, cu funcționare discontinuă (pe șarje) cu tambur cilindric orizontal rotativ.

Alegerea corectă a gradului de umplere a tamburului are efecte favorabile atît asupra intensificării amestecării, cît și asupra reducerii puterii necesare acționării, în sensul celor arătate mai sus.

Exemplul de calcul prezentat arată că puterea necesară învingerii frecărilor în sistemul de rezemare al tamburului este neglijabilă în raport cu cea necesară procesului de amestecare, deci puterea necesară acționării tamburului se poate determina numai din considerentul ridicării materialului în tambur.

Relațiile prezentate se pot utiliza și pentru determinarea puterii necesare acționării altor tipuri de utilaje cu tambur rotativ (cuptoare, uscătoare, răcitoare) la care rezistențele în sistemul de rezemare al tamburului nu sînt de neglijat.

Primit în redacție la 5 aprilie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. IU. I. MAKAROV, *Apparatî dlia smeșeniia sîpucih materialov*, Moskva, Mașinostroenie, 1973.
2. Z., ŠTĚRBÁČEK, P. TAUSK, *Amestecarea în industria chimică*, București, Edit. Tehnică, 1969 (traducere din limba cehă).
3. M. RENERT, *Calculul și construcția utilajului chimic*, vol. II, București, Edit. Didactică și Pedagogică, 1971.

REGIMUL NEPERMANENT DE EXPLOATARE A INSTALAȚIEI DE STINGERE A GRUPURILOR HIDROENERGETICE

de I. SETEANU și M. ERHAN

Institutul Politehnic București

Se analizează modelul fizic și algoritmul de calcul numeric al instalației de stingere pentru grupurile hidroenergetice. Sistemul este compus dintr-un complex de rezervoare, compresoare de aer, dispozitive de închidere și manevră în conductele de legătură și ansamblul duzelor de stingere și drenaj.
Se prezintă parametrii geometrici, termodinamici și hidraulici ai sistemului și ecuațiile de desfășurare a procesului precum și schema numerică de rezolvare a acestora. Se indică rezultatele obținute cu ajutorul unui program în limbaj PASCAL HISOFT, insistîndu-se asupra posibilității optimizării alegerii mărimilor caracteristice în condițiile respectării restricțiilor de exploatare.

1. MODELUL FIZIC

Sistemul stabil de stingere a incendiilor la hidrogeneratoare cu ajutorul apei pulverizate este compus dintr-un complex de rezervoare cu pernă de aer sub presiune, cuplat la un grup de compresoare (fig. 1). În cursul unei acțiuni de stingere, în zona de incendiu se pulverizează apă printr-un sistem de duze amplasate pe un dispozitiv inelar conectat la conducta magistrală. Operația de stingere se desfășoară în două etape de cîte circa 5 minute, impunîndu-se ca debitul de lichid la sfîrșitul fiecărei etape să nu scadă sub 30 l/s. În etapa a II-a deficitul de presiune, datorat scăderii nivelului apei în rezervoare în prima etapă, este compensat prin micșorarea pierderilor de sarcină hidraulică în rețea, ca urmare a intercalării unei zone bypass. Presiunea apei în conducta magistrală are mărimea între 6 și 9,5 bari. Se impune verificarea parametrilor de bază termodinamici și hidraulici ai sistemului precum și alegerea numărului necesar de rezervoare (de volum modular circa 20 m^3) pentru a se putea asigura posibilitatea a două stingeri succesive.

2. MODELUL MATEMATIC

Pentru o configurație geometrică dată a sistemului, cu parametrii hidraulici precizați, se stabilește dependența dintre temperatura și presiunea aerului în rezervoare și evoluția în timp a debitului de apă în cursul unei operații de stingere. Operația de umplere a rezervoarelor, premergătoare manevrelor de stingere, se efectuează în condiții de echilibru termodinamic cu mediul ambiant, neglijîndu-se aportul de debit în timpul procesului de stingere.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 5, 1988, P. 515–522

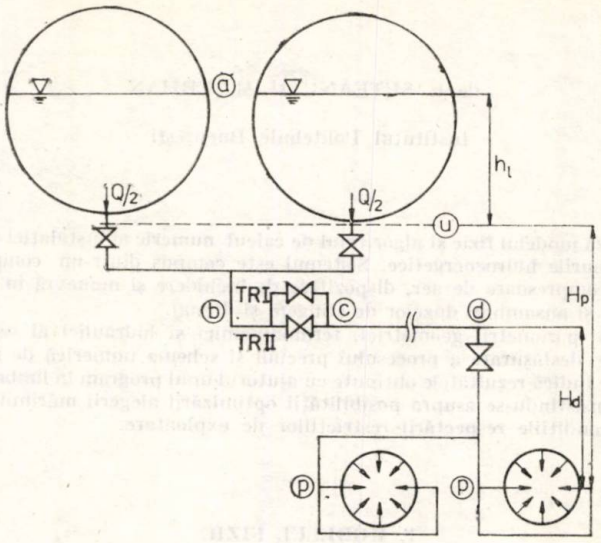


Fig. 1

a. Primul principiu al termodinamicii pentru faza aer are expresia :

$$\frac{dQ_g}{dt} = \frac{dU_g}{dt} + p_g \frac{dV_g}{dt}, \tag{1}$$

unde

Q_g reprezintă căldura schimbată de masa de aer cu apa din rezervor și mediul extern prin pereți ;

dU_g — variația energiei interne a aerului : $dU_g = m_g c_g dT_g$;

p_g — presiunea pernei de aer din rezervor ;

dV_g — variația volumului de aer în timpul procesului de stingere ca urmare a golirii rezervorului ;

dT_g — variația temperaturii absolute a aerului.

b. Faza aer se consideră un gaz ideal întrucît parametrii R_g (constanta gazului) și c_g (căldura specifică) depind slab de presiune, temperatură și umiditatea relativă în domeniul 2—10 bari și 240—300 K :

$$c_v = 720 \text{ J/(Kg K)}; \quad R_g = 287 \text{ J/(Kg K)}.$$

De asemenea, efectele condensării, formării de brumă și gheață se pot neglija întrucît densitatea vaporilor saturați de apă la 15° C este $\rho_v = 0{,}0128$ Kg/m^3, adică pentru un volum de circa 100 m^3 în rezervoare se obține o masă echivalentă de lichid $m_v = 1{,}28$ Kg.

Ecuația lui Clapeyron se scrie :

$$p_g V_g = m_g R_g T_g, \tag{2}$$

unde m_g este masa totală a pernei de aer sub presiune.

c. Schimbul de căldură dintre aerul din rezervoare și mediul extern se poate asimila cu un proces global de conducție termodinamică prin pereții rezervoarelor, incluzînd efectele mai puțin semnificative ale convecției,

$$\frac{dQ_g}{dt} = k\,A_g(T_A - T_g), \tag{3}$$

unde A_g este aria pereților rezervorului în contact cu perna de aer, iar T_A este temperatura mediului ambiant. S-a ales $k = 2{,}5$ w/(m²K).

d. Variația presiunii în sistemul de transport al apei de la rezervor la inelul de stingere include piederile de sarcină pe parcurs. Presiunea apei în punctul de intrare în conductă este dependentă hidrostatic de presiunea aerului din rezervor,

$$p_{1u} = p_g + \rho\, g\, h_1, \tag{4}$$

unde ρ este densitatea apei, g — accelerația gravitației, iar h_1 este adîncimea apei în rezervor, raportată la punctul de intrare în conductă.

Presiunea totală în dreptul duzelor inelului de stingere este

$$p_s = p_{1u} + \rho g H_p - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{Q}{2A_{ab}}\right)^2\left(\Sigma\,\zeta_{ab} + \lambda_{ab}\frac{L_{ab}}{d_{ab}}\right) + \left(\frac{Q}{A_{bd}}\right)^2\left(\Sigma\,\zeta_{bd} + \lambda_{bd}\frac{L_{bd}}{d_{bd}}\right)\right], \tag{5}$$

unde Q este debitul total de stingere, presupus a fi furnizat de două rezervoare, H_p(= 12,8 m — constructiv) este cota punctului de racordare la rezervor a conductei față de cota duzelor inelului de stingere; sectoarele *ab* și *bd* reprezintă traseul rezervor — racord comun, respectiv punctul de racord comun — duza inelului de stingere.

Relația (5) ține seamă atît de pierderile liniare, cît și de pierderile locale în sectoarele menționate.

Pentru supravegherea permanentă a sistemului este prevăzută o duză de control, permanent deschisă, prezența debitului de drenaj semnificînd buna funcționare a complexului de stingere.

Presiunea în dreptul duzei de drenaj, aflată la cota H_d în raport cu duzele de stingere, este

$$p_d = p_s - \rho g H_d, \tag{6}$$

unde $H_d = 12{,}68$ m (constructiv).

Debitul evacuat prin duzele inelului de stingere este

$$Q_s = n_s\,\mu_s\,A_s\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_s - p_a)}, \tag{7}$$

unde n_s este numărul de duze, μ_s — coeficientul de debit echivalent, A_s — secțiunea geometrică a duzei, iar p_a — presiunea atmosferică.

Debitul de drenaj are o expresie asemănătoare,

$$Q_d = \mu_d A_d \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_d - p_a)} \,. \tag{8}$$

e. În timpul exploatării complexului de stingere, procesele termodinamice care afectează perna de aer din rezervor se pot caracteriza global printr-un indice politropic echivalent, variabil în timp. Cunoscînd pentru un interval de timp dat (t_j, t_{j+1}) valorile parametrilor termodinamici temperatură T_g și volumul V_g, indicele politropic echivalent este

$$n_j = 1 + \left(\ln \frac{T_{j+1}}{T_j}\right) \Big/ \left(\ln \frac{V_j}{V_{j+1}}\right). \tag{9}$$

3. ALGORITMUL DE CALCUL

Procesul de stingere se desfășoară în două etape a cîte 30 de secunde fiecare. Se impune ca la sfîrșitul fiecărei etape debitul de apă să nu scadă sub 30 l/s. În acest scop, în cursul celei de a doua etape, ca urmare a golirii parțiale a rezervoarelor, se compensează deficitul de presiune disponibilă prin micșorarea pierderilor de presiune în rețeaua de transport prin intercalarea unei conducte bypass, blocată în prima etapă. Atît în timpul stingerii, cît și în continuare este furnizat debitul de drenaj $Q_d \simeq 1$ l/s. S-a analizat separat și posibilitatea absenței debitului de drenaj.

Secțiunea echivalentă a duzei de stingere s-a ales $\mu_s A_s = 0{,}85 \times \times 10^{-3}$ m^2, respectiv $\mu_d A_d = 0{,}294 \times 10^{-4}$ m^2 pentru duza de drenaj.

Debitul de apă efluent din rezervorul echivalent este dependent de adîncimea h_1, variabilă în timp, a apei în rezervor, raportată la secțiunea de racordare a conductei de evacuare. Volumul apei în rezervor are expresia :

$$V_1 = L_R(r_1 h_1 - r_0), \tag{10}$$

unde L_R este lungimea rezervorului echivalent, iar r_1 și r_0 sînt coeficienții funcției liniare de regresie care aproximează aria segmentului de cerc (secțiunea vie) în rezervor. Parametrii de regresie sînt : $r_1 = 2{,}209$, $r_0 = = 0{,}389$. Debitul evacuat din rezervor este

$$\dot{V}_1 = - L_r r_1 \dot{h}_1. \tag{11}$$

Ecuația de continuitate (debit total egal debit stingere plus debit duză drenaj) reprezintă relația diferențială de calcul a adîncimii apei în rezervor,

$$\dot{V}_1 = - L_R r_1 \dot{h}_1 = i_s \mu_s A_s \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_s - p_a)} + \\ + \mu_d A_d \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_s - \rho g H_d - p_a)} \,, \tag{12}$$

unde p_s este dată de relația (5). Egalitatea (12) devine :

$$-\dot{h}_1 = a_1\sqrt{A - a\dot{h}_1^2} + a_2\sqrt{B - a\dot{h}_1^2}, \tag{13}$$

unde

$$a_1 = \frac{i_s \mu_s A_s}{L_R r_1}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\,; \qquad a_2 = \frac{\mu_a A_a}{L_R r_1}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\,,$$

$$A = p_g - p_a + \rho g h_1 + \rho g H_p = p_g + A_3 h_1 + A_4,$$

$$A_3 = \rho g\,;\; A_4 = \rho g H_p - p_a, \tag{14}$$

$$B = A - \rho g H_a = p_g + A_3 h_1 - A_5,$$

$$A_5 = p_a + \rho g(H_a - H_p),$$

$$a = \frac{\rho}{2} L_R^2 r_1^2 \left(\frac{\zeta_{ab}}{4A_{ab}^2} + \frac{\zeta_{ba}}{A_{ba}^2}\right).$$

Această ecuație constituie o relație implicită diferențială de legătură între $\dot{h}_1$ și h_1, la un moment arbitrar de timp, admițînd că parametrii geometrici, termodinamici și hidraulici incluși în coeficienții (14) sînt cunoscuți.

Ecuația (13) se poate explicita sub forma

$$\dot{h}_1 = -\sqrt{\frac{L_2 + \sqrt{L_2^2 - L_1 L_3}}{L_1}}\,, \tag{15}$$

unde

$$L_1 = K_1^2 - 4(a a_1 a_2)^2,$$

$$L_2 = K_1 K_2 - 2(a\, a_1 a_2)^2 (A + B),$$

$$L_3 = K_2^2 - 4(a_1 a_2)^2 A\, B, \tag{16}$$

$$K_1 = a_1^2 a + a_2^2 a + 1,$$

$$K_2 = a_1^2 A + a_2^2 B.$$

Relația (15) constituie o ecuație diferențială de ordinul întîi care exprimă viteza de variație în timp a adîncimii apei în rezervor în funcție de această adîncime, temperatura T_g a aerului din rezervor și presiunea acestuia în perna de aer sub presiune.

Ecuația diferențială a variației temperaturii aerului se obține prin prelucrarea corespunzătoare a relației (1) :

$$\frac{dQ_g}{dt} = m_g c_g \frac{dT_g}{dt} + L_R r_1 \frac{dh_1}{dt}, \tag{17}$$

adică

$$\frac{dT_g}{dt} = B_1(\dot{Q}_g + B_2 p_g h_1), \tag{18}$$

unde

$$B_1 = R_g T_{g0} / (c_g p_{g0} V_{g0}); \quad B_2 = L_R r_1, \tag{19}$$

deoarece

$$\frac{dV_g}{dt} = -\frac{dV_1}{dt} = L_R r_1 \dot{h}_1. \tag{20}$$

În egalitatea (18), $\dot{Q}_g$ se obţine conform relaţiei (3) în care aria de contact a aerului cu pereţii rezervorului se poate exprima printr-o formulă de regresie parabolică de forma

$$A_g = -4h_1^2 + 4{,}8\, h_1 + 11{,}56. \tag{21}$$

Relaţiile (15) şi (18) constituie un sistem de ecuaţii diferenţiale simultane în care al treilea parametru, presiunea p_g a gazului în rezervor, se presupune constant în intervalul de timp — pas de integrare — la un moment dat. Acest sistem se rezolvă iterativ prin metoda Runge-Kutta de ordinul 3, iar după fiecare etapă de integrare se recalculează volumul V_1 al apei în rezervor, respectiv volumul V_g modificat al aerului. Presiunea aerului se recalculează de fiecare dată în conformitate cu ecuaţia generală de stare,

$$p_g = \frac{p_{g0} V_{g0}}{T_{g0}} \frac{T_g}{V_g}, \tag{22}$$

unde

$$V_{g,\,n+1} = V_{g,\,n} + \dot{V}_1 \Delta t, \tag{23}$$

$$\dot{V}_1 = -L_R r_1 \dot{h}_1. \tag{24}$$

Determinîndu-se în acest fel la fiecare moment de timp parametrii h_1, T_g şi p_g, caracterul global al transformării termodinamice se poate caracteriza prin valoarea instantanee a indicelui politropic echivalent, în conformitate cu relaţia (9).

Mărimea caracteristică a stingerii este reprezentată prin debitul de lichid dat de relaţia (24). La sfîrşitul primei etape de 30 secunde acest parametru atinge valoarea sa minimă ca urmare a scăderii presiunii aerului din rezervor. În acest moment se deschide vana bypass micşorîndu-se substanţial pierderile de sarcină hidraulice în circuitul de stingere. Are loc o creştere rapidă a debitului urmată de o scădere monotonă a acestuia cu condiţia ca la sfîrşitul celei de a doua etape debitul de stingere să fie conform cu cerinţele de exploatare, cel puţin egal cu 30 l/s.

4. REZULTATE ŞI CONCLUZII

Pentru rezolvarea numerică a modelului de analiză prezentat mai sus s-a întocmit un program de calcul în limbaj PASCAL HISOFT tipic metodei de integrare Runge-Kutta III. Datele de intrare includ parametrii geometrici şi hidrodinamici ai sistemului indicaţi anterior. Condiţiile ini-

țiale se referă la parametrii variabili calculați în conformitate cu algoritmul prezentat :

— adîncimea apei în rezervor, $h_{10} = 1{,}30$ m ;

— temperatura aerului, $T_{g0} = 278$ K ;

— presiunea aerului, $p_{g0} = 950\,000$ N/m².

Pasul de timp al integrării numerice s-a ales $\Delta t = 2$ secunde. O selecție a rezultatelor numerice obținute este prezentată în tabelul 1 pentru varianta cu duză de drenaj. Debitul la sfîrșitul primei etape (300 s) este $\dot{V}_1 = 30{,}77$ l/s > 30 l/s. Deschiderea vanei bypass are ca rezultat creșterea acestui debit la valoarea $\dot{V}_1 = 33{,}42$ l/s, iar la sfîrșitul etapei a doua de stingere (600 s) se obține valoarea finală $\dot{V}_1 = 31{,}35$ l/s. Acest rezultat optimizat s-a obținut prin tatonări succesive, ca urmare a modificării lungimii rezervorului echivalent, de secțiune constantă, $L_R = 17{,}7$ m. Mărind această valoare se obțin mărimi superioare ale debitelor finale, respectiv valori mai scăzute în cazul micșorării acestei lungimi. Eliminarea debitului de drenaj ar avea ca rezultat posibilitatea micșorării capacității rezervoarelor de stingere dar ar avea efecte negative asupra fiabilității în funcționare a sistemului.

Algoritmul propus se remarcă printr-o mare stabilitate numerică și o elasticitate deosebită în modificarea parametrilor fizici caracteristici, specifici situațiilor concrete analizate.

Tabelul 1

h_1	T_g	p_g (10^5)	t	$\dot{V}_1$	n	V_g
m	K	N/m²	s	l/s	—	m³
1,29	277,58	9,4	10	32,94	1,395	87,29
1,28	277,17	9,4	20	32,85	1,397	87,62
1,27	276,77	9,4	30	32,77	1,397	87,94
1,27	276,36	9,3	40	32,69	1,396	88,27
1,26	275,96	9,3	50	32,61	1,396	88,60
1,25	275,26	9,2	60	32,52	1,392	88,92
1,24	275,16	9,2	70	32,44	1,391	89,25
1,23	274,77	9,1	80	32,36	1,391	89,57
1,22	274,38	9,1	90	32,29	1,392	89,90
1,22	274,00	9,0	100	32,21	1,390	90,22
1,21	273,62	9,0	110	32,13	1,392	90,54
1,20	273,24	8,9	120	32,05	1,391	90,86
1,19	272,86	8,9	130	31,98	1,390	91,18
1,18	272,49	8,8	140	31,90	1,390	91,50
1,18	272,11	8,8	150	31,83	1,391	91,82
1,17	271,75	8,8	160	31,75	1,390	92,14
1,16	271,38	8,7	170	31,68	1,390	92,45
1,15	271,02	8,7	180	31,60	1,390	92,77
1,14	270,66	8,6	190	31,53	1,389	93,08
1,14	270,30	8,6	200	31,46	1,388	93,40
1,13	269,95	8,6	210	31,39	1,389	93,71
1,12	269,60	8,5	220	31,32	1,390	94,03
1,11	269,25	8,5	230	31,25	1,389	94,34
1,10	268,90	8,4	240	31,18	1,388	94,65
1,10	268,56	8,4	250	31,11	1,388	94,96
1,09	268,22	8,4	260	31,04	1,388	95,27
1,08	267,88	8,3	270	30,97	1,388	95,58
1,07	267,54	8,3	280	30,90	1,387	95,89
1,06	267,21	8,3	290	30,84	1,386	96,20
1,06	266,88	8,2	300	30,77	1,388	96,51
1,05	266,52	8,2	310	33,37	1,388	96,84
1,04	266,17	8,1	320	33,29	1,388	97,17
1,03	265,81	8,1	330	33,21	1,387	97,50
1,02	265,46	8,1	340	33,14	1,386	97,84
1,01	265,12	8,0	350	33,06	1,386	98,17
1,01	264,77	8,0	360	32,99	1,385	98,50
1,00	264,43	8,0	370	32,91	1,386	98,83
0,99	264,09	7,9	380	32,84	1,385	99,15
0,98	263,75	7,9	390	32,77	1,384	99,48
0,97	263,42	7,8	400	32,69	1,385	99,81
0,96	263,09	7,8	410	32,62	1,386	100,14
0,95	262,76	7,8	420	32,55	1,385	100,46
0,95	262,43	7,7	430	32,48	1,384	100,79
0,94	262,10	7,7	440	32,41	1,383	101,11
0,93	261,78	7,7	450	32,34	1,384	101,43
0,92	261,46	7,6	460	32,27	1,384	101,76
0,91	261,14	7,6	470	32,20	1,385	102,08
0,91	260,83	7,6	480	32,13	1,386	102,40
0,90	260,51	7,5	490	32,07	1,384	102,72
0,89	260,20	7,5	500	32,00	1,384	103,04
0,88	259,90	7,5	510	31,93	1,383	103,36
0,87	259,59	7,4	520	31,86	1,382	103,68
0,86	259,28	7,4	530	31,80	1,383	104,00
0,86	258,98	7,4	540	31,73	1,381	104,32
0,85	258,68	7,3	550	31,67	1,381	104,63

Tabelul 1 (continuare)

h_1	T_g	p_g (10^5)	t	$\dot{V}_1$	n	V_g
m	K	N/m^2	s	1/s	—	m^3
0,84	258,38	7,3	560	31,60	1,382	104,85
0,83	258,09	7,3	570	31,54	1,381	105,27
0,82	257,79	7,3	580	31,48	1,382	105,58
0,82	257,50	7,2	590	31,41	1,380	105,89
0,81	257,21	7,2	600	31,35	1,381	106,21

Valoarea critică $n = 1{,}4$ a indicelui politropic corespunde transformării izentropice pentru aerul din rezervor. Rezultatele numerice arată valori mai scăzute ale acestui indice, semnificînd un schimb termic între aerul din rezervor şi mediul exterior.

Primit în redacţie la 30 aprilie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. V. L. STREETER, *Handbook of Fluid Dynamics*, Mc. Graw Hill, New York, 1961.
2. S. L. S. IACOBI, J. S. KOWALIK, J. T. PIZZO, *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice Hall, Engelewood Cliffs, New Jersey, 1972.

S.-S. CHEN, *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures* (Vibrația structurilor cilindrice circulare indusă de curgere), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 464 p., 204 fig.

Vibrațiile produse de modul de curgere al fluidelor (flow-induced vibrations) reprezintă un domeniu nou de cercetare ale cărui fenomene aparțin la trei discipline : mecanica structurilor, vibrațiile mecanice și dinamica fluidelor.

Răspunsul dinamic este studiat pentru structuri cufundate în fluide, pentru structuri conducînd fluide și structuri supuse unor fluide în mișcare. Cercetările urmăresc interacțiunea dintre forțele dinamice dezvoltate de fluide și răspunsul dinamic al structurilor dependent de inerție, de amortizare și de forțele elastice. Fenomene vibratorii produse de curgerea fluidelor intervin în numeroase domenii tehnice cum ar fi : industria aerospațială, instalații generatoare de putere și de transmitere (turbine, schimbătoare de căldură, componente de reactoare nucleare etc.), construcții inginerești (poduri, clădiri, coșuri de fum etc.), platforme marine etc. Cercetarea acestor fenomene vibratorii trebuie să conducă la reguli și metode de calcul pentru proiectarea structurilor astfel încît fenomenele vibratorii să fie eliminate și structurile să prezinte siguranță deplină.

În prezent, cercetările domeniului „flow-induced vibrations" s-au intensificat din următoarele considerente : a) folosirea de materiale cu rezistențe superioare a condus la piese cu rigidități reduse, ceea ce mărește pericolul vibrațiilor ; b) dezvoltarea unor tehnologii moderne, mai ales în domeniul nuclear, conduce la creșterea vitezelor de vehiculare a fluidelor, ceea ce de asemenea contribuie la apariția vibrațiilor ; c) interacțiunea dintre fluid și structură constituie o problemă de mare complexitate, cu implicații teoretice și tehnice majore, foarte atrăgătoare atît pentru cercetători, cît și pentru proiectanți.

Lucrarea, împărțită în 11 capitole și 3 anexe, cuprinde rezultatele cercetărilor în domeniul respectiv obținute de către multe unități industriale și de cercetare, foarte bine dotate din punct de vedere tehnic pentru determinări experimentale. Această afirmație este susținută de numeroasele grafice și figuri din toate capitolele cărții în care sînt prezentate rezultatele experimentale ale altor cercetători, cărora autorul le mulțumește cu recunoștință.

În introducere (cap. 1), se dau exemple de probleme în care curgerea produce vibrații, se precizează parametrii care intervin și mecanismele prin care se induc vibrațiile, ca răspuns dinamic la acțiunea fluidelor.

În capitolele 2, 3 4 se analizează vibrațiile unor corpuri cilindrice sau învelișuri cilindrice circulare într-un fluid liniștit. Sînt cercetate inerția fluidului, fenomenele de amortizare și răspunsul structurii în diferite situații și teorii de curgere, pentru cilindri izolați, pentru grupuri de cilindri și pentru învelișuri circulare cilindrice.

În capitolele 5 și 6 se analizează răspunsul dinamic al structurilor prin care se transportă fluide, cum sînt conductele (cap. 5) sau cilindrii circulari (cap. 6) considerați ca învelișuri subțiri. În cazul conductelor sînt studiate vibrațiile libere, caracteristicile de frecvență, stabilitatea condițiilor de margine și efectele diferiților parametri pentru conducte drepte și conducte curbe. Studiul cilindrilor circulari în cazul curgerii axiale are în vedere în special influența exterioară a curentului, ecuațiile de mișcare și răspunsul dinamic în cazul unui singur cilindru, a unui grup de cilindri și a unui șir de cilindri.

În capitolele 7, 8, 9, 10 se analizează fenomenele vibratorii în cazul acțiunii transversale a fluidului asupra structurilor. Se studiază regimul de curgere, forțele dinamice de interacțiune, răspunsul dinamic al structurii pentru un singur cilindru (cap. 7), pentru un șir de cilindri (cap. 8), pentru doi cilindri în diferite situații relative (cap. 9) și pentru un grup de cilindri (cap. 10), în cazul cărora accentul principal cade asupra problemelor de instabilitate.

În ultimul capitol (al 11-lea) sînt prezentate unele considerații de proiectare, bazate pe stadiul actual de cunoaștere în domeniul vibrațiilor induse de curgere. Se indică în acest sens o schemă sugestivă privind modul în care trebuie să decurgă etapele de proiectare, subliniindu-se problemele ce trebuie rezolvate, parametrii ce trebuie urmăriți atît ai fluidului, cît și ai structurii, precum și experimentările pe modele ce trebuie efectuate.

Avînd un conţinut deosebit de bogat, teoretic şi experimental, practic toată bibliografia cunoscută în domeniul respectiv, cartea „Flow-induced vibration of circular cylindrical structures" reprezintă o carte de referinţă care trebuie studiată de toţi proiectanţii de instalaţii de putere, construcţii hidrotehnice etc.

Lucrarea, deşi cuprinde probleme de mare complexitate şi înalt nivel ştiinţific, este scrisă cu mult discernămînt, este clară, convingătoare şi foarte utilă pentru proiectanţi în luarea măsurilor pentru eliminarea distrugerilor posibile datorită vibraţiilor induse de curgere. În acest scop trebuie acţionat asupra dinamicii fluidului, asupra dinamicii structurii sau combinat asupra amîndorora ; în lucrare sînt indicaţii precise asupra tuturor acestor posibilităţi, ceea ce măreşte considerabil valoarea cărţii.

Prin conţinut şi mod de tratare, cartea se adresează cercetătorilor, inginerilor proiectanţi din toate domeniile industriale cu instalaţii în care intervin fluide precum şi studenţilor din învăţămîntul tehnic superior.

N. Posea

R. KING (sub red.), *Flow Induced Vibrations. Proceedings of the 1st International Conference Bowness-on-Windermere, England, 12—14 May, 1987* (*Vibraţii induse de curgere.* Lucrările primei conferinţe internaţionale), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 603 p., numeroase figuri.

Lucrarea conţine 57 de articole ştiinţifice prezentate la prima conferinţă internaţională privind vibraţiile produse de curgerea fluidelor, ţinută la Bowness-on-Windermere în Anglia, în perioada 12—14 mai, 1987.

Articolele sînt grupate în următoarele secţiuni : A. Analiza modului de curgere şi forţele excitatoare asupra rîndurilor de cilindri (4 articole) ; B. Instabilitatea elastică în fluid a rîndurilor de cilindri într-un curent transversal (3 articole) ; C. Analiza şi simularea structurilor inginereşti I (4 articole) ; D. Structuri şi maşini hidraulice I (7 articole) ; E. Vibraţiile fasciculelor de tuburi datorită unei curgeri bifazice, formarea vîrtejurilor şi fenomene acustice (4 articole) ; F. Poduri şi elemente înrudite (5 articole) ; G. Structuri şi maşini hidraulice II (4 articole) ; H. Formele vîrtejurilor (5 articole) ; J. Autovibraţii (5 articole) ; K. Dinamica structurilor şi comportarea tuburilor schimbătoarelor de căldură (5 articole) ; L. Analiza şi simularea structurilor inginereşti II (3 articole) ; M. Vibraţii produse de curgeri axiale şi inelare (5 articole) ; N. Expuneri informative (3 articole).

Toate articolele tratează probleme în strînsă legătură cu tematica conferinţei, prezentînd cercetări teoretice şi experimentale valoroase, de mare importanţă şi actualitate.

În prezent, vibraţiile induse de modul de curgere al fluidelor este un domeniu major de cercetare cu implicaţii deosebite pentru proiectarea modernă a tuburilor şi învelişurilor prin care sau în jurul cărora circulă fluide. Astfel de situaţii intervin frecvent în schimbătoarele de căldură, în generatoarele de aburi, în instalaţiile energetice, nucleare etc.

Ruperile produse de vibraţiile induse de modul de curgere au evidenţiat importanţa problemei şi ţinînd seama atît de marile dificultăţi tehnologice şi tehnice, cît şi de costul excesiv pentru repararea unor tuburi avariate din instalaţiile menţionate, rezultă că sînt necesare, în continuare, multiple cercetări pentru elaborarea unor normative adecvate de proiectare în acest domeniu.

Articolele cuprinse în această lucrare sintetizează realizările obţinute în anumite direcţii esenţiale privind modul de curgere al fluidului şi comportarea structurilor şi evidenţiază unele aspecte de bază în multe cazuri concrete de structuri inginereşti, maşini hidraulice, schimbătoare de căldură etc.

Majoritatea articolelor sînt structurate la fel, adică cuprind stadiul problemei, cercetările teoretice, cercetările experimentale, rezultatele obţinute şi concluzii şi sînt redactate succint dar cu claritate, ceea ce conferă unitate întregii lucrări.

Avînd în vedere nivelul ştiinţific ridicat al articolelor, importanţa şi utilitatea rezultatelor obţinute, atît teoretică, cît şi practică, cartea editată de Dr. Roger King şi publicată de editura Springer constituie o lucrare de referinţă în domeniul vibraţiilor produse de modul de curgere al fluidelor care va influenţa mult cercetările viitoare.

Lucrarea se adresează cercetărilor şi inginerilor proiectanţi din domeniul instalaţiilor industriale. De asemenea, poate fi folosită de către studenţi atît la elaborarea unor proiecte speciale, cît mai ales ca model de cum se efectuează şi cum se redactează o lucrare de cercetare ştiinţifică.

N. Posea

J. R. COLBOURNE, *The Geometry of Involute Gears* (Geometria angrenajelor evolventice), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 532 p., 217 fig.

Monografia tratează geometria angrenajelor cilindrice cu dantură evolventică. În cele două părţi ale lucrării sînt analizate angrenajele clindrice cu dinţi drepţi (cap. 1—21), cu dinţi înclinaţi şi elicoidali (cap. 13—17).

După formularea legii angrenării şi a implicaţiilor acesteia asupra formei profilelor conjugate, se definesc analitic ecuaţiile evolventei, elementele geometrice ale danturii şi ale cremalierei de referinţă (cap. 1, 2 şi 13).

Se analizează apoi, pentru un agrenaj cu axele de rotaţie paralele (roată dinţată — cremalieră şi două roţi dinţate), relaţiile fundamentale ale geometriei şi cinematicii angrenării. În continuare se defineşte gradul de acoperire şi se tratează, cu interpretările geometrice şi fizice adecvate, fenomenul de interferenţă şi jocurile din angrenaj (cap. 3, 4 şi 14).

Similar sînt analizate aceleaşi probleme pentru angrenajele cu axe încrucişate (elicoidale — cap. 15).

Ca un corolar al capitolelor anterioare, sînt descrise principial tehnologiile de danturare prin copiere şi rostogolire (cap. 5 şi 16) respectiv subtăierea (cap. 7).

Deplasările de profil, efectele şi limitele acestora precum şi unele recomandări pentru proiectare sînt prezentate doar principial (cap. 6).

Surprinde faptul că nu sînt abordate modificările discrete de profil (flancarea de cap şi picior, flancarea laterală, bombarea) şi prelucrarea cu scule protuberate.

Cîteva metode specifice de măsurare a danturii (grosimea dinţilor pe coarda constantă, cota peste dinţi şi peste role) sînt descrise în cap. 8.

Fără o justificare raţională, se tratează în principiu geometria angrenajelor neevolventice (cap. 9).

Ca o aplicaţie directă a geometriei, se prezintă relativ sumar relaţiile de definiţie ale cinetostaticii angrenării şi ale tensiunlor principale (cap. 10, 11 şi 17).

În încheierea primei părţi sînt analizate diferenţele specifice pentru angrenajele interioare cu dinţi drepţi (cap. 12).

Fiecare capitol este completat cu exemple de calcul în sistemul „pas diametral" şi „modul".

Nivelul ştiinţific al lucrării şi varietatea problemelor abordate asigură iniţierea inginerilor de profil mecanic în domeniul geometriei angrenajelor evolventice.

Simbolizarea conform normelor AGMA poate fi urmărită cu unele dificultăţi de cititorul din Europa familiarizat cu simbolizarea ISO.

N. S. Gheorghiu

LJ. T. GRUJIĆ, A. A. MARTYNYUK, M. RIBBENS-PAVELLA, *Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations* (Stabilitatea sistemelor mari la perturbaţii structurale şi singulare), seria *Lecture Notes in Control and Information Sciences, (M. Thoma, A. Wyner eds.)*, vol. **92** (Note de lectură în teoria informaţiei şi a reglării), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo 1987, 368 p., 22 fig.

Lucrarea constituie o prezentare la zi a rezultatelor fundamentale privind teoria stabilităţii în sens Liapunov cu diferite extensii şi aplicaţii în special pentru cazul sistemelor mari. Studiul, care, în esenţă, este o traducere (cu unele adăugiri şi îmbunătăţiri) a unei versiuni din limba rusă publicată în 1982 cu ocazia celei de-a 125-a aniversări a zilei de naştere a lui A.M. Liapunov, prezintă într-un cadru riguros matematic rezultate clasice şi recente asupra teoriei

stabilității Liapunov sub formă de definiții și proprietăți (propoziții, teoreme, corolare) precise, ilustrate prin numeroase exemple numerice, dintre care unele cu caracter real, care se referă în special la sisteme mari variabile în timp. Se insistă asupra prezentării metodelor generale de analiză a stabilității structurale pentru sisteme mari, inclusiv sisteme cu perturbații singulare. Se arată metode și tehnici de construcție a funcțiilor Liapunov scalare, vectoriale sau matriceale utilizate în analiza stabilității sistemelor neliniare variabile în timp. Rezultatele astfel obținute sînt aplicate la analiza stabilității sistemelor electrice de putere.

Capitolul 1 prezintă un rezumat al teoriei stabilității Liapunov în general. Se tratează teoria clasică a stabilității în sens Liapunov, insistîndu-se asupra condițiilor de stabilitate și a criteriilor de stabilitate absolută a sistemelor invariante în timp și a celor variabile; asupra stărilor de echilibru, metodei a doua a lui Liapunov, precum și asupra proprietăților de stabilitate a sistemelor singulare perturbate. Se arată că proprietățile de stabilitate trebuie să fie testate pe mulțimi variabile în timp care surprind nestaționaritatea și neliniaritatea sistemelor analizate. Condițiile de stabilitate Liapunov sînt exprimate în termenii existenței unei funcții (sau familii de funcții) cu proprietăți speciale numită funcție Liapunov. O problemă de cea mai mare importanță pentru aplicațiile practice efective în analiza stabilității sistemelor o constituie construcția unei astfel de funcții pentru un sistem dat. Cu cît sistemele sînt mai complexe, de dimensinui mai mari, cu atît problema construcției acestor funcții este mai dificil de rezolvat. În capitolele următoare lucrarea insistă asupra prezentării celor mai eficiente metode și tehnici de asociere a unor funcții Liapunov pentru sisteme mari supuse la perturbații singulare sau structurale.

Capitolul al 2-lea este dedicat studierii stabilității sistemelor în primă aproximație. Aici se introduce conceptul de funcție Liapunov matriceală, care se dovedește a fi un instrument matematic foarte puternic în ceea ce privește elaborarea de noi criterii de stabilitate. Se prezintă principiul comparației în raport cu care se analizează stabilitatea unui sistem utilizînd informații furnizate de aproximantul său de prim ordin.

Capitolul al 3-lea prezintă un număr de metode și tehnici de descompunere și agregare a sistemelor mari în studiul stabilității acestora. În acest context analiza stabilității unui sistem mare este considerată prin rezolvarea următoarelor probleme :

— Să se descompună sistemul în mai multe subsisteme interconectate și apoi să se determine o agregare a acestuia care să permită stabilirea de condiții în care stabilitatea sa Liapunov poate fi dedusă din stabilitatea sub-sistemelor și din proprietățile calitative ale interconectărilor;

— Să se descompună sistemul în mai multe subsisteme interconectate și apoi să se determine o agregare a acestuia care să permită reducerea numărului și complexității condițiilor sub care proprietatea de stabilitate Liapunov a întregului sistem este dedusă din proprietățile subsistemelor interconectate fără a utiliza informații asupra stabilității subsistemelor. Instrumentul matematic utilizat pentru rezolvarea acestor probleme este acela de funcție Liapunov vectorială (Bellman). Sistemul agregat asociat unui sistem mare este utilizat pentru a obține condiții algebrice simple de stabilitate a sistemelui original folosind funcțiile Liapunov ale subsistemelor. Aspectul remarcabil al modului de rezolvare a problemelor de mai sus privind stabilitatea sistemelor mari, prezentat în acest capitol, constă într-o simplificare calitativă a condițiilor de stabilitate, reduse la un test de stabilitate asupra unei matrice agregate cu elemente constante a cărei dimensiune este egală cu numărul de subsisteme în care sistemul original a fost descompus.

Teoria stabilității sistemelor nestaționare, neliniare, de mari dimensiuni supuse la perturbații singulare, precum și la variații arbitrare de structură este prezentată în capitolul al 4-lea. Metodele de agregare stabilite aici sînt acompaniate de condiții algebrice simple exprimate cu ajutorul funcțiilor Liapunov ale subsistemelor.

Capitolul al 5-lea tratează stabilitatea sistemelor electrice de putere. Aceste sisteme sînt formate din generatoare de energie electrică, stații de distribuție și linii de transport a acesteia. Sistemele electrice de putere trebuie să funcționeze continuu, la diferite regimuri de livrare a energiei electrice și în condițiile în care această energie, după cum este bine cunoscut, nu se poate stoca. În aceste condiții stabilitatea unor astfel de sisteme este deosebit de importantă. Lucrarea furnizează metode directe pentru rezolvarea problemelor practice de stabilitate a sistemelor de putere, aducînd totodată în prim plan dificultățile care există, precum și noi direcții de abordare a problemei. Se prezintă modele matematice pentru sisteme electrice de putere, rezultate privind simularea numerică reală în diferite regimuri de funcționare a acestora, precum și funcțiile Liapunov scalare și vectoriale asociate pentru studiul stabilității. Acest capitol este de o importanță deosebită prezentînd detaliat o metodologie de analiză a stabilității sistemelor dinamice mari bazată pe dezvoltările teoretice din capitolele anterioare.

În acest context, lucrarea reprezintă unul din cele mai importante studii asupra stabilității sistemelor mari supuse la perturbații structurale și singulare care într-un cadru matematic

elevat prezintă rezultate fundamentale clasice și recente obținute de autori și de diferiți cercetători, inclusiv români (A. Halanay etc.), fiind totodată de un real folos practicienilor interesați în problema stabilității sistemelor dinamice.

N. Andrei

I. LASIECKA, R. TRIGGIANI (sub red.), *Control Problems for Systems Described by Partial Differential Equations and Applications* (Probleme de control pentru sisteme descrise prin ecuații diferențiale parțiale și aplicații), *Proceedings of the IFIP-WG 7.2 Working Conference, Gainesville, Florida, USA, February 3—6, 1986*, seria *Lecture Notes in Control and Information Sciences (M. Thoma, A. Wyner eds.)*, vol. **97** (Note de lectură în teoria informației și a reglării), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 400 p.

Lucrarea pe care o recenzăm conține integral comunicările susținute la conferința de lucru a IFIP care a avut loc la Gainesville, Florida, S.U.A., între 3—6 februarie 1986 și a fost consacrată conducerii sistemelor descrise de ecuații cu derivate parțiale precum și aplicațiilor acestui domeniu. Conferința s-a orientat în special asupra următoarelor teme : control optimal liniar și neliniar, tehnici numerice și de calcul pentru probleme de control, stabilitate, tehnici variaționale în problemele de control.

Aparatul matematic evoluat pe care se bazează întreaga teorie a controlului optimal face ca nivelul de tratare al tuturor comunicărilor să fie strict specializat, iar modul de tratare succint.

Prima parte a lucrării grupează referințele de sinteză susținute în plenum-ul conferinței. Dintre acestea vom menționa : „Cu privire la problema de control a structurilor spațiale mari" (A. V. Balakrishnan), „Problema de timp optimal pentru o clasă de sisteme neliniare distribuite" (Viorel Barbu) și „Controlul Pareto al sistemelor distribuite " (J. L. Lions.) Dacă prima dintre acestea se referă la o aplicație concretă în domeniul aeronauticii, următoarele două oferă deschideri teoretice în abordarea sistemelor distribuite. Tot în prima parte este întreprins un studiu asupra soluțiilor discontinue în probeme de optimizare (L. Cesari) ca și asupra controlului optimal în probleme cu frontieră liberă (A. Friedman).

Partea a doua a lucrării cuprinde un număr de 26 comunicări. Fără a încerca un rezumat al fiecăreia (rezumatele sînt accesibile în cuprinsul lucrării) se vor evidenția cîteva dintre comunicările susceptibile de a trezi un interes mai larg în plan teoretic.

Problema echivalenței unor modele de control optimal și aplicațiile sale sînt studiate în „Probleme echivalente de control și aplicații" (J. P. Bonnans și D. Tiba). Se are în vedere echivalența problemelor de control descrise de inegalități variaționale cu problemele cu ecuație liniară de stare și restricții mixte (stare-comandă) precum și invers, posibilitatea de a aproxima probleme cu restricții asupra stării prin probleme cu inegalități variaționale.

În „Diferențiabilitate Min-Max și aplicații în controlul optimal (M. C. Defour și J. P. Zalèsio) se propune o metodă pentru calculul lui $g(t)$, unde $g(t)$ este descris de funcționala $G(t, x, y)$ și problema Min-Max asociată :

$$g(t) = \{\text{Min } [\text{Max } G(t, x, y) : y \in Y] : x \in X\}.$$

O contribuție de certă importanță este „Creșterea stabilității prin feedback asupra stării (N. Levan) consacrată posibilităților de a mări stabilitatea în buclă închisă inclusiv a unor sisteme deja stabile într-un sens mai „slab".

O serie de alte contribuții care fac parte din secțiunea a doua sînt orientate direct către aspectele aplicative.

Astfel „Metode matematice pentru controlul răspîndirii bolilor infecțioase" (V. Capasso) are în vedere cazul situațiilor epidemice în centre multiple de contaminare și își propune determinarea unor strategii de control alternative : cost minim sau timp minim.

O altă aplicație importantă este studiul și proiectarea suprafețelor fono-absorbante, abordate în „Reflectivitatea straturilor de acoperire" (W. W. Hager și R. Rostamian) în care se dă o generalizare pentru unghiuri de incidență oarecare, cazului cînd undele sonore sînt normale la suprafața absorbantă.

Mecanica plăcilor vibrante, în special minimizarea duratei de regim tranzitoriu la plăci vibrante constituie aspectul abordat în „Soluții numerice pentru probleme de control cu timp minim" (W. Krabs și U. Lamp.)

În „Probleme neliniare în controlul sistemelor distribuite" (P. K. C. Wang) sînt analizate problemele de control asociate cu mișcarea roboților cu braț flexibil și cu funcționarea stațiilor spațiale cu componente flexibile.

În ansamblul ei lucrarea constituie un extrem de util tur de orizont asupra rezultatelor recente în domeniul modelării și conducerii sistemelor descrise de ecuații cu derivate parțiale. Progrese teoretice, scheme de soluționare a unor probleme reprezentative din domeniu, prezentarea unor aplicații concrete se reunesc într-un tablou convingător al evoluției rapide a domeniului căruia îi este consacrată lucrarea.

Adresîndu-se matematicienilor și altor specialiști cu pregătire matematică superioară, interesați în controlul optimal, acest volum colectiv este, fără îndoială, o realizare de prestigiu. Notînd prezența specialiștilor români în paginile sale (Viorel Barbu, D. Tiba, ș.a) precum și frecvența cu care sînt citate alte lucrări românești în bibliografia aferentă altor comunicări, nivelul școlii românești de matematici aplicate capătă o nouă confirmare mondială.

D. Rădulescu

F. KAPPEL, K. KUNISCH (sub red.), *Distributed Parameter Systems* (Sisteme cu parametri distribuiți), *Proceedings of the 3rd International Conference, Vorau, Styria, Austria, July 6—12, 1986*, seria *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (*M. Thoma, A. Wyner eds.*), vol. **102** (Note de lectură în teoria informației și a reglării), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 343 p.

Conducerea sistemelor cu parametri distribuiți este un domeniu ce se dezvoltă rapid, conținînd numeroase probleme de cercetare incitante. Cartea cuprinde lucrările conferinței internaționale asupra sistemelor cu parametri distribuiți, ce a avut loc la Vorau în anul 1986 și care a avut drept scop stimularea schimburilor de idei și difuzarea celor mai recente rezultate. Trebuie remarcat încă de la început nivelul științific deosebit al celor 19 lucrări selecționate (la conferință au participat 38 de cercetători din 12 țări) ca și diversitatea subiectelor abordate.

Teoria sistemelor cu parametri distribuiți se afirmă ca un domeniu de cercetare cu aplicații practice deosebite, în special în studiul propagării undelor electromagnetice și a sistemelor hidro- și termodinamice.

Necesitatea modelării dinamicii proceselor ce apar în diferite situații din realitate a condus la apelarea unui aparat matematic sofisticat, bazat pe ecuații cu derivate parțiale.

Comunicările prezente în lucrare sînt în special teoretice și tratează subiectele alese la un nivel înalt, adresîndu-se mai ales specialiștilor. Remarcăm că majoritatea articolelor au contribuții originale. În continuare vom enumera cîteva din problemele analizate de autori : modelarea vibrațiilor în grinzi flexibile ; conducerea proceselor viscoelastice ; reprezentările spectrale în sistemele cu întîrzieri ; controlul optimal în sistemele funcționale diferențiale ; optimizarea în problemele cu bifurcație ; conducerea prin feed-back în sistemele cu ereditate ; stabilitatea și controlabilitatea în diferite tipuri de sisteme dinamice (ecuații de undă liniare și cvasiliniare cuplate ; plăci omogene, ecuații integrodiferențiale Volterra, sisteme infinit dimensionale).

Lucrările, în ciuda caracterului abstract, prezintă accesibilitate datorită rigurozității demonstrațiilor și coerenței exprimării. Pentru puținele afirmații nesusținute prin demonstrații se fac trimiteri bibliografice.

Aproape toate contribuțiile fac apel la figuri și exemple pentru a facilita înțelegerea metodelor propuse.

Trebuie menționat faptul că majoritatea articolelor, înainte de rezolvarea problemelor propuse, prezintă un scurt istoric precum și stadiul cercetărilor la momentul respectiv.

Cartea conține și articole ce au ca finalitate algoritmii practici, ce pot fi utilizați efectiv în rezolvarea problemelor analizate (de exemplu în conducerea proceselor viscoelastice, sistemele cu întîrzieri, problemele cu bifurcație, etc.). În aceste cazuri sînt schițate și exemple de utilizare.

Prin actualitatea subiectelor abordate, calitatea bibliografiei și prin tendințele de cercetare la nivel mondial ce transpar în acest domeniu nou, dar deosebit de efervescent (conferințele de la Vorau au loc la fiecare 2 ani), cartea este foarte utilă specialiștilor.

O. Gheorghiu

R

F 2557 tj

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

6

1989 -03- 08

TOMUL 47
noiembrie—decembrie
1988

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖNYVTÁRA
EGYETEM HUNYADI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, secretar de redacţie

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*
Membrii:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa la: ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex: 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47, nr. 6 **noiembrie—decembrie 1988**

SUMAR

STUDII

H. DUMITRESCU, I. STELIAN şi AL. DUMITRACHE, Soluţii similare pentru o curgere de tip Coandă 531

C. PESCĂRUŞ şi N. GIURGIUŢEANU, Influenţa variaţiei viscozităţii cu temperatura asupra mişcării unui fluid viscos într-un mediu poros 545

AL. D. STAN, Acumularea gazelor şi tirajul lor către imobile 565

GH. D. PASAT, Dispozitive mecanice de amestecare. Încărcarea hidrodinamică a turbinei cu pale drepte (standard) şi a arborelui dispozitivului de amestecare. II . 577

M. IEREMIA, Voalarea elasto-plastică a plăcilor ortotrope 585

P. BRATU, Dinamica ciurului vibrator bimasic cu funcţionare în rezonanţă 593

NOTE

M. V. SOARE şi I. H. TOADER, Contribuţii la studiul structurilor spaţiale reticulate în triplu strat 605

RECENZII 611

INDEX ALFABETIC 627

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie) numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu:

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărți (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu:

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa: 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

SOLUȚII SIMILARE PENTRU O CURGERE DE TIP COANDĂ

de H. DUMITRESCU, I. STELIAN și AL. DUMITRACHE

INCREST București

Autorii studiază curgerea staționară bidimensională laminară și turbulentă a unui fluid incompresibil care se dezvoltă sub forma unei pînze de jet pe suprafața unui cilindru circular, adică o curgere Coandă. Se arată că această mișcare poate fi aproximată destul de bine cu soluții similare atît în cazul laminar cît și în cel turbulent.

1. INTRODUCERE

Dacă un curent uniform produs de un ajutaj pătrunde într-o regiune stagnantă are loc un amestec între jetul care iese din ajutaj și fluidul stagnant. În plus, dacă există și un perete lateral convex, jetul este deviat cu un anumit unghi înainte de a se desprinde. Acest fenomen de curgere, cunoscut sub numele de efect Coandă și care reprezintă deci tendința unui curent de fluid, care iese dintr-un ajutaj în apropierea unei suprafețe solide curbe, de a se atașa la suprafața respectivă, a atras considerabil atenția în ultimii ani. Interesul major este datorat posibilității aplicării acestui efect la avioanele cu decolare și aterizare scurtă pentru controlul vectorului forței de tracțiune.

În lucrarea prezentă se studiază curgerea staționară bidimensională laminară și turbulentă a unui fluid incompresibil care se dezvoltă sub forma unei pînze de jet pe suprafața unui cilindru circular, adică o curgere Coandă. Se arată că această mișcare poate fi aproximată destul de bine cu soluții similare atît pentru cazul laminar [9], cît și pentru cazul turbulent. În esență este vorba de utilizarea unei transformări de tip Falkner-Skan, cu ajutorul căreia ecuațiile de mișcare, în ambele cazuri, laminar și turbulent, pot fi reduse la o singură ecuație diferențială ordinară, a cărei soluție este prezentată în lucrare. Rezultatele acestei soluții sînt date sub formă de expresii analitice pentru debitul masic antrenat, tracțiune și grosimea pînzei jetului în funcție de unghiul de deviere.

S-a considerat de asemenea posibilitatea măririi forței de tracțiune datorită antrenării fluidului și creșterii astfel a debitului din jet. Unele dispozitive de sustentație utilizate la avioanele cu decolare și aterizare scurtă, care folosesc configurații adecvate de voleți pentru mărimea forței de reacție a jetului, generează curgeri asemănătoare cu curgerea de tip Coandă. Experimental, printr-o anumită dispunere de voleți, s-a obținut o creștere a forței de tracțiune de 37% [5].

Problema considerată aici reprezintă numai o primă aproximație a situației fizice considerate. În realitate, efectul Coandă este mult mai complicat, și pentru tratarea lui completă este necesară o analiză bazată pe soluții nesimilare ale cîmpului curgerii [6]. Considerăm că soluția similară prezentată aici poate servi totuși ca ghid în abordarea mai departe a problemei exacte.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 6, 1988, P. 531—543

II. MODELUL MATEMATIC

Se consideră curgerea staţionară şi bidimensională a unui fluid incompresibil, care se dezvoltă sub forma unei pînze de jet, pe suprafaţa unui cilindru circular. Mişcarea este descrisă într-un sistem de coordonate curbilinii arătat în figura 1. În ipoteza că lăţimea fantei jetului b este mică în comparaţie cu raza de curbură a cilindrului R, se pot aplica apro-

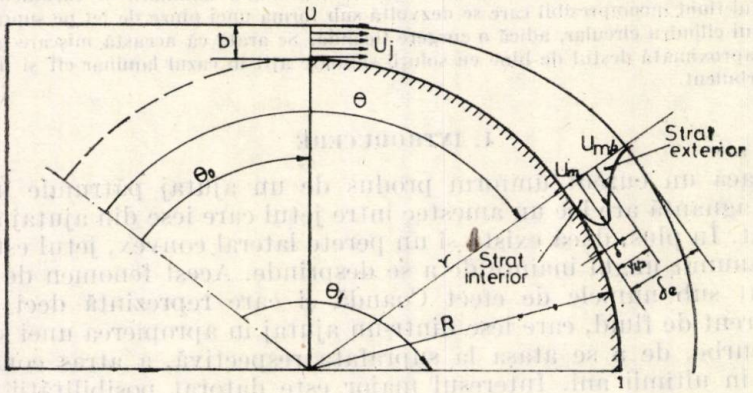


Fig. 1

ximaţiile stratului limită, astfel că ecuaţiile de mişcare simplificate se scriu :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0, \tag{1}$$

$$V_r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{3}$$

unde, pentru curgerea laminară, $\tau = \mu \dfrac{\partial V_\theta}{r}$, iar pentru curgerea turbulentă, substratul laminar fiind neglijat $\left(\text{adică este omis termenul } \mu \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)$, tensiunea de frecare turbulentă se ia de forma $\tau = \mu_t \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r}$, μ_t fiind viscozitatea turbulentă, presupusă constantă într-o secţiune ca în cazul stratului de amestec, $\nu_t/\nu = \sigma\theta^e$.

Variabilele în ecuaţiile (1—3) pot fi adimensionalizate după cum urmează :

$$V_r^* = \frac{V_r}{U_j}, \quad V_\theta^* = \frac{V_\theta}{U_j}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad p^* = \frac{P}{\rho U_j^2},$$

$$Re = \frac{U_j R}{\nu}, \quad y^* = \frac{y}{R} = r^* - 1,$$
$$\nu = \mu/\rho,, \; y^* \ll 1,$$

unde U_j — viteza jetului la ieșirea din ajutaj ($\theta = \theta_0$) (presupusă constantă în secțiune); Re — numărul Reynolds construit cu raza cilindrului; și y — distanța radială pornind de la suprafața cilindrului, $r = R$.

Forma adimensională a ecuației de continuitate (1) este satisfăcută de o funcție de curent aleasă astfel ca $V_r^* = \left(-\frac{1}{r^*}\right)(\partial\psi/\partial\theta)$ și $V_\theta^* = \frac{\partial\psi}{\partial r^*}$.

Deoarece y^* este mult mai mic decît unitatea, poate fi neglijat în comparație cu aceasta în forma adimensională a ecuației (2) și cu o variabilă de modelare de forma:

$$\eta = Re \cdot y^* \cdot \frac{c+1}{\sigma} \theta^{(c+1)(a-1)} \tag{4}$$

și cu funcția de curent aleasă de forma

$$\psi = \theta^{a(c+1)} f(\eta), \tag{5}$$

ecuația (2) poate fi transformată în ecuația diferențială ordinară neliniară următoare:

$$f''' + aff' + (1-2a) f'^2 = 0. \tag{6}$$

Alegerea constantei a depinde de condițiile la limite. Prin definiție:

$$V_r^* = -\frac{1}{r^*} \cdot \frac{d\psi}{d\theta} \simeq -\theta^{a(c+1)-1}[a(c+1)f + (c+1)(a-1)\eta f'],$$
$$V_\theta^* = \frac{\partial\psi}{\partial r^*} = \frac{\partial\psi}{\partial y^*} = Re\frac{c+1}{\sigma}\theta^{(c+1)(2a-1)} f'.$$

Prin integrarea ecuației (6) se arată ușor că valorile $a=1/3$ și $a=1/2$ satisfac condițiile la limite pentru cazul jetului liber și respectiv al stratului limită pe placa plană fără incidență. Pentru curgerea de tip Coandă considerată aici, condițiile la limite atașate ecuației (6) sînt:

$\eta = 0$; $f = 0$, $f'(0) = 0$, (condiția de aderență);

$\eta \to \infty : f' = 0, f'' = 0$ (condiția de racordare).

Integrînd ecuația (6) de la η la ∞ ținînd seama de aceste condiții, se găsește

$$-f'' - aff' + (1-3a)\int_\eta^\infty f'^2 \, d\eta = 0. \tag{7}$$

Integrînd mai departe ecuația (7) cu ajutorul factorului integrant f', rezultă:

$$\frac{1}{2} f'^2 - af\int_\eta^\infty f'^2 \, d\eta + (1-4a)\int_\eta^\infty gf' \, d\eta = 0, \tag{8}$$

în care

$$g(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} f'^2 \, d\eta.$$

Evaluarea ecuaţiei (8) la $\eta = 0$ conduce la

$$(1 - 4a) \int_{0}^{\infty} gf' \, d\eta = 0.$$

Deoarece

$$\int_{0}^{\infty} gf' \, d\eta \neq 0,$$

rezultă că $(1-4a) = 0$ şi deci $a = \frac{1}{4}$ este valoarea care satisface condiţiile la limite ale curgerii Coandă.

Astfel, componentele vitezei pot fi scrise ca

$$V_r^* = -\frac{c+1}{4} \theta^{\frac{c+1}{4}-1} [1 - 3\eta f'], \tag{9}$$

$$V_\theta^* = Re \frac{c+1}{\sigma} \theta^{-\frac{c+1}{2}} f'. \tag{10}$$

Acum ecuaţia (6) poate fi integrată pentru valoarea lui a corespunzătoare curgerii de tip Coandă. Scriind ecuaţia (6) cu $a = \frac{1}{4}$, avem

$$f''' + \frac{1}{4} ff'' + \frac{1}{2} f'^2 = 0. \tag{11}$$

Integrînd succesiv ecuaţia (11) cu factorii integranţi f şi respectiv $f^{-3/2}$ şi ţinînd seama de condiţiile la limite corespunzătoare se obţine mai întîi

$$f''f + \frac{1}{4} f'f^2 - \frac{1}{2} f'^2 = 0$$

şi apoi

$$6f' + f^2 = f_\infty^{3/2} f^{1/2}, \tag{12}$$

unde

$$f_\infty = \lim_{\eta \to \infty} f.$$

Punînd $F = (f/f_\infty)^{1/2}$ ecuaţia (12) devine o ecuaţie cu variabile separabile a cărei soluţie se scrie după cum urmează :

$$\eta f_\infty = 4\sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\, F}{2+F}\right) + 2 \ln \frac{F^2 + F + 1}{(F-1)^2}. \tag{13}$$

Astfel, mărimile η și f pot fi exprimate ca funcții explicite de parametru F, f fiind scrisă ca

$$f = f_\infty F^2. \tag{14}$$

De asemenea se pot obține relații explicite în funcție de F pentru mărimile f', f'', f''', după cum urmează :

$$f' = \frac{f_\infty^2}{6}(F - F^4), \tag{15}$$

$$f'' = \frac{f_\infty^3}{72}(1 - F^3)(1 - 4F^3), \tag{16}$$

$$f''' = -\frac{f_\infty^4}{288}F^2(1 - F^3)(5 - 8F^3). \tag{17}$$

Domeniul de valori ale parametrului F este de la 0 la 1, $F \in [0, 1]$ astfel că variabila independentă η ia valori de la 0 la ∞, $\eta \in [0, \infty)$.

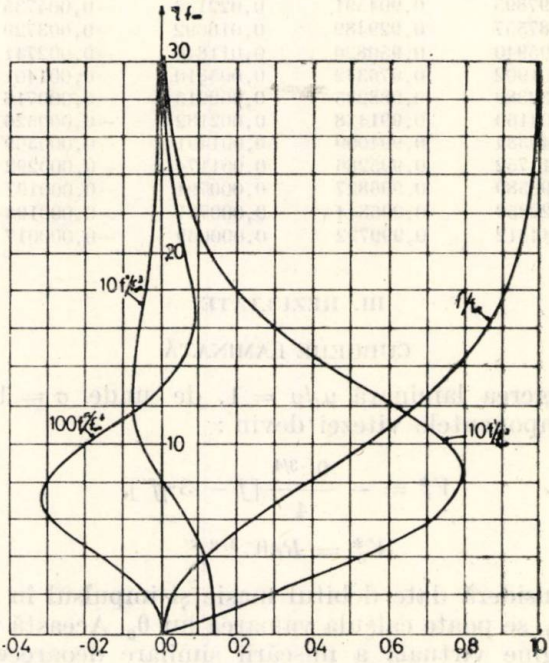


Fig. 2

Problema este astfel complet determinată și soluția ecuației (11) cu condițiile la limite date este reprezentată de ecuațiile (13—17). Valorile calculate ale lui ηf_∞, f/f_∞, f'/f_∞^2, f''/f_∞^3 și f'''/f_∞^4 au fost date în tabelul 1 și reprezentate în figura 2.

Tabelul 1

F	ηf_∞	f/f_∞	f'/f'^2_∞	f''/f'^3_∞	f'''/f'^4_∞
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,13889	—0,000000
0,050000	0,600019	0,002500	0,008332	0,013880	—0,000043
0,100000	1,200300	0,010000	0,016650	0,013820	—0,000173
0,200000	2,404822	0,040000	0,033067	0,013337	—0,000680
0,300000	3,624682	0,090000	0,048650	0,012054	—0,001455
0,350000	4,246156	0,122500	0,055832	0,011014	—0,001896
0,400000	4,879741	0,160000	0,062400	0,009672	—0,002334
0,500000	6,202191	0,250000	0,072917	0,006076	—0,003038
0,560000	7,048856	0,313600	0,076943	0,003407	—0,003227
0,600000	7,645510	0,360000	0,078400	0,001481	—0,003207
0,630000	8,114793	0,396900	0,078745	0,000000	—0,003100
0,660100	8,608712	0,435732	0,078373	—0,001489	—0,002909
0,700100	9,309665	0,490140	0,076644	—0,003399	—0,002525
0,760100	10,492122	0,577752	0,071050	—0,005894	—0,001673
0,800100	11,407970	0,640160	0,065049	—0,007106	—0,000979
0,840100	12,482071	0,705768	0,056999	—0,007755	—0,000256
0,850100	12,784859	0,722670	0,054641	—0,007806	—0,000083
0,860100	13,105178	0,739772	0,052140	—0,007805	0,000084
0,880100	13,809656	0,774576	0,046689	—0,007634	0,000388
0,890100	14,201252	0,792278	0,043733	—0,007455	0,000520
0,930100	16,181313	0,865086	0,030288	—0,006020	0,000843
0,951100	17,697895	0,904591	0,022136	—0,004735	0,000826
0,964100	18,987557	0,929489	0,016692	—0,003729	0,000727
0,975100	20,495940	0,950820	0,011840	—0,002741	0,000581
0,988100	23,501902	0,976342	0,005810	—0,001401	0,000325
0,994100	26,332389	0,988235	0,002915	—0,000716	0,000173
0,995700	27,604160	0,991418	0,002132	—0,000526	0,000128
0,997000	29,049384	0,994009	0,001491	—0,000369	0,000091
0,997640	30,011752	0,995286	0,001174	—0,000292	0,000072
0,998412	31,599589	0,996827	0,000791	—0,000197	0,000049
0,998421	31,622359	0,996844	0,000787	—0,000196	0,000048
0,999861	41,344812	0,999722	0,000069	—0,000017	0,000004

III. REZULTATE

CURGERE LAMINATĂ

Pentru curgerea laminară $\mu_t/\mu = 1$, de unde $\sigma = 1$ şi $c = 0$. Cu aceste valori componentele vitezei devin :

$$V_r^* = -\frac{\theta^{-3/4}}{4}[f - 3\eta f'], \tag{9'}$$

$$V_\theta^* = Re\,\theta^{-1/2} f'. \tag{10'}$$

Dacă se consideră date debitul masic şi impulsul în fanta din care iese jetul, $\theta = \theta_0$, se poate calcula valoarea lui θ_0. Această valoare trebuie privită ca o origine virtuală a mişcării similare deoarece aproximaţiile stratului limită nu sînt valabile în apropierea originii jetului. Fie $Q_m = \rho\, U_j\, b$, debitul masic pe unitatea de lungime a fantei, unde b este lăţimea fantei, atunci

$$Q_m = \rho U_j b = \int_0^\infty \rho V_\theta \, dy|_{\theta_0} = \rho\, U_j R\, \theta_0^{1/4} f_\infty$$

din care

$$Q_0^{1/4} = \left(\frac{b}{R}\right)\frac{1}{f_\infty}. \tag{18}$$

Acum impulsul jetului în fantă este dat de $\rho U_j^2 b = Q_m U_j$. Această ipoteză presupune că viteza nu variază pe lățimea fantei, ceea ce reprezintă o anumită neconcordanță față de faptul că la $\theta = \theta_0$ curgerea este presupusă similară. Trebuie avut în vedere că modelul pentru jet este asemănător modelului punctului material din mecanica solidului, cînd se ține seama numai de mărimea fizică a corpului (masă). Conform acestui model, jetul teoretic de impuls dat iese dintr-o fantă de lățime zero situată la $\theta = 0$, iar la $\theta = \theta_0$ își atinge debitul masic în condițiile curgerii similare, care în origine la $\theta = 0$ este singulară.

Egalînd impulsul jetului fizic cu cel determinat teoretic la $\theta = \theta_0$ avem :

$$\rho U_j^2 b = \int_0^\infty \rho\, V_0^2\, \mathrm{d}y\,|_{\theta_0}$$

din care rezultă :

$$b = R\,\frac{Re}{\theta_0^{1/4}}\int_0^\infty f'^2\,\mathrm{d}\eta. \tag{19}$$

Integrala din ecuația (19) se poate calcula ușor, astfel că

$$\frac{b}{R} = \frac{Re}{Q_0^{1/4}}\cdot\frac{f_\infty^3}{18}. \tag{20}$$

Dacă f_∞ din ecuația (18) se înlocuiește în ecuația (20), θ_0 devine :

$$\theta_0 = \left(\frac{b}{R}\right)^2\frac{Re}{18}. \tag{21}$$

Astfel, mărimea f_∞ nu apare în expresia lui θ_0, ea depinzînd numai de curbura peretelui și de caracteristica jetului,

$$f_\infty = \left(\frac{b}{R}\right)^{1/2}\left(\frac{18}{Re}\right)^{1/4}. \tag{22}$$

Deci f_∞ este un parametru de curbură. În lucrarea [8] s-a definit un parametru de antrenare A, care este o măsură a cantității de fluid antrenat de curgere. Antrenarea fluidului este importantă din punct de vedere fizic deoarece ea determină mărimea regiunii de atașare în efectul Coandă. Parametrul de antrenare este definit de relația :

$$A = \frac{1}{U_j}\cdot\frac{\mathrm{d}}{R\,\mathrm{d}\theta}\int_0^\infty V_0\,\mathrm{d}y. \tag{23}$$

În lucrarea prezentată, se obține pentru parametrul de antrenare adimensional, în cazul curgerii laminare, formula :

$$A = \frac{f_\infty}{4}\,\theta^{-3/4}, \tag{24}$$

care arată că antrenarea este maximă la originea jetului.

Să calculăm acum forța de tracțiune produsă prin devierea pînzei de jet cu 90°. Dacă F_t este mărimea acestei forțe de tracțiune pe unitatea de lățime, atunci

$$F_t = \int_0^\infty \rho V_\theta^2 \,\mathrm{d}y|_{\theta=\theta_1} + \int_0^\infty (p - p_\infty)\,\mathrm{d}y|_{\theta=\theta_1},$$

unde primul termen reprezintă fluxul impulsului și $\theta_1 = \theta_0 + 90°$.

Din ecuația (3) prin integrare se găsește

$$p_\infty - p = \int_r^\infty \rho\, V_\theta^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_{y^*}^\infty \frac{\rho U_j^2\, V_\theta^{*2}}{1 + y^*}\,\mathrm{d}y^*.$$

Neglijînd la numitor y^* în comparație cu unitatea, integrala poate fi scrisă ca

$$\int_\eta^\infty \rho\, U_j^2\, Re\, \theta^{-1/4} f'^2\,\mathrm{d}\eta,$$

care conduce la

$$p_\infty - p = \rho\, U_j^2\, Re \frac{f_\infty^3}{18\,\theta^{1/4}}\,(1 - F^3)^2.$$

Integrînd încă odată se obține acum al doilea termen care reprezintă contribuția presiunii,

$$\int_0^\infty (p_\infty - p)\,\mathrm{d}y\,|_{\theta=\theta_1} = \frac{\rho\, U_j^2}{2}\, R\theta_1^{1/2} f_\infty^2.$$

Cum fluxul total de impuls este $\rho U_j^2\, RRe\, \theta_1^{-1/4} \dfrac{f_\infty^3}{18}$, expresia forței de tracțiune se scrie :

$$F_t = \rho U_j^2\, Rf_\infty^2 \left[\frac{Re\, f_\infty}{18\,\theta_1^{1/4}} - \frac{\theta_1^{1/2}}{2}\right]. \tag{25}$$

Pentru comparație cu cazul jetului liber nedeviat, se introduce un factor de amplificare a forței de tracțiune definit ca raportul :

$$T = \frac{F_t|_{\theta=\theta_1}}{F_t|_{\theta=\theta_0}} = \frac{F_t}{\rho U_j^2 b} = \frac{R}{b}\,\theta_1^{-1/4}\left[\frac{f_\infty^3\, Re}{18} - \frac{f_\infty^2\,\theta_1^{3/4}}{2}\right]. \tag{26}$$

Folosind relațiile (20), (21), (22), expresia lui T devine :

$$T = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\left[\frac{9\pi}{Re} + \left(\frac{b}{R}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{27}$$

Deoarece $\theta_1 = \theta_0 + \pi/2$, $9\pi/Re \ll 1$ și $\left(\frac{b}{R}\right)^2 \ll 1$, rezultă că $T < 1$, adică în cazul considerat nu se produce mărirea forței de tracțiune, ci numai modificarea orientării ei. Se definește grosimea finită a pînzei jetului, δ, la fel ca în cazul stratului limită, și anume ca valoarea lui y la care într-o secțiune dată $\theta > \theta_0$, $\frac{V_\theta}{V_{\theta_{max}}} = 0{,}01$.

Deoarece

$$V_\theta^* = \frac{V_\theta}{U_j} = Re \cdot f'/\theta^{1/2},$$

$$\frac{V_\theta}{V_{\theta max}} = \frac{V_\theta^*}{V_{\theta\, max}^*} = \frac{f'}{f'_{max}}$$

și problema devine la a găsi valoarea lui η pentru care $f'/f'_{max} = 0{,}01$. Din ecuația (15) se găsește că $f'_{max} = (f_\infty^2/8)\frac{1}{4^{1/3}}$ și deci $f'/f'_{max} = \frac{4^{4/3}}{3}(F - F^4)$. Pentru $f'/f'_{max} = 0{,}01$ se găsește $F = 0{,}998421$, valoare cu care se calculează din ecuația (13) ηf_∞, $\eta f_\infty = 31{,}622$.
Înlocuind în (4) se obține rezultatul final :

$$\delta^* = \frac{31{,}622}{Re\, f_\infty}\,\theta^{3/4},$$

unde unghiul θ este măsurat de la originea aparentă (punctul unde grosimea pînzei este zero). Notînd distanța pe suprafața cilindrului cu $x = R\theta$ se observă că $\delta^* \sim x^{3/4}$ și $V_{\theta max}^* \sim x^{-1/2}$.

CURGEREA TURBULENTĂ

Pentru curgerea turbulentă este în primul rînd necesar să se stabilească viscozitatea turbulentă μ_t. Jeturile turbulente la perete constituie cazuri test importante pentru modelele de turbulență datorită faptului că ele conțin un strat lîngă perete de tip strat limită și un strat liber, cu care se interacționează (fig. 3). Astfel că ele se dezvoltă mult mai puțin decît jeturile libere. Această reducere în dezvoltarea jetului la perete este datorită în principal amortizării de către perete a componentei laterale a fluctuațiilor vitezei și mai puțin acțiunii tensiunii de frecare la perete. Efectul de amortizare se transmite în stratul exterior și întrucît transferul componentei laterale a impulsului este strîns legat de componenta laterală a fluctuațiilor vitezei, tensiunile de frecare și astfel dezvoltarea jetului, sînt reduse. Reciproc, gradul de turbulență relativ mare al stratului exterior are pentru stratul de la perete un efect similar cu turbulența curen-

tului liber din cazul stratului limită. În mod obișnuit, modelele de turbulență bazate pe viscozitate turbulentă nu țin seama de amortizarea de către perete a fluctuațiior laterale și astfel utilizînd constantele empirice determinate în cazul jetului liber se supraestimează dezvoltarea jetului. De exemplu, cu modelul $k-\varepsilon$ [6] se obține pentru lățimea jetului o valoare cu 30% mai mare cînd sînt folosite constantele standard valabile pentru

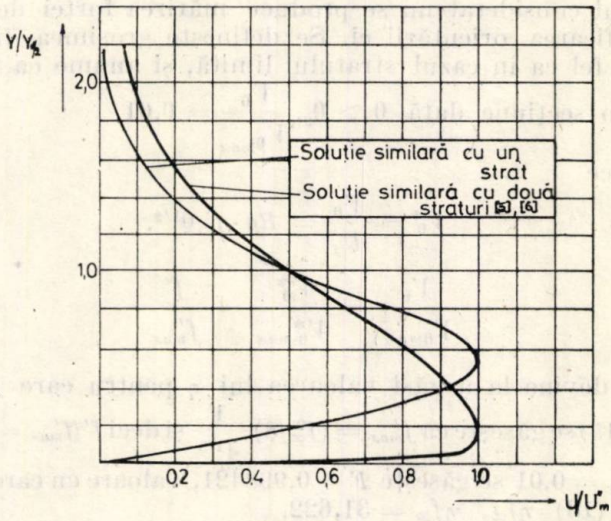


Fig. 3

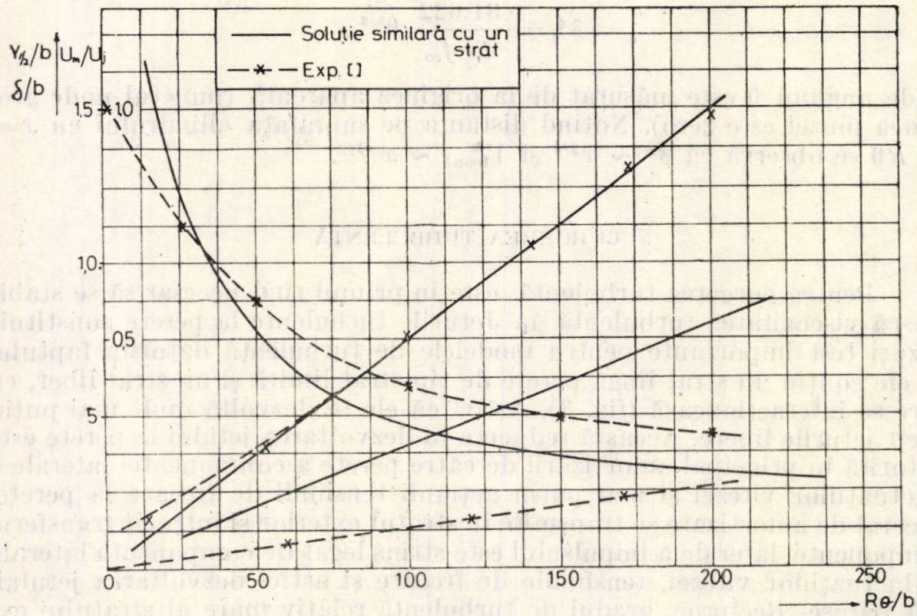


Fig. 4

celelalte curgeri. Modelele de turbulență de ordinul al doilea bazate pe ecuații de transport pentru tensiunile Reynolds (6) pot prezice corect jetul la perete cu constantele standard, numai dacă în ecuațiile respective se ține seama de efectul peretelui asupra corelației presiune-viteză de deformație [6], [7]. Dacă această influență nu este luată în considerație, și modelele acestea furnizează valori cu 20% mai mari. Aplicarea modelelor de turbulență bazate pe ecuații de transport este însă complexă și costisitoare. Din această cauză, în lucrarea de față ne vom limita la un model algebric simplu, de tip viscozitate turbulentă, care estimează destul de bine caracteristicile principale ale curgerii Coandă considerate.

Vom presupune că viscozitatea turbulentă pentru curburi moderate se supune aceleiași legi ca în cazul fără curbură Astfel luăm

$$\nu_t = K \cdot V_{\theta m} \cdot y_{1/2} = \nu K Re\, V^*_{\theta m}\, y^*_{1/2}, \tag{29}$$

unde $V_{\theta m}$ este viteza maximă în curgere, $y_{1/2}$ este punctul din stratul extern, unde $\dfrac{V_\theta}{V_{\theta m}} = \dfrac{1}{2}$, iar coeficientul de amestec K este o constantă empirică, aceeași ca în cazul fără curbură. Acum se arată ușor că sînt posibile soluții similare ale ecuațiilor de mișcare (1), (2) și (3), ν_t/ν fiind de forma :

$$\nu_t/\nu = \sigma \theta^c. \tag{30}$$

În acest model de viscozitate nu s-a ținut seama de intermitența curgerii exterioare, astfel că adoptarea unei valori constante în secțiune conduce la profile de viteze identice acelora din curgerile laminare corespunzătoare, deși configurația generală a dezvoltării curgerii nu este aceeași. Presupunînd că și în acest caz curgerea se dezvoltă liniar, coordonata adimensională din formula (4) trebuie scrisă sub forma :

$$\eta \sim y^*/\theta,$$

de unde se obține $c = \dfrac{1}{3}$. Deoarece rata evazării jetului de perete, $\mathrm{d}y_{1/2}/\mathrm{d}x = 0{,}075$ [6], se găsește

$$\sigma = Re\, \frac{4}{3} \frac{\mathrm{d}y_{1/2}/R\, \mathrm{d}\theta}{\eta_{1/2}},$$

care conduce la estimarea $\sigma \simeq \dfrac{Re f_\infty}{148}$ (din condiția $\dfrac{V_\theta}{V_{\theta m}} = \dfrac{f'}{f'_{max}} = 0{,}5$ se găsește $F = 0{,}90396$ cu care se calculează mai departe $\eta f_\infty \simeq 14{,}8$).

Cu aceste date se poate specifica acum dezvoltarea curgerii automodelate considerate :

— componentele vitezei,

$$V^*_r = -\theta^{-2/3}/3\, [f - 3\eta f'], \tag{9''}$$

$$V^*_\theta = \frac{4}{3} \frac{Re}{\sigma} f'\, \theta^{-2/3}; \tag{10''}$$

— poziţia originii virtuale faţă de fanta jetului,

$$\theta_0 = \frac{296}{27}\frac{b}{R}; \tag{31}$$

— parametrul de curbură

$$f_\infty = \frac{3}{2.37^{1/3}}\left(\frac{b}{R}\right)^{2/3}; \tag{32}$$

— parametrul de antrenare,

$$A = \frac{f_\infty}{3}\theta^{-2/3}; \tag{33}$$

— factorul de amplificare a forţei de tracţiune

$$T = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{1/3}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{R}\frac{\theta_1}{\theta_0}\right] < 1; \tag{34}$$

— grosimea finită a pînzei jetului, definită ca valoarea pentru care $V_\theta = V_{\theta max}/2$. Pentru $\frac{V_\theta}{V_{\theta max}} = \frac{f'}{f'_{max}} = 0{,}5$, se găseşte succesiv $F = 0{,}90396$ şi $\eta f_\infty = 14{,}8$. Înlocuind în (4) se obţine rezultatul final

$$y^*_{1/2} = 0{,}075\ \theta\ (V_\theta = V_{\theta max}/2). \tag{35}$$

— variaţia în lungul curgerii a vitezei maxime,

$$\frac{V_{\theta m}}{U_j} = \left(18{,}5\ \frac{b}{\theta R}\right)^{2/3}; \tag{36}$$

— legile de dezvoltare ale curgerii,

$$y^*_{1/2} \sim x,\ V^*_{\theta m} \sim x^{-2/3},\ x = R\theta.$$

IV. CONCLUZII

În lucrarea prezentă s-a obţinut o soluţie analitică care aproximează curgerea Coandă bidimensională. Valabilitatea rezultatelor este limitată la cazurile $b/R \ll 1$, deoarece în ecuaţia componentei tangenţiale a impulsului curbura a fost neglijată ($y^* \ll 1$).

Domeniul de aplicabilitate al soluţiei laminare este pentru numere Reynolds mai mici decît valoarea critică care este de ordinul 3×10^4 [2]. În cazul turbulent, ipoteza similarităţii pentru întreaga curgere a ţinut seama în primul rînd de dezvoltarea în lungul curgerii, lăsînd de o parte problema distribuţiei transversale a tensiunilor de amestec.

Nu s-a ţinut deci seama în acest model de intermintenţa curgerii la frontiere astfel că adoptarea viscozităţii constante în secţiune a condus la profile de viteze identice acelora din curgerea laminară corespunzătoare (fig. 3), deşi configuraţia generală a dezvoltării curgerii este diferită. Pentru

specificarea dezvoltării acestei curgeri automodelate a fost necesară numai o singură constantă empirică.

În multe aplicații care utilizează controlul stratului limită prin suflaj tangențial, suprafața solidă în aval de fanta de suflaj este însă puternic curbată și în acest caz pentru predicția dezvoltării curgerii și desprinderii este necesară cunoașterea precisă a distribuțiilor radiale și tangențiale de presiune în jet. Adică este necesară cunoașterea exactă a profilelor de viteză, fapt ce se poate realiza prin reprezentarea lor cu două straturi [5].

Primit în redacție la 29 iunie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. BOURQUE, B. G. NEWMAN, *Reattachement of a two-dimensional-incompressible jet of an adjacent flat plate*, The Aeronautical Quarterly, **XI**, part 3 (1960).
2. B. G. NEWMAN, *The deflexion of plane jets adjacent boundaries-Coandă effect*. in: *Boundary Layer and Flow Control Principles and Applications*, edited by G. V. Lachmann, vol. I, Pergamon Press Inc. New York, 1961.
3. V. KRUKA, S. ESKINAZI, *The wall-jet in a moving stream*, Journal of Fluid Mechanics, **20**, part. 4 (1964).
4. J. C. WILLIAMS, E. H. CHENG, K. H. KIM, *Curvature effects in the laminar and turbulent freejet, boundary*, AIAA Journal, 4 (1971).
5. R. J. KIND, *Calculation of the normal-stress distribution in a curved wall jet*, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, may (1971).
6. M. LJUBOJA, W. RODI, *Calculation of turbulent wall jets with an algebric Reynolds stress model*, Journal of Fluids Engineering, sept. (1980).
7. A. J. REYNOLDS, *Curgeri turbulente în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
8. R. A. SAWER, *Two dimensional reattaching jet flow including the effect of curvature on entrainment*, Journal of Fluid Mechanics, **17** (1963).
9. E. K. PARKES, R. E. PETERSEN, *Analysis of a „Coanda" type flow*, AIAA Journal, **6**, 1 (1968).

INFLUENȚA VARIAȚIEI VISCOZITĂȚII CU TEMPERATURA ASUPRA MIȘCĂRII UNUI FLUID VÎSCOS ÎNTR-UN MEDIU POROS

de C. PESCĂRUȘ

Universitatea din Craiova

N. GIURGIUȚEANU

Centrul de Calcul al Universității din Craiova

Lucrarea conține rezultatele obținute de autori în studiul influenței temperaturii asupra coeficientului de viscozitate în mișcarea unui fluid într-un mediu poros omogen, în cazul liniar și radial. Căldura din cîmpul de mișcare este generată numai de frecarea intermoleculară a particulelor fluide și ea se propagă prin conducție și prin convecție. Aceste rezultate sînt comparate cu cele din cazul în care se neglijează variația viscozității cu temperatura și sînt prezentate în cîteva diagrame comparative.

INTRODUCERE

Ne propunem să studiem mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros, ținînd seama de cîmpul de temperatură generat prin frecarea intermoleculară a particulelor fluide. Această problemă este tratată în literatura de specialitate [1], [2] pentru cazul în care viscozitatea fluidului este constantă. Analizăm cazul în care viscozitatea dinamică a fluidului este variabilă cu temperatura, după legi empirice cunoscute în literatură și comparăm rezultatele obținute cu cele din cazul viscozității constante. Acest studiu poate prezenta interes practic, dat fiind faptul că variația viscozității cu temperatura duce, conform legii lui Darcy, la variația vitezei de filtrare a fluidului și deci influențează mișcarea. În practica exploatărilor de țiței, mai ales în cazul combustiei subterane, temperaturile care apar sînt foarte mari și deci viscozitatea fluidelor ce se mișcă prin mediul poros poate suferi variații importante. Aici studiem doar efectul frecării intermoleculare asupra cîmpului de temperatură, izolîndu-l de celelalte efecte ce însoțesc fenomenul real.

Studiul de față analizează atît mișcarea liniară a fluidului, într-un strat de lungime dată L, cît și mișcarea cu simetrie radială. Pentru fiecare caz în parte este scrisă problema la limită și se dă algoritmul de calcul al soluției aproximative, utilizînd metoda diferențelor finite. Se dau, de asemenea, o serie de rezultate numerice, care se compară cu cele obținute în cazul viscozității constante.

I. MIȘCAREA LINIARĂ

Să considerăm pentru început mișcarea liniară a fluidului, într-un strat de lungime L, ce este schițat în figura 1. Mediul poros este considerat omogen și izotrop, iar fluidul vîscos, incompresibil și avînd viscozitatea dinamică variabilă cu temperatura, după legea [3]:

$$\mu(T) = 0{,}2831577 \cdot 10^{-7}[\alpha (T-\beta + \sqrt{\gamma + (T-\beta)^2}) - \varepsilon]^{-1} \qquad (1)$$

cu $\alpha = 0{,}021482$; $\beta = 8{,}435$; $\gamma = 8078{,}4$; $\varepsilon = 1{,}2$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 6, 1988, P. 545–563

sau după legea [4]:

$$\mu(T) = 7{,}43158\,(32 + \frac{9}{5}\,T)^{-3{,}158}. \tag{2}$$

În aceste legi, T se exprimă în °C, iar μ în $\frac{\text{kgh}}{\text{m}^2}$.

Fluidul intră în strat prin capătul $x = 0$ și iese prin capătul $x = L$, mișcarea datorindu-se diferenței de presiune $p_0 - p_L$ dintre capătul de intrare și capătul de ieșire, diferență presupusă constantă. Vom neglija forțele masice.

Căldura se propagă în sistem prin conducție și prin convecție. În fiecare punct din domeniul de mișcare se creează căldură datorită frecării intermoleculare a particulelor fluide. Se neglijează pierderile de căldură în stratele limitrofe, dar se ține seama de ele la capătul de ieșire $x = L$. În afară de viscozitate, se presupune că celelalte caracteristici ale fluidului

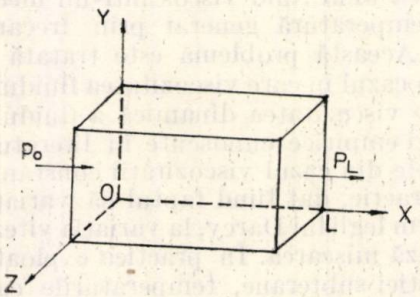


Fig. 1. — Schița zăcământului liniar.

și ale mediului poros nu variază cu temperaura. Vom considera, de asemenea, că schimbul de căldură dintre cele două faze aflate în contact (fluid și mediu poros) este instantaneu.

1. **Problema la limită.** În acest paragraf vom formula problema la limită pentru propagarea căldurii, în cazul general, din care vom deduce problema la limită pentru cazul liniar.

a. *Cazul general.* În ipotezele formulate mai sus, pentru studiul mișcării avem la dispoziție următoarele ecuații:

— ecuația de mișcare (legea lui Darcy);

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p; \tag{3}$$

— ecuația temperaturii [5], [6]:

$$K\,\Delta T - \rho_a c_a \vec{v}\,\nabla T + q = [\Phi\,\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m]\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{4}$$

În aceste ecuații, $\vec{v}$ este viteza de filtrație; p — presiunea; T — temperatura; K — coeficientul de conductibilitate termică redusă (solid-fluid); $\rho_a c_a$ — capacitatea calorică a fluidului; $\rho_m c_m$ — capacitatea calorică a mediului poros, Φ — porozitatea de volum; t — timpul.

Termenul q care apare în membrul sting din (4) este termenul de generare a căldurii, datorită frecării intermoleculare a particulelor fluide,

în unitatea de timp și de volum. Datorită faptului că viteza fluidului are valori mici, energia cinetică a fluidului din unitatea de volum a mediului poros este neglijabilă în raport cu lucrul mecanic al forțelor ce împing fluidul prin mediul poros, astfel că pentru q avem expresia [1], [2]:

$$q = \sqrt[3]{\Phi^2}\,\frac{k}{\mu}\,(\nabla p)^2. \tag{5}$$

Dacă în (3) se ține seama de ecuația de continuitate,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \tag{6}$$

se obține

$$\Delta p - \frac{\mu'}{\mu}\,\nabla p\,\nabla T = 0, \tag{7}$$

unde μ' reprezintă derivata lui μ în raport cu T.
Ținînd seama de (3) și (5), ecuația (4) devine :

$$K\,\Delta T + \rho_a c_a \frac{k}{\mu}\,\nabla p\,\nabla T + \sqrt[3]{\Phi^2}\,\frac{k}{\mu}\,(\nabla p)^2 =$$

$$= [\Phi\,\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m]\,\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

Pentru determinarea presiunii și temperaturii avem la dispoziție sistemul format din ecuațiile (7) și (8), cu condițiile la limită corespunzătoare, pe care le vom scrie în cazul liniar.

b. *Cazul liniar.* Dacă mișcarea este unidimensională liniară, în lungul axei Ox, sistemul (7) + (8) se scrie :

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - A\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\\ K\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial T}{\partial x} + C = D\,\frac{\partial T}{\partial t},\end{gathered} \tag{9}$$

unde am notat

$$A = \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{\partial T}{\partial x};\quad B = \rho_a c_a \frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x};\quad C = \sqrt[3]{\Phi^2}\,\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2,$$

$$D = \Phi\,\rho_a c_a + (1-\Phi)\rho_m c_m. \tag{10}$$

Funcțiile necunoscute $p(x, t)$ și $T(x, t)$ ale sistemului (9) trebuie să satisfacă următoarele condiții inițiale și la limită :

$$\begin{gathered}p(0, t) = p_0;\ p(L, t) = p_L,\ t \geqslant 0,\\ T(0,\ t) = 0,\ t \geqslant 0;\ T(x, 0) = 0,\ x \geqslant 0,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\quad t \geqslant 0, \tag{a}$$

$$K\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \Phi\,\rho_a c_a \frac{k}{\mu}\,T\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L},\quad t \geqslant 0. \tag{b}$$

Deci, se dau valorile presiunii la capetele de intrare și de ieșire. Temperatura este dată la intrare, la orice moment, precum și la $t = 0$, pentru orice x. S-a luat această valoare egală cu zero, ea fiind o temperatură de referință.

Condițiile (11) mai conțin condiția (a), care exprimă faptul că se neglijează pierderea de căldură la capătul $x = L$, sau condiția (b), care exprimă faptul că la capătul $x = L$ se pierde căldura pe care o transportă fluidul care părăsește mediul poros.

2. **Soluția aproximativă.** Datorită neliniarității problemei la limită formulată mai sus, ne mulțumim cu o soluție aproximativă, pe care o vom obține prin metoda diferențelor finite.

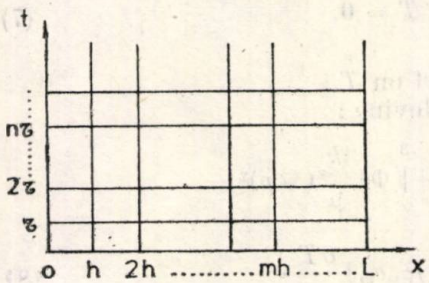


Fig. 2. — Rețeaua de discretizare; cazul liniar.

a. *Discretizarea problemei la limită.* Pentru rezolvarea acestui sistem neliniar, cu coeficienți variabili, considerăm rețeaua de discretizare din figura 2 : pe direcția lui x pasul rețelei este h, iar pe direcția lui t, pasul este τ. Alegem pe h astfel încît $\frac{L}{n} \in N$.

Notăm :

$$r = \frac{\tau}{h^2},$$

$$p(mh, n\tau) = p_{m,n},$$

$$T(mh, n\tau) = T_{m,n}.$$

În prima ecuație din (9) aproximăm derivatele în punctul $(mh, n\tau)$ astfel :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{m-1,n} - 2p_{m,n} + p_{m+1,n}}{h^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{m+1,n} - p_{m-1,n}}{2h},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2h},$$

iar în cea de a doua ecuație din (9) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{h^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m-1,n+1}}{h},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\tau},$$

iar $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial p}{\partial x}$ au expresiile de mai sus.

Cu notaţiile :

$$A_{m,n} = \frac{\mu'(T_{m,n})}{\mu(T_{m,n})} \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2h},$$

$$B_{m,n} = \rho_a c_a \frac{k}{\mu(T_{m,n})} \frac{p_{m+1,n} - p_{m-1,n}}{2h}, \tag{12}$$

$$C_{m,n} = \sqrt[3]{\Phi^2} \frac{k}{\mu(T_{m,n})} \frac{(p_{m+1,n} - p_{m-1,n})^2}{4h^2},$$

sistemul (9) se scrie :

$$(2 + A_{m,n}h)p_{m-1,n} - 4p_{m,n} + (2 - A_{m,n}h)p_{m+1,n} = 0,$$

$$Kr(T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}) + B_{m,n}rh(T_{m,n+1} - T_{m-1,n+1}) - \tag{13}$$

$$- D(T_{m,n+1} - T_{m,n}) + C_{m,n}\tau = 0$$

pentru $m \in \{1, 2, \ldots, \frac{L}{h} - 1\}$, $n \in N$,

iar condiţiile (11) :

$$p_{0,n} = p_0, \quad n \in N,$$

$$p_{\frac{L}{h},n} = p_L, \quad n \in N,$$

$$T_{0,n} = 0, \quad n \in N,$$

$$T_{m,0} = 0, \quad m \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{L}{h}\right\}, \tag{14}$$

$$T_{\frac{L}{h},n} = T_{\frac{L-h}{h},n}, \quad n \in N^*, \tag{a}$$

$$T_{\frac{L}{h},n} = \frac{K\,\mu(T_{\frac{L}{h}-1,n})\,T_{\frac{L}{h}-1,n}}{K\,\mu(T_{\frac{L}{h}-1,n}) - \rho_a c_a\,\Phi k(p_{\frac{L}{h}n-1} - p_{\frac{L}{h}-1,n-1})}, \; n \in N^*. \tag{b}$$

Condiţiile (a) şi (b) de mai sus corespund cazului în care se neglijează sau nu pierderile de căldură la capătul de ieşire din sistem.

La $n = 0$ temperaturile sînt date, astfel că din prima ecuaţie a sistemului (13), ţinînd seama de primele două condiţii din (14), se pot de-

termina presiunile $p_{0,m}$ pentru orice $m \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{L}{h} - 1\right\}$. Cunoașterea temperaturilor și presiunilor la momentul inițial permite determinarea acestora la momentul imediat următor : temperaturile $T_{1,m}$ se determină din a doua ecuație (13), ținînd seama de condițiile (14), iar presiunile $p_{1,m}$ din prima ecuație (13), așa cum s-a procedat la pasul anterior. Algoritmul se continuă similar pentru fiecare pas de timp.

Dacă, în algoritmul descris mai sus, determinarea temperaturilor nu pune probleme deosebite, determinarea presiunilor pune astfel de probleme. Ea se face folosind metoda eliminărilor succesive [7]. Aplicarea acestei metode impune analiza existenței și unicității soluției unui sistem liniar neomogen, de care ne vom ocupa în alineatul următor.

b. *Analiza sistemului care determină presiunile.* Prima ecuație (13) împreună cu primele două condiții (14) reprezintă, pentru fiecare n fixat un sistem neomogen de $k = \frac{N}{h} + 1$ ecuații liniare, pentru necunoscutele $p_{0,n}, p_{1,n}, \ldots, p_{k-1,n}$. Vom arăta că acest sistem are soluție și ea este unică. Pentru aceasta este suficient să arătăm că determinantul sistemului este nenul. Acesta este egal cu determinantul :

$$\Delta_{k-2} = \begin{vmatrix} -4 & 2-\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 2+\varepsilon_2 & -4 & 2-\varepsilon_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\varepsilon_3 & -4 & 2-\varepsilon_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\varepsilon_4 & -4 & 2-\varepsilon_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2+\varepsilon_{k-3} & -4 & 2-\varepsilon_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2+\varepsilon_{k-2} & -4 \end{vmatrix},$$

unde $\varepsilon_m = A_{m,n} h$, $m = \overline{1, k-2}$. (14′)

Pentru a evalua ordinul de mărime al lui ε_m, pornim de la legile (1) și (2). Din (1) avem

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 + 42379 \cdot 10^3}{\sqrt{\gamma + (T-\beta)^2}},$$

iar din (2) :

$$\frac{\mu'}{\mu} \simeq -3{,}0076\, \mu^{\frac{1}{3{,}158}},$$

deci viscozitatea este funcție descrescătoare de T. Putem deci scrie, pentru legea (1),

$$\left|\frac{\mu'}{\mu}\right| < \frac{1 + 42379 \cdot 10^3\, \mu(0)}{\sqrt{\gamma}} \simeq 0{,}035, \qquad (14'')$$

iar pentru legea (2) :

$$\left|\frac{\mu'}{\mu}\right| < 3{,}0076\, \mu(0)^{\frac{1}{3{,}158}} \simeq 0{,}17721. \qquad (14''')$$

Dacă se ține seama de (12) și de (14'), rezultă că ε_m au expresiile :

$$\varepsilon_m = \frac{\mu'(T_{m,n})}{\mu(T_{m,n})} \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2}, \quad m = \overline{1, k-2}.$$

Estimațiile (14'') și (14''') arată că aceste cantități sînt foarte mici, depinzînd liniar de diferența de temperatură la pașii succesivi ai rețelei.

Pentru calcularea lui Δ_{k-2}, se fac transformări ale acestuia, care nu-i schimbă valoarea, în scopul înlocuirii cantităților $2 + \varepsilon_m$, $m = \overline{2, k-2}$ cu zero. Astfel, de pe prima linie se dă factor 4, apoi se înmulțește această linie cu $2 + \varepsilon_2$ și se adună la linia a doua ; în determinantul obținut, se dă factor $4 - (2 - \varepsilon_1)(2 + \varepsilon_2)/4$ de pe a doua linie, apoi se înmulțește această linie cu $2 + \varepsilon_3$ și se aduna la a treia linie. Continuînd acest procedeu, obținem :

$$\Delta_{k-2} = (-1)^{k-2} 4 \left[4 - \frac{(2-\varepsilon_1)(2+\varepsilon_2)}{4} \right] \left[4 - \frac{(2-\varepsilon_2)(2+\varepsilon_3)}{4 - \frac{(2-\varepsilon_1)(2+\varepsilon_2)}{4}} \right] \times$$

$$\times \left[4 - \frac{(2-\varepsilon_3)(2+\varepsilon_4)}{4 - \frac{(2-\varepsilon_2)(2+\varepsilon_3)}{4 - \frac{(2-\varepsilon_1)(2+\varepsilon_2)}{4}}} \right] \cdots$$

$$\left[4 - \frac{(2-\varepsilon_{k-3})(2+\varepsilon_{k-2})}{4 - \frac{(2-\varepsilon_{k-4})(2+\varepsilon_{k-3})}{4 - \cdots \cdots \cdots

care se obține din Δ_{k-2} făcînd $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{k-2} = 0$.

Avem $$\Delta'_{k-2} = (-1)^{k-2}\, 2^{k-2}(k-1) \neq 0.$$

Pe de altă parte, urmînd același procedeu ca mai sus, putem scrie :

$$\Delta'_{k-2} = (-1)^{k-2}\, 4\left[4 - \frac{4}{4}\right]\left[4 - \frac{4}{4 - \frac{4}{4}}\right]\left[4 - \frac{4}{4 - \frac{4}{4 - \frac{4}{4}}}\right] \ldots \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} 4 - \dfrac{4}{4 - \dfrac{4}{4 - \cdots\cdots \atop \cdots\cdots \atop 4 - \dfrac{4}{4}}} \end{array}\right] \qquad (k-2) \text{ factori}$$

sau

$$\Delta'_{k-2} = (-1)^{k-2}\, 4 \prod_{i=1}^{k-3} \alpha'_i,$$

unde α'_i se obține din α_i făcînd $\varepsilon_m = 0$, $m = \overline{1, i+1}$. Prin inducție, după i se deduce imediat că $\alpha'_i > 2$, $i = \overline{1, k-3}$. Pe de altă parte, avem

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0)} \alpha_1 = \alpha'_1 > 2.$$

Cum α_1 este funcție continuă de ε_1 și ε_2, rezultă că, pentru ε_1, ε_2 mici avem $\alpha_1 \neq 0$. În aceste condiții, α_2 are sens, el este funcție continuă de ε_1, ε_2, ε_3 și avem

$$\lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \to (0,0,0)} \alpha_2 = \alpha'_2 > 2,$$

deci, pentru ε_1, ε_2, ε_3 mici avem $\alpha_2 \neq 0$. Continuînd raționamentul, deducem că, pentru ε_1, ε_2, ..., ε_i, ε_{i+1} mici, avem $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, k-3}$, deci toate operațiile făcute în Δ_{k-2} au sens, iar $\Delta_{k-2} \neq 0$.

Așadar, sistemul de ecuații în necunoscutele $p_{i,n}$, $i = \overline{0, k-1}$ dat de prima ecuație (13) și primele două condiții (14), are soluție unică. Determinăm această soluție folosind metoda eliminărilor succesive, care va fi prezentată în aliniatul următor, împreună cu algoritmul de determinare a soluției aproximative a problemei la limită.

c. *Algoritmul de determinare a soluției*

Să notăm

$$\begin{aligned} L_{0,n} &= 0, \\ K_{0,n} &= p_0, \end{aligned} \qquad n \in N, \qquad (15)$$

$$L_{m,n} = -\frac{2 - A_{m,n}h}{(2 + A_{m,n}h)L_{m-1,n} - 4},$$

$$n \in N, \quad m = \overline{1, \frac{L}{h} - 1}. \tag{16}$$

$$K_{m,n} = -\frac{(2 + A_{m,n}h)K_{m-1,n}}{(2 + A_{m,n}h)L_{m-1,n} - 4}.$$

Din prima ecuație a sistemului (13) obținem

$$p_{m,n} = L_{m,n}\, p_{m+1,n} + K_{m,n}, \quad n \in N, \quad m = \overline{1, \frac{L}{h} - 1}. \tag{17}$$

Rezolvînd a doua ecuație din (13) în raport cu $T_{m,n+1}$ obținem

$$T_{m,n+1} = \frac{-KrT_{m-1,n} + (2Kr - D)T_{m,n} - KrT_{m+1,n} + B_{m,n}rh\, T_{m-1,n+1} - C_{m,n}\tau}{B_{m,n}rh - D}, \tag{18}$$

$$n \in N, \quad m = \overline{1, \frac{L}{h} - 1}.$$

Ținînd seama de (12), (14) și (15), se calculează cu (16) coeficienții $L_{m,0}$ și $K_{m,0}$ pentru $m \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{L}{h} - 1\right\}$. Se calculează apoi din (17) valorile $p_{m,0}$, m luînd consecutiv valorile $\frac{L}{h} - 1, \frac{L}{h} - 2, \ldots, 1$. Avînd acum distribuția de temperatură și de presiune în nodurile liniei $n = 0$, din (18) se calculează, ținînd seama de (12) și (14), valorile $T_{m,1}$, m luînd consecutiv valorile $1, 2, \ldots, \frac{L}{h} - 1$. Dacă se neglijează pierderea de căldură la capătul $x = L$, atunci, conform cu condiția (a) din (14), se atribuie lui $T_{\frac{L}{h},1}$ ultima valoare calculată, $T_{\frac{L}{h}-1,1}$. Dacă se ține seama de pierderea de căldură la $x = L$, atunci $T_{\frac{L}{h},1}$ se calculează conform condiției (b) din (14).

Cunoscînd astfel temperaturile în toate nodurile liniei $n = 1$, se determină, cu procedeul expus mai sus, presiunile pe această linie. Se calculează apoi temperaturile pe linia $n = 2$ și așa mai departe. Se determină astfel cîmpul de presiune și de temperatură, în nodurile rețelei, la orice moment. Criteriul spectral de stabilitate al lui Neumann [7] este satisfăcut.

3. **Aplicații numerice.** În cele ce urmează, prezentăm cîteva rezultate numerice, obținute cu ajutorul calculatorului electronic, pentru ur-

mătoarele date : $L = 100$ m, $\Phi = 0{,}4$, $h = 0{,}1$ m ; $\tau = 0{,}5$ ore, $\rho_m c_m = 480{,}519$ kcal/m^3 °C, $p_L = 1$ atm, $K = 1{,}3394$ kcal/m h °C,

$$\rho_a c_a = \begin{cases} 10^3 \text{ kcal/m}^3\,^\circ\text{C pentru legea (1),} \\ 577{,}23 \text{ kcal/m}^3\,^\circ\text{C pentru legea (2).} \end{cases}$$

În realizarea calculelor numerice am urmărit, pe de o parte, influența diferiților parametri operaționali și fizici care intervin în mișcare, iar pe de altă parte, compararea rezultatelor obținute în cazul viscozității variabile cu cele din cazul viscozității constante, obținute în [1], [2]. În aplicații au fost folosite ambele legi de variație a viscozității (1) și (2), dar rezultatele pe care le prezentăm se referă numai la legea (1) ; cele privitoare la legea (2) conduc la rezultate atît de apropiate în cazul viscozității constante și variabile, încît nu prezintă interes practic și nu pot fi prinse în diagrame cu scări obișnuite de lucru. Dăm un exemplu pentru ilustrarea celor afirmate. Pentru $\nabla p = 4$ atm/m, $k = 10^{-12}$ m^2, la o zi de la începerea injecției diferența maximă de temperatură este 0,000212°C, la trei zile este 0,000646°C iar la opt zile, 0,00173°C. Apar deci diferențe neglijabile de temperatură, neinteresante, mai ales, pentru necesitățile practice. Nu mai insistăm asupra acestei chestiuni, ci ne mulțumim numai să o semnalăm. În concluziile lucrării vom încerca să explicăm cauza acestei situații.

În ceea ce privește legea (1), a fost urmărită influența variației gradientului de presiune, a permeabilității mediului și a timpului de injecție. Caracteristica generală a rezultatelor obținute este că diferența dintre temperaturile obținute în cazul viscozității variabile și cele din cazul viscozității constante este atît de mică încît pentru exigențele practice ea poate fi neglijată. Din cele ce urmează se va vedea ordinul de mărime al acesteia. Datorită acestui fapt vom prezenta numai cîteva dintre rezultatele obținute, pe care le considerăm suficiente pentru sublinierea acestui fapt. În toate diagramele pe care le prezentăm, linia continuă corespunde cazului cu viscozitate variabilă, iar cea întreruptă, celui cu viscozitate constantă.

În figura 3 sînt prezentate rezultatele obținute cu parametrii indicați, pentru permeabilitățile $k = 10^{-13}$ m^2 ; $5 \cdot 10^{-13}$ m^2 și 10^{-12} m^2. Analizînd rezultatele din această figură se constată, în primul rînd, asemănarea de comportare a temperaturii cu comportarea obținută în [1] și, în al doilea rînd, faptul că diferențele de temperatură dintre cele două cazuri sînt foarte mici. Astfel, la $k = 5 \cdot 10^{-13}$ m^2 diferența este 0,066°C, iar la $k = 10^{-13}$ m^2 este 0,0027°C.

În figura 4 se poate urmări variația temperaturii la datele indicate pe figură, la cinci, șapte și nouă zile de la începerea injecției. În acest caz, diferența de temperatură variază în modul următor : la cinci zile ea este 0,066°C, la șapte zile, 0,126°C, iar la nouă zile devine 0,172°C. Diferențele sînt ceva mai mari decît în cazul precedent, dar, totuși, nesemnificative pentru interesul practic.

Figura 5 prezintă variația temperaturii la două, trei și patru zile de la începerea injecției, pentru care se realizează următoarele diferențe de temperatură : 0,13°C la două zile, 0,275°C la trei zile și 0,065 °C la patru zile.

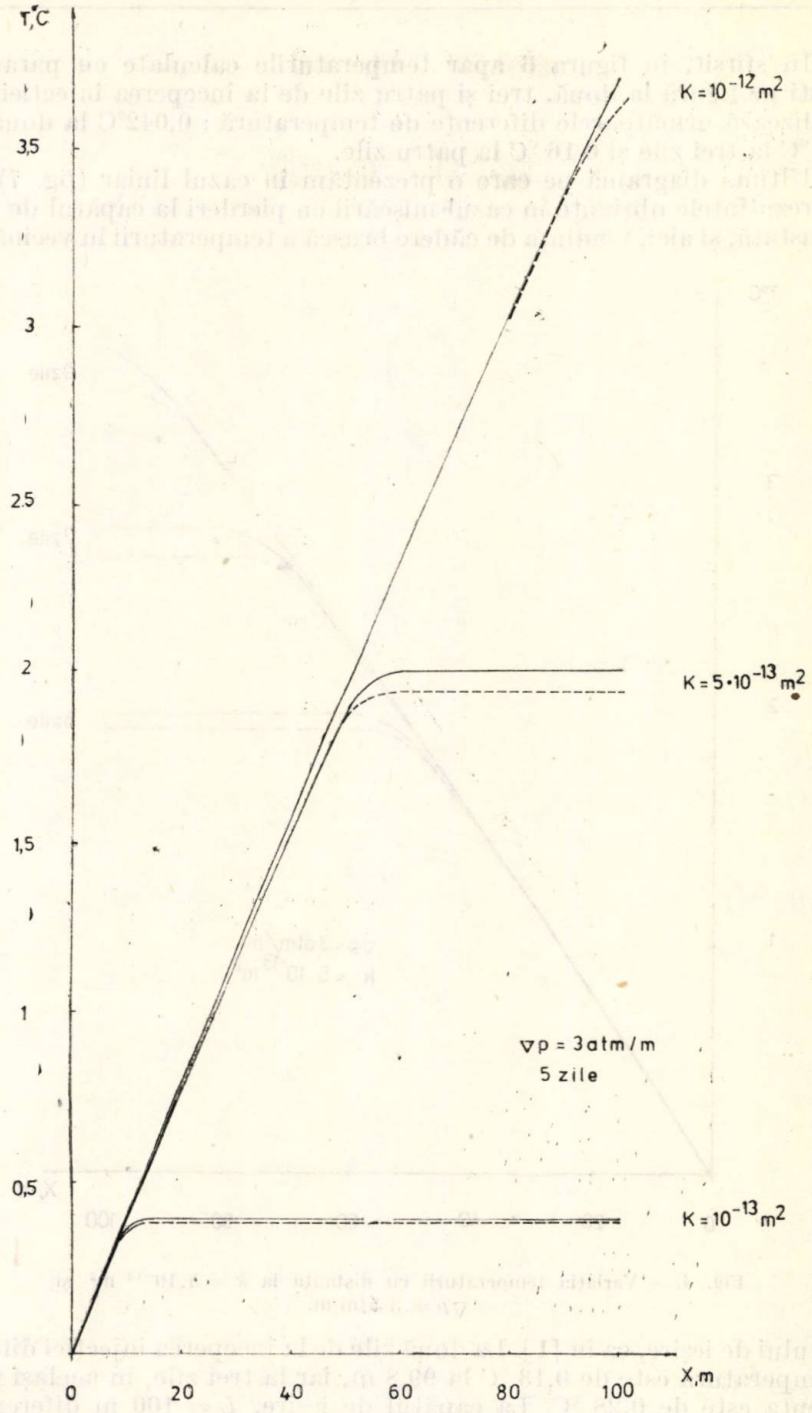


Fig. 3. — Variația temperaturii cu distanța la cinci zile de la începerea injecției; $\nabla p = 3$ atm/m.

În sfîrșit, în figura 6 apar temperaturile calculate cu parametrii indicați pe figură la două, trei și patru zile de la începerea injecției, cînd se realizează următoarele diferențe de temperatură : 0,042°C la două zile, 0,093 °C la trei zile și 0,16 °C la patru zile.

Ultima diagramă pe care o prezentăm în cazul liniar (fig. 7), prezintă rezultatele obținute în cazul mișcării cu pierderi la capătul de ieșire. Se constată, și aici, tendința de cădere bruscă a temperaturii în vecinătatea

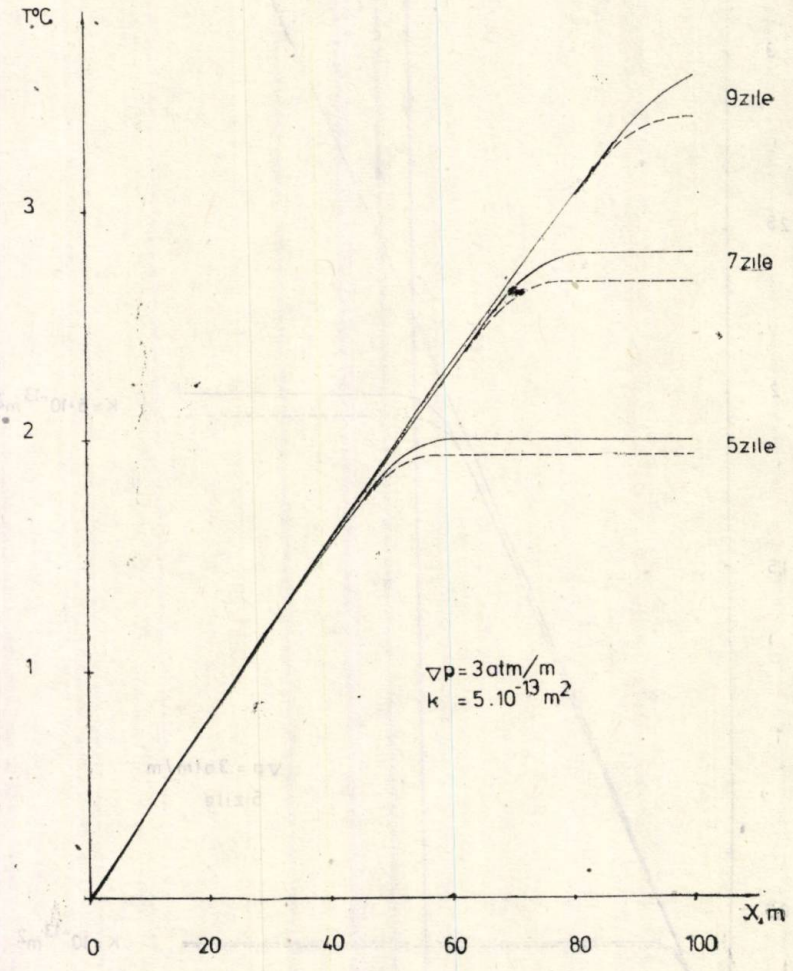


Fig. 4. — Variația temperaturii cu distanța la $k = 5.10^{-13}$ m² și $\nabla p = 3$ atm/m.

capătului de ieșire, ca în [1]. La două zile de la începerea injecției diferența de temperatură este de 0,13 °C la 99,8 m, iar la trei zile, în același punct, diferența este de 0,28 °C. La capătul de ieșire, $L = 100$ m diferența de temperatură este de 0,029 °C la două zile, și de 0,058 °C la trei zile de la începerea injecției. Ne limităm la aceste cîteva rezultate obținute în cazul liniar.

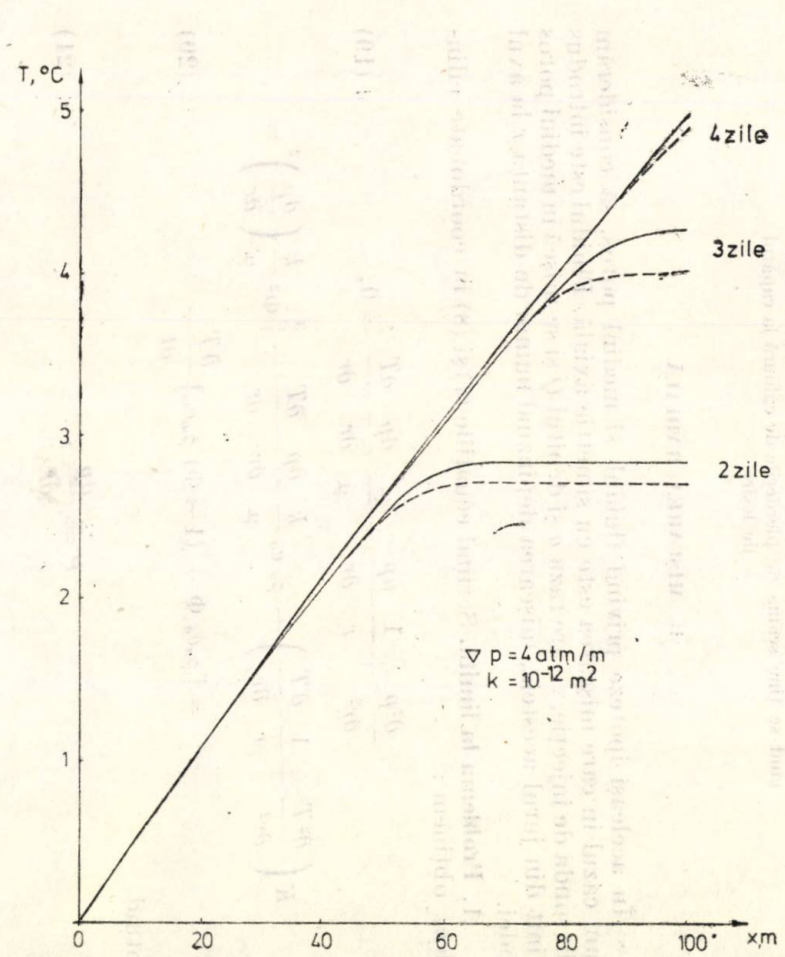


Fig. 5. — Variația temperaturii cu distanța la $k = 10^{-12}$ m² și $\nabla p = 4$ atm/m.

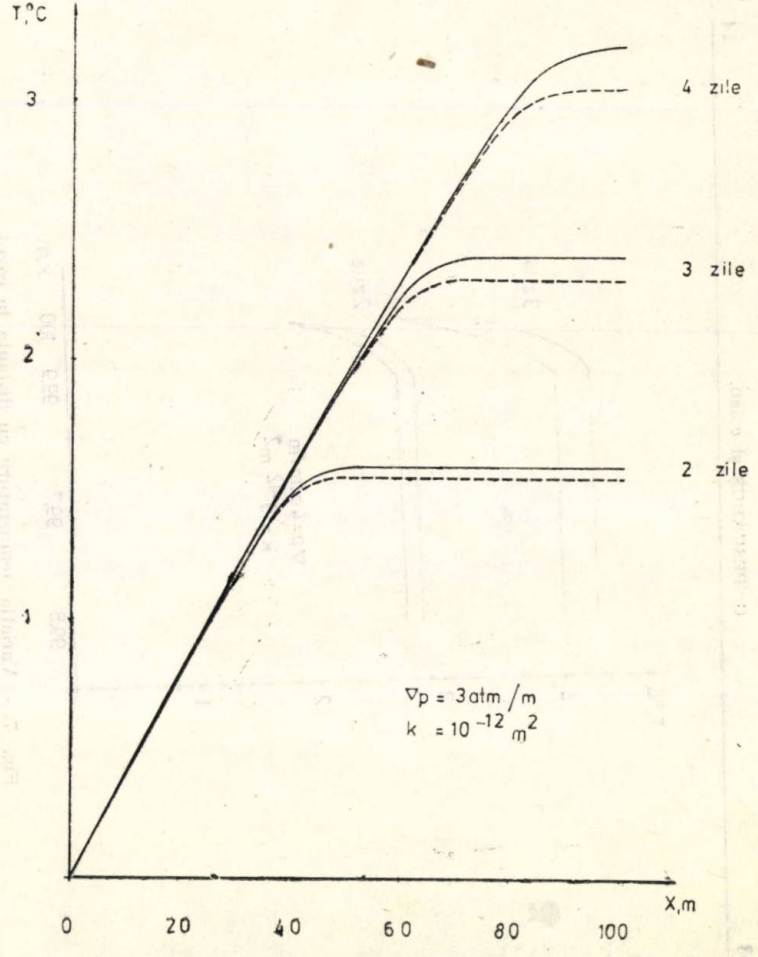


Fig. 6. — Variația temperaturii cu distanța la $k = 10^{-12}$ m² și $\Delta p = 3$ atm/m.

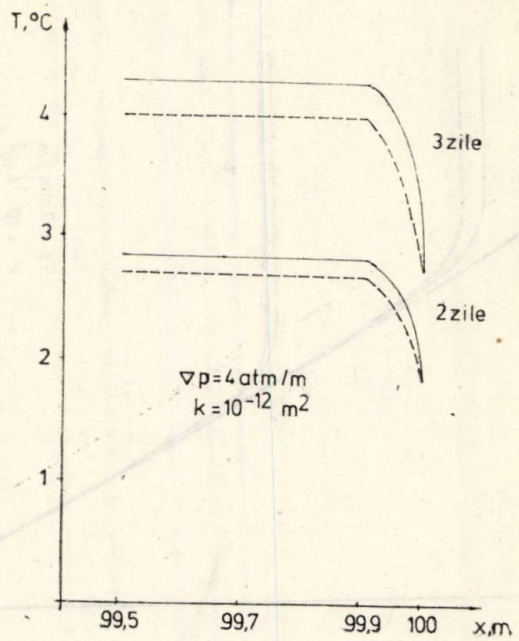


Fig. 7. — Variaţia temperaturii cu distanţa în cazul cînd se ţine seama de pierderile de căldură la capătul de ieşire.

II. MIŞCAREA RADIALĂ

În aceleaşi ipoteze privind fluidul şi mediul poros, să considerăm acum cazul în care mişcarea este cu simetrie axială. Fluidul este introdus prin sonda de injecţie, ce are raza a şi debitul Q şi se mişcă în mediul poros infinit din jurul acesteia, mişcarea depinzînd numai de distanţa r la axul sondei.

1. **Problema la limită.** Scriind ecuaţiile (7) şi (8) în coordonate cilindrice, obţinem :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \tag{19}$$

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \rho_a c_a \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} + \sqrt[3]{\Phi^2}\,\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 =$$

$$= [\rho_a c_a \Phi + (1-\Phi)\,\rho_m c_m]\,\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{20}$$

Notînd

$$P = \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{21}$$

$$\bar{A} = -\frac{1}{r} + \frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial T}{\partial r}, \quad \bar{B} = \frac{K}{r} + \rho_a c_a \frac{k}{\mu} P,$$

$$\bar{C} = \sqrt[3]{\Phi^2}\,\frac{k}{\mu} P^2 \tag{22}$$

obținem sistemul :

$$\frac{\partial P}{\partial r} - \bar{A} P = 0, \tag{23}$$

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \bar{B}\frac{\partial T}{\partial r} + \bar{C} = D\frac{\partial T}{\partial t},$$

cu funcțiile necunoscute $P = P(r, t)$, $T = T(r, t)$, unde D este dat de (10). Sistemul (23) trebuie rezolvat în următoarele condiții la limită și inițiale :

$$\begin{aligned} P(a, t) &= P_0, \quad t \geqslant 0, \\ T(a, t) &= 0, \quad t \geqslant 0, \\ T(r, 0) &= 0, \quad r \geqslant a, \end{aligned} \tag{24}$$

unde $P_0 = -\dfrac{Q\,\mu(0)}{2\,\pi a k \sqrt[3]{\Phi^2}}$, expresie dedusă ținînd seama de legea lui Darcy.

2. **Soluția aproximativă a problemei la limită.** Să considerăm rețeaua de discretizare din figura 8. Să notăm ; $T_{m,n} = T(a + mh, n\tau)$, $P_{m,n} = P(a + mh, n\tau)$. Aproximînd derivatele în punctul $(a + mh, n\tau)$ astfel :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_{m,n} - P_{m-1,n}}{h},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{h},$$

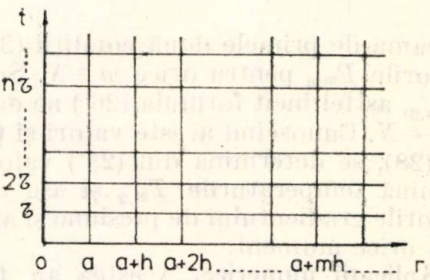


Fig. 8. — Rețeaua de discretizare; cazul radial.

prima ecuație din (23) se scrie :

$$(1 - h\bar{A}_{m,n})\,P_{m,n} - P_{m-1,n} = 0. \tag{25}$$

Dacă în a doua ecuație din (23) aproximăm derivatele în punctul $(a+mh, n\tau)$ astfel :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_{m,n} - P_{m-1,n}}{h}; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{m\,n+1} - T_{m-1,n+1}}{h},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\tau}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{h^2}$$

aceasta devine :

$$KR(T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}) + \bar{B}_{m,n}\, hR(T_{m,n+1} - T_{m-1,n+1}) - D(T_{m,n+1} - T_{m,n}) = -\bar{C}_{m,n}\ \tau, \tag{26}$$

unde am notat :

$$\bar{A}_{m,n} = -\frac{1}{a+mh} + \frac{\mu'(T_{m,n})}{\mu(T_{m,n})} \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{h},$$

$$\bar{B}_{m,n} = \frac{K}{a+mh} + \rho_a c_a \frac{k}{\mu(T_{m,n})} P_{m,n}, \tag{27}$$

$$\bar{C}_{m,n} = \sqrt[3]{\Phi^2}\, \frac{k}{\mu(T_{m,n})} P^2_{m,n},$$

$$R = \tau/h^2.$$

Condițiile (24) se scriu :

$$P_{0,n} = P_0, \quad n \in N,$$

$$T_{m,0} = 0, \quad m \in N, \tag{28}$$

$$T_{0,n} = 0, \quad n \in N.$$

Din (25) obținem

$$P_{m,n} = \frac{P_{m-1,n}}{1 - h\bar{A}_{m,n}}, \tag{25'}$$

iar din (26) :

$$T_{m,n+1} = \frac{-KRT_{m-1,n} + (2KR - D)\, T_{m,n} - KRT_{m+1,n} + \bar{B}_{m,n}\, RhT_{m-1,n+1} - \bar{C}_{m,n}\, \tau}{\bar{B}_{m,n} Rh - D}. \tag{26'}$$

Ținînd seama de primele două condiții (28), din (25') se obțin prin recurență valorile $P_{m,0}$ pentru orice $m \in N$. Se pot astfel calcula coeficienții $\bar{B}_{m,0}$ și $\bar{C}_{m,0}$, astfel încît formula (26') ne dă valorile $T_{m,1}$ ale temperaturii, pentru $m \in N$. Cunoscînd aceste valori și ținînd seama de prima și a treia condiție (28), se determină din (25') valorile $P_{m,1}$, $m \in N$, apoi cu (26') se determină temperaturile $T_{m,2}$ și așa mai departe. Se pot determina astfel valorile gradientului de presiune și ale temperaturii în toate nodurile rețelei, la orice moment.

3. **Aplicații numerice.** Acestea au fost făcute pentru următoarele date : $\Phi = 0{,}4$; $h = 0{,}1$ m ; $\tau = 0{,}5$ ore, $\rho_m c_m = 480{,}519$ kcal/m³ °C, $K = 1{,}3394$ kcal/m, h °C, $\rho_a c_a = 10^3$ kcal/m³ °C ; $a = 0{,}1$ m. Pe baza calculelor din cazul liniar, unde rezultatele obținute sînt foarte apropiate

dacă viscozitatea este variabilă sau constantă, în acest caz nu a mai fost luată în considerare legea (2) de variație a viscozității cu temperatura. Ideea conducătoare în efectuarea aplicațiilor numerice este aceeași ca în cazul liniar : s-a urmărit influența parametrilor care determină mișcarea asupra temperaturii și s-au comparat rezultatele obținute în cazul viscozității variabile cu cele din cazul viscozității constante.

În figura 9 sînt prezentate curbele de variație ale temperaturii, pentru datele indicate, la valorile debitului de injecție Q de 0,3 m³/h.m ; 0,5 m³/h . m ; 0,8 m³/h.m și 1 m³/h .m.

Din analiza rezultatelor prezentate în această figură se constată că, spre diferență de cazul liniar, temperaturile obținute în cazul viscozității constante sînt mai ridicate decît cele din cazul viscozității variabile. Rezultatul este firesc, deoarece în cazul radial se injectează un debit de fluid același, fie că viscozitatea este variabilă, fie că ea este constantă. Dacă fluidul este mai viscos, ceea ce se întîmplă în cazul viscozității con-

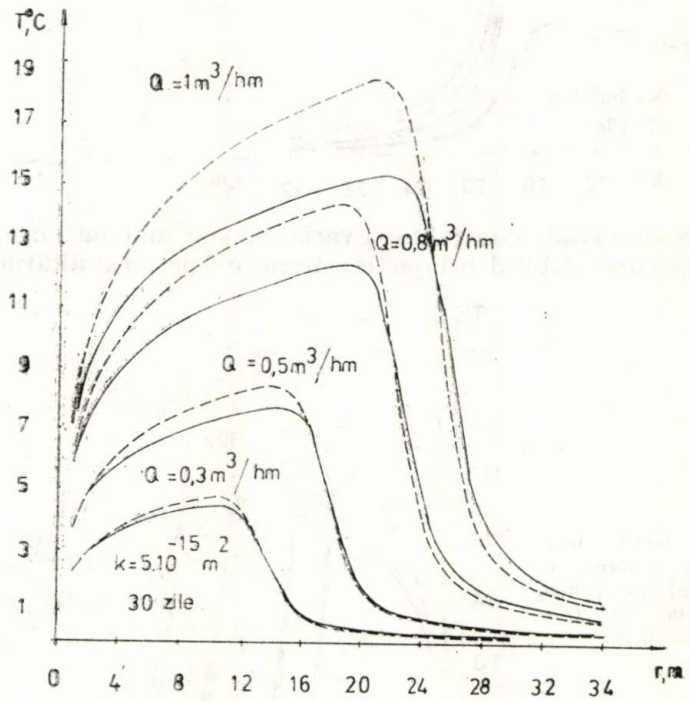


Fig. 9. — Variația temperaturii cu distanța de la sonda de injecție la 30 de zile de la începerea injecției pentru $k = 5.10^{-15}$ m².

stante, energia de injecție este mai mare decît în cazul fluidului mai puțin viscos și deci căldura degajată de frecarea intermoleculară este mai mare. În cazul liniar, se păstrează diferența de presiune constantă ; dacă fluidul este mai viscos, filtrează mai lent decît în caz contrar iar căldura degajată este mai mică.

Această caracteristică a comportării temperaturii se păstrează în toate cazurile care vor fi prezentate în continuare.

În figura 10 sînt prezentate rezultatele obținute în condițiile menționate pentru permeabilitățile $k = 10^{-14}$ m²; 5.10^{-15} m² și 3.10^{-15} m². Se constată că atît temperaturile calculate, cît și diferențele dintre tem-

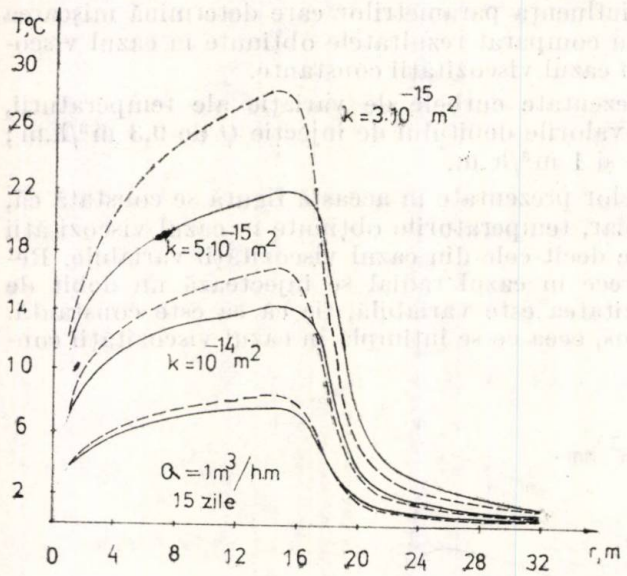


Fig. 10. — Variația temperaturii cu distanța la sonda de injecție la 15 zile de la începerea injecției pentru $Q = 1$ m³/h.m.

peraturile la viscozitate constantă și variabilă sînt mai mari decît în cazul precedent, deoarece debitul de injecție este mare și permeabilitățile sînt mici.

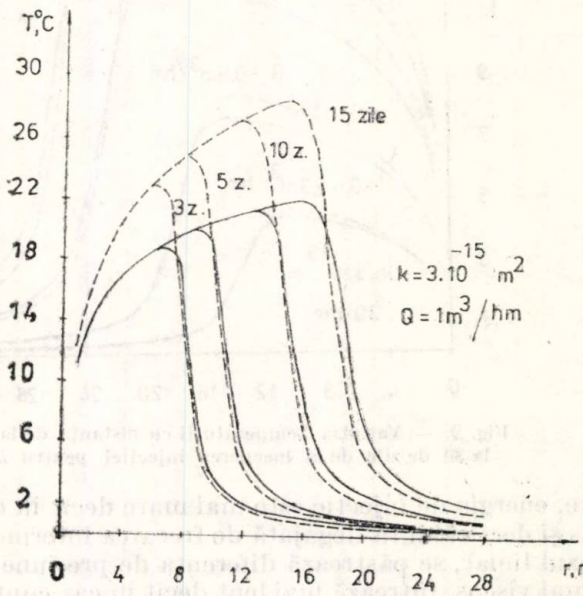


Fig. 11. — Variația temperaturii cu distanța la sonda de injecție pentru $k = 3.10^{-15}$ m² și $Q = 1$ m³/h.m.

Figura 11 prezintă rezultatele obținute la 3, 5, 10 și 15 zile de la începerea injecției, pentru datele indicate pe figură. Aspectul curbelor de variație a temperaturii este același cu cel din cazurile prezentate anterior.

Ne limităm la aceste rezultate, pe care le considerăm suficiente pentru a sublinia diferențele de temperatură dintre cazurile viscozității constante și variabile.

CONCLUZII

Din cele arătate mai sus se pot trage cîteva concluzii utile, mai ales pentru aplicațiile practice ale rezultatelor obținute în lucrare.

a. Diferențele de temperaturi între cazurile viscozității constante și variabile sînt, în general, atît de mici încît nu se poate spune, din punct de vedere aplicativ, că prezintă vreun interes. Cu toate că, în cazul radial, apar diferențe de aproximativ 6—7°C, aceasta nu infirmă afirmația de mai sus; aceste diferențe se obțin la debite foarte mari, $Q = 1$ m^3/h m și la permeabilități foarte mici, $k = 3 \cdot 10^{-15}$ m^2, după 15 zile de injecție. Singurul caz în care o asemenea diferență de temperatură poate fi semnificativă, este acela al aprinderii spontane, unde fiecare grad centesimal își are importanța sa în cinetica arderii. În celelalte cazuri, în general, neglijarea variației viscozității cu temperatura nu este semnificativă.

b. O altă caracteristică a comportării temperaturii în cazul radial este că, dacă se ține seama de variația viscozității, se obțin temperaturi mai mici decît în cazul în care ea se neglijează și viteza de avansare a frontului crește, spre diferență de cazul liniar. Aceasta se explică prin faptul că, în cazul viscozității variabile, aceasta scade pe măsură ce procesul evoluează și viteza de filtrație crește.

c. În cazul mișcării liniare, stabilizarea temperaturii după un anumit interval de timp se păstrează și în cazul vîscozității variabile. După acest interval cele două temperaturi sînt aproape identice

Cu toate că rezultatele obținute în lucrare evidențiază diferențe nesemnificative, din punct de vedere practic, între cele două cazuri analizate, considerăm că analiza trebuia făcută tocmai pentru a arăta ordinul de mărime al erorii care se face dacă se neglijează variația viscozității cu temperatura.

Primit în redacție la 23 aprilie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. V. IONESCU, I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, *Influența frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul liniar*, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 3 (1985).
2. V. IONESCU, I. TUTUNEA, AL. TURTĂ, *Influența frecării intermoleculare a particulelor fluide în mișcarea unui fluid vîscos într-un mediu poros. Cazul radial*. St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 5 (1985).
3. S. M. FAROUQ ALI, *Fluid Viscosity, its Estimation, Measurement and Role in Thermal Recovery*. Producers Monthly, ian. (1967).
4. B. S. GOTTFRIED, *A Mathematical Model of Thermal Oil Recovery in Linear Systems*, Soc. of Petrol. Eng. Journ., sept. (1965).
5. THE LATE MAX JACOB, *Heat transfer*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.
6. A. N. TIHONOV, A. A. SAMARSKI, *Uravnenia matematicescoi fiziki*, Nauka, Moskva, 1972.
7. S. K. GODUNOV, V. S. REABENKI, *Scheme de calcul cu diferențe finite*, Edit. tehnică, București, 1977.

ACUMULAREA GAZELOR ȘI TIRAJUL LOR CĂTRE IMOBILE

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare se prezintă cazul frecvent întîlnit în practica distribuției și transportului gazelor naturale și anume atunci cînd acestea se pot acumula în mediul poros adiacent unui defect și apoi sînt „redate" mediului ambiant sau imobilelor alăturate.

Prezența mediului poros permeabil și înmagazinator al gazelor scurse prin defect îl asimilează pe acesta cu un rezervor de mărime nedefinită în care gazele se acumulează pe măsură ce se mărește perioada de depistare și remedierea defectului. Scurgerea gazelor din rezervorul subteran se poate efectua prin suprafața permeabilă a solului sau către anumite spații limitate în care se acumulează gazele printr-un tiraj natural în raport cu aerul. Tirajul natural al gazelor este descris de numărul lui Froude.

1. INTRODUCERE

În practica transportului și distribuției gazelor naturale au apărut unele accidente deosebit de grave ca urmare a infiltrării gazelor în imobilele adiacente defectelor pe conducte.

Gazele infiltrate în imobile provin fie direct din defecte, sau ca urmare a unei „înmagazinări" în solul vegetal, impermeabil la suprafață din cauza înghețului sau a lucrărilor din acest loc, și apoi, prin tiraj, pătrund în spațiile limitate (imobile, canale termice etc.).

Este posibilă și o combinare a celor două efecte semnalate mai înainte, ambele avînd ca urmare o pătrundere a gazelor în imobilele adiacente defectelor formate pe conducte.

2. ACUMULAREA GAZELOR ÎN MEDIUL POROS ADIACENT DEFECTULUI

În cele ce urmează ne ocupăm de ambele aspecte. Astfel, în ceea ce privește „înmagazinarea" gazelor într-un mediu poros adiacent defectului astupat de către o suprafață impermeabilă (sol înghețat, asfalt etc.) se poate pleca de la debitul masic de gaze M scurs prin mediul poros din apropierea defectului,

$$M = 2\pi r^2 \rho v, \tag{1}$$

în care ρ este densitatea gazelor prin suprafața semisferei $(2\pi r^2)$ de rază r; v — viteza de filtrare dată de legea lui Darcy,

$$v = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dr}, \tag{2}$$

k este permeabilitatea stratului filtrant, iar μ viscozitatea dinamică a gazelor.

Introducerea vitezei în expresia debitului masic duce la obținerea ecuației diferențiale

$$p\,\mathrm{d}p = -M\frac{\mu RT}{2\pi k}\frac{\mathrm{d}r}{r}, \tag{3}$$

care se soluționează cu condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\text{la } r = r_s,\ p = p_e;\\ &\text{la } r = r_x\ p = p_x, \end{aligned} \tag{4}$$

p_e este presiunea din imediata apropiere a defectului, iar p_x — presiunea din mediul poros pe raza oarecare r_x.

Avînd în vedere condițiile la limită admise, prin integrarea ecuației diferențiale (3) se obține debitul masic

$$M = \frac{\pi k(p_e^2 - p_x^2)}{\mu RT\left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_x}\right)} \approx \frac{\pi k(p_e^2 - p_x^2)\,r_s}{\mu RT}. \tag{5}$$

La obținerea acestuia s-a admis că gazul este perfect pentru care s-a utilizat ecuația de stare [3]

$$\rho = \frac{p}{RT}, \tag{6}$$

R fiind constanta de gaz perfect (pentru metan $R = 519{,}2$ J/kgK, pentru aer $R_a = 287{,}03$ J/kgK).

De asemenea, tot la obținerea egalității aproximative (5) s-a admis că $r_s \ll r_x$, iar debitul M este egal și cu acela care se filtrează în zona radială din exteriorul razei r_x. Printr-un raționament asemănător cu acela care a dus la obținerea ecuației diferențiale (3) se găsește de această dată :

$$p\,\mathrm{d}p = -M\frac{\mu RT}{2\pi kH}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r}. \tag{7}$$

Dacă se admit acum condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\text{la } r = r_e,\ p = p_a;\\ &\text{la } r = r_x,\ p = p_x, \end{aligned} \tag{8}$$

se găsește expresia de bitului

$$M = \frac{\pi kH(p_x^2 - p_a^2)}{\mu RT\ln\frac{r_e}{r_x}}. \tag{9}$$

Este cunoscut faptul că pentru un argument x mic există aproximația

$$\ln(1 + x) \approx x \tag{10}$$

şi datorită acesteia se scriu succesiv relaţiile

$$\ln \frac{r_e}{r_x} = -\ln \frac{r_x}{r_e} \approx -\left(\frac{r_x}{r_e} - 1\right) = \frac{r_e - r_x}{r_e} \approx 1. \tag{11}$$

La ultima aproximaţie s-a ajuns admiţînd că $r_x \ll r_e$. Cu acest rezultat, debitul dat de (9) se pune sub forma

$$M = \frac{\pi k H(p_x^2 - p_a^2)}{\mu RT}. \tag{12}$$

Eliminarea presiunii p_x din ecuaţiile (5) şi (12) duce la expresia debitului

$$M = \frac{\pi k(p_e^2 - p_a^2)}{\mu RT\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{r_s}\right)}. \tag{13}$$

Şi acum se poate admite că $r_s \ll H$, ceea ce face ca debitul masic scurs prin mediul poros adiacent defectului va fi

$$M = \frac{\pi k\, r_s(p_e^2 - p_a^2)}{\mu RT}. \tag{14}$$

Ecuaţia obţinută permite să se determine şi variaţia zonei invadate de gazele ieşite din conductă. Pentru aceasta, se scrie egalitatea dintre masa elementară de gaze scursă în intervalul de timp $\mathrm{d}T_e$ cu aceea înmagazinată în volumul, de asemenea elementar, $2\pi r m H \mathrm{d}r$, ceea ce duce la obţinerea ecuaţiei

$$\pi r\, mH \frac{p_e + p_a}{RT}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi k\, r_s(p_e^2 - p_a^2)}{\mu RT}\,\mathrm{d}T_e. \tag{15}$$

La scrierea acestei egalităţi s-a admis că densitatea medie a gazelor ce invadează zona adiacentă defectului este egală cu media aritmetică a densităţilor corespunzătoare presiunilor p_e şi p_s. Considerînd că în momentul iniţial raza invadată este nulă, ecuaţia diferenţială (15) se integrează cu uşurinţă şi se găseşte

$$r_e = \sqrt{\frac{2kT_e r_s}{m\mu H}(p_e - p_a)}. \tag{16}$$

Se observă imediat că pentru o rază echivalentă nulă a defectului $r_s = 0$, duce la o rază invadată de către gaze, de asemenea nulă. Se poate efectua o analiză în raport cu oricare dintre parametrii de intră în expresia razei r_e.

De exemplu, în raport cu perioada de timp scursă din momentul scurgerii gazelor pînă ce raza zonei invadate devine r_e, se vede că pe măsură ce se măreşte această perioadă, raza r_e creşte; m reprezintă porozitatea mediului poros acumulant al gazelor.

Cantitatea de gaze înmagazinată într-un mediu poros adiacent unui defect cu raza echivalentă r_s va fi

$$G = \pi r_e^2 mH \frac{p_e + p_a}{2RT} = \frac{\pi k T_e r_s (p_e^2 - p_a^2)}{\mu RT}. \tag{17}$$

De exemplu, pentru un defect al conductei de forma unei fisuri cu lungimea 4 cm și deschiderea medie de 0,15 cm se poate aprecia o rază echivalentă a acestuia

$$r_s = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}15}{\pi}} 10^{-4} = 4{,}3702 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Dacă se asimilează gazele scurse metanului ($\mu = 0{,}015$ cP $= 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ns/m^2) la temperatura $T = 293$ K, și o permeabilitate medie $k = 20$ D $= 20 \cdot 10^{-12}$ m^2 la o presiune din conducta de distribuție de aproximativ egală unei coloane de 40 cm apă rezultă

$$p_e = 1{,}006994 \cdot 10^5 + 0{,}40 \cdot 9{,}81 \cdot 1000 = 101717{,}4 \text{ N/m}^2.$$

Presiunea atmosferică s-a luat egală cu 100699,45 N/m^2 care este echivalentă unei coloane de mercur de 755 mm.

Într-o zi ($T_e = 86400$ s), se scurge în mediul poros cantitatea de gaze egală cu 2,1423 kg.

Un calcul extrem de simplu arată că această cantitate „redată" în totalitate unui spațiu limitat cu o concentrație volumică în raport cu aerul egală cu 5,25% ar duce la un volum

$$V_s = \frac{G}{0{,}0525} \cdot \frac{RT}{p_a} = \frac{2{,}1423 \cdot 519{,}2 \cdot 293}{0{,}0525 \cdot 100699{,}45} = 61{,}64 \text{ m}^3.$$

Calculele noastre, deși aproximative, arată că un imobil cu volum mediu obișnuit (de exemplu 50 m^3) poate atinge limita inferioară de explozie dacă din defectul format pe o conductă de distribuție gazele se scurg într-o perioadă de 1 zi.

Formula obținută pentru calculul razei r_e, relația (16), arată, tot cu datele numerice luate în exemplul de calcul anterior, că orice imobil care este situat la o distanță mai mică decît raza $r_e = 1{,}43$ m față de defect, poate fi supus unei infiltrații gazeifere dacă nu este complet izolat de sol.

Această concluzie arată cît de periculoase sînt defectele formate pentru toate imobilele apropiate defectelor.

3. „REDAREA" GAZELOR ÎNMAGAZINATE UNUI IMOBIL ADIACENT DEFECTULUI

Gazele „înmagazinate" în mediul poros sînt „redate" mediului ambiant dacă solul prezintă suprafața permeabilă sau unui spațiu limitat dacă acesta atinge zona invadată de către gaze.

Prima situație a constituit obiectul mai multor cercetări efectuate în ultima perioadă de timp [4, 5]. Asemenea situație prezintă importanță din punct de vedere al pierderilor efective de gaze care se scurg din conductă.

Pentru calculul debitului scurs la suprafața solului, este necesară cunoașterea presiunii din exteriorul defectului dacă în conductă, la locul defectului, este presiunea p_e.

În acest scop se știe [1, 2, 4, 5] că debitul masic scurs prin defectul cu secțiunea f și coeficientul de debit α are expresia

$$M = \alpha f \left(\frac{p_e}{p_e}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p_e \rho_e \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_e}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{18}$$

Acest debit este egal cu debitul scurs prin mediul poros cu permeabilitatea k și grosimea H. Ultimul debit se obține avînd în vedere că într-un anumit punct situat pe suprafața solului la distanța r față de punctul de deasupra defectului este viteza de filtrare

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a \sqrt{H^2 + r^2}} \tag{19}$$

și viteza normală v_n la suprafața solului în același punct va fi

$$v_n = v \cos \theta, \tag{20}$$

θ fiind unghiul dintre direcția liniei de curent situată între defect și punctul considerat și verticala locului ce trece prin defect; $\varkappa$ este exponentul adiabatic al gazului. Dacă se are în vedere că se poate scrie

$$\cos \theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}, \tag{21}$$

rezultă imediat

$$v_n = \frac{k}{\mu} \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{H}{H^2 + r^2}. \tag{22}$$

Prin coroana circulară cu suprafața $2\pi r dr$ se va scurge debitul elementar de gaze

$$dQ = 2\pi r v_n dr = 2\pi \frac{k}{\mu} \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{H r \, dr}{H^2 + r^2}, \tag{23}$$

care duce prin integrarea, între 0 și r_∞, la formula

$$Q = \frac{\pi k (p_e^2 - p_a^2)}{\mu p_a} H \ln \frac{r_\infty^2 + H^2}{H^2}, \tag{24}$$

r_∞ se obține cu ușurință considerînd că la acea rază pe suprafața solului, viteza normală a suprafeței

$$\left(v_\infty = \frac{k}{\mu} \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{H}{H^2 + r_\infty^2}\right)$$

și viteza de pe verticala ce trece prin defect

$$\left(v_0 = \frac{k}{\mu}\,\frac{p_c^2 - p_a^2}{p_a}, \frac{1}{H}\right)$$

satisface condiția

$$\frac{v_\infty}{v_0} \leqslant \varepsilon, \tag{25}$$

de unde rezultă, pentru o anumită valoare a numărului arbitrar de mic ε, expresia razei r_∞,

$$r_\infty \leqslant H\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}. \tag{26}$$

Debitul masic scurs la suprafața solului, pentru o anumită valoare a razei r_∞, va fi deci

$$M = Q\,\frac{p_a}{RT} = \frac{\pi k(p_c^2 - p_a^2)}{\mu RT}\,H \ln\frac{r_\infty^2 + H^2}{H^2}. \tag{27}$$

Avînd în vedere că acest debit este egal cu acela dat de către formula (18) rezultă egalitatea care duce la obținerea presiunii p_e din exteriorul defectului

$$p_c^2 - p_a^2 = \frac{\mu RT\,\alpha f}{\pi kH \ln\dfrac{r_\infty^2 + H^2}{H^2}}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_c\,\rho_c}\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}. \tag{28}$$

Dacă se notează cu $x = p_e/p_c$, ecuația anterioară se scrie

$$x^2 - x_a^2 = C\,x^{1/\varkappa}\sqrt{1 - x^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}, \tag{29}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$x_a = \frac{p_a}{p_c} \text{ și } C = \frac{\mu RT\,\alpha f}{p_c^2\,\pi k\,H \ln\dfrac{r_\infty^2 + H^2}{H^2}}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_e\,\rho_c}. \tag{30}$$

Este cunoscut că membrul drept al ecuației (29) prezintă un maxim pentru

$$\left(\frac{p_e}{p_c}\right)_{cr} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} = x_{cr}, \tag{31}$$

ceea ce face ca acest termen să aibă valoarea

$$D_{max} = \frac{\mu\,RT\,\alpha f}{p_c^2\,\pi\,kH \ln\dfrac{r_\infty^2 + H^2}{H^2}}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_c\rho_c}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}. \tag{32}$$

Membrul drept al ecuației (29) notat prin D, în funcție de x, este redat printr-un palier pentru orice $0 \leqslant x \leqslant x_{cr}$, ca apoi pentru $x > x_{cr}$ același termen descrește la zero pentru $x = 1$.

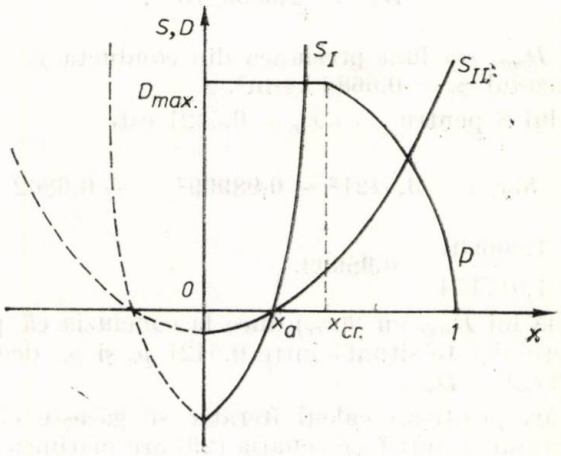


Fig. 1

Membrul stîng tot al ecuației (29), notat cu S, este o parabolă ce intersectează axa absciselor la $x = x_a$ (fig. 1).

Intersecția dintre curba D și S reprezintă soluția ecuației în discuție care poate exista în două intervale. Astfel se vede curba S_I din figura 1, că în cazul în care

$$S(x_{cr}) \geqslant D_{max}, \tag{33}$$

presiunea din exteriorul defectului are valoarea

$$x = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{34}$$

iar în cazul în care are loc inecuația

$$S(x_{cr}) < D_{max}, \tag{35}$$

soluția ecuației (29) satisface condiția

$$\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} < \frac{p_e}{p_c} \leqslant 1. \tag{36}$$

Acest caz este redat prin curba S_{II} în figura 1.

Astfel, tot cu datele numerice din lucrarea noastră pentru un număr $\varepsilon = 0{,}1$, ceea ce denotă că se ia în considerare debitul de gaze scurs la suprafața solului prin cercul de rază

$$r_\infty = H\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} = 1\sqrt{\frac{1}{0{,}1} - 1} = 3 \text{ m}$$

pentru $r_s = 4{,}3702 \cdot 10^{-3}$ m ($f = \pi r_s^2 = \pi \cdot 4{,}3702^2 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-5}\text{m}^2$) și un coeficient de debit mediu $\alpha = 0{,}65$, rezultă

$$D_{max} = 1{,}6539 \cdot 10^{-4}.$$

La calculul lui D_{max} s-a luat presiunea din conducta $p_c = 101717{,}4$ N/m² și densitatea gazului $\rho_c = 0{,}6686$ kg/m³.

Valoarea lui S pentru $x = x_{cr} = 0{,}5421$ este

$$S(x_{cr}) = 0{,}5421^2 - 0{,}98999^2 = -0{,}6862$$

deoarece $x_a = \dfrac{1{,}006994}{1{,}017174} = 0{,}98999.$

Comparația lui D_{max} cu $S(x_{cr})$ duce la concluzia că presiunea p_e din exteriorul defectului este situată între 0,5421 p_c și p_c deoarece, așa cum se constată, $S(x_{cr}) < D_{max}$.

Într-adevăr, printr-un calcul iterativ se găsește că presiunea din exteriorul defectului ce satisface ecuația (29) are mărimea

$$p_e = 0{,}9925 \; p_c = 0{,}9925 \cdot 101717{,}4 = 100954{,}5 \text{ N/m}^2.$$

Debitul de gaze care se scurge prin defect se obține cu ușurință dacă se introduce valoarea presiunii p_e calculată mai înainte în ecuația (18).

4. TIRAJUL GAZELOR NATURALE CĂTRE SPAȚIILE IZOLATE

Se poate efectua un calcul pentru determinarea creșterii în timp a concentrației de gaze într-un imobil cu volumul V_s în ipoteza că acesta este în contact cu zona de gaze scursă prin defect.

Volumul se presupune că este închis fără ventilații și situat la înălțimea h față de sursa de gaze.

La un moment dat în imobil se admite că este concentrația volumică, c, exprimată ca raport între volumul de gaze și volumul de aer; ambele considerate la aceeași presiune p_a.

Densitatea amestecului format din gaze și aer în acel moment va fi

$$\rho_{am} = \frac{p_a}{RT} c + (1-c)\frac{p_a}{R_a T} = \frac{p_a}{RT}[c+(1-c)\Delta] \tag{37}$$

cu Δ a fost notată densitatea relativă față de aer a gazului. Față de presiunea p_r de la o cotă de referință h de unde se scurg gazele către imobil, presiunea gazului va fi

$$p_g = p_r e^{-\frac{gh}{R_{am}T}} \approx p_r\left(1 - \frac{gh}{R_{am}T}\right). \tag{38}$$

Constanta de gaz perfect R_{am} pentru amestec va avea mărimea

$$R_{am} = \frac{R}{c + (1 - c)\,\Delta}. \tag{39}$$

Datorită acesteia, rezultă că presiunea gazului dată de formula (38) se pune

$$p_g = p_r \left\{ 1 - \frac{gh}{RT} [c + (1 - c)\,\Delta] \right\}. \tag{40}$$

La formulele anterioare din dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale s-au păstrat primii doi termeni.

În acelaşi moment dacă în imobil ar fi aer curat, presiunea lui ar fi avut mărimea

$$p_a = p_r \left(1 - \frac{gh}{R_a T} \right). \tag{41}$$

Rezultă că presiunea diferenţială creată prin introducerea gazelor mai uşoare în imobil va fi

$$\Delta p = p_a - p_g = p_r \left\{ \frac{gh}{RT} [c + (1 - c)\,\Delta] - \frac{gh}{R_a T} \right\}, \tag{42}$$

relaţie ce se mai scrie şi sub forma

$$\Delta p = p_r \frac{gh}{R_a T} \cdot \frac{c(1 - \Delta)}{\Delta}. \tag{43}$$

Presiunea diferenţială ce se realizează, de la valoarea zero atunci cînd concentraţia este nulă pînă la valoarea maximă a acesteia cînd concentraţia este egală cu unitatea, se compensează prin pierderile de presiune ale curentului de gaze printr-un tub de curent cu diametrul echivalent d şi lungimea h, adică

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \frac{h}{d} \lambda = p_r \frac{gh}{R_a T} \frac{c(1 - \Delta)}{\Delta}. \tag{44}$$

În ultima egalitate se pune în loc de ρ, raportul $\frac{p_a}{RT}$ şi presiunea p_r se ia egală cu presiunea atmosferică p_a ceea ce face să fie scrisă egalitatea

$$\frac{v^2 \lambda}{d} = 2g\, c(1 - \Delta). \tag{45}$$

Se observă cu uşurinţă că viteza relativă de intrarea gazelor în imobilul izolat satisface relaţia generală

$$v = \text{constantă} \sqrt{d \cdot c} \tag{46}$$

deoarece s-a constatat că la scurgerea gazelor coeficientul de rezistență este o constantă. De exemplu, dacă această constantă se ia egală cu 0,0032, rezultă pentru metan ($\Delta = 0{,}554$)

$$v = 52{,}29\sqrt{d \cdot c}. \tag{47}$$

Relația obținută arată că viteza este proporțională deopotrivă cu radical din concentrația volumică acumulată și cu diametrul echivalent sistemului canalizant în imobil. Se constată că pe măsură ce se mărește concentrația volumică în gaze din interiorul imobilului și viteza ascensională a acestor gaze se mărește.

Relația (47) oferă o interpretare mai generală valabilă pentru toate mișcările gravitaționale și anume faptul că numărul lui Froude, Fr, are valori constante la diverse concentrații ale gazului acumulat în spațiul limitat

$$Fr = \sqrt{\frac{v^2}{gd}} = \sqrt{\frac{2c(1-\Delta)}{\lambda}}. \tag{48}$$

Dacă se consideră tot valoarea lui $\lambda = 0{,}0032$, numărul lui Froude variază, la tirajul gazelor naturale asimilate metanului pentru care se ia $\Delta = 0{,}554$, între limitele 0 și 16,70 după cum concentrația volumică este nulă sau, respectiv, egală cu unitatea. Numărul 0,0032 reprezintă factorul independent de numărul lui Reynolds din expresia coeficientului de rezistență calculat cu formula lui Nikuradze [3]. Expresia concentrației volumice c în raport cu timpul t se deduce avînd ca punct de plecare egalitatea

$$\frac{\pi d^2}{4} v \, dt = V_s dc, \tag{49}$$

unde V_s reprezintă volumul imobilului către care este îndreptat tirajul gazelor naturale.

Din ecuația (48) se poate obține viteza curentului de gaze

$$v = \sqrt{2gd\frac{1-\Delta}{\lambda}}\sqrt{c}, \tag{50}$$

care, introdusă în (49) și integrată în raport cu timpul și concentrația, rezultă

$$t = \frac{8\, V_s\sqrt{\lambda}}{\pi d^2\sqrt{2gd\,(1-\Delta)}}\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right), \tag{51}$$

c_i este concentrația în momentul inițial din volumul V_s.

Din ultima relație obținută se găsește

$$c = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{c_i}} - \frac{\pi d^2\sqrt{2gd\,(1-\Delta)}}{8V_s\sqrt{\lambda}}\, t\right]^2}. \tag{52}$$

Formula arată că în timp concentrația crește cu pătratul valorii acestuia. Din acest motiv, se apreciază că depistările cu întîrziere a defectelor devine foarte periculoase pentru imobilele neizolate și apropiate acestor defecte.

Dacă în formula (51) se înlocuiește viteza ascensională dată de (50) se obține

$$\sqrt{c} = \sqrt{c_i} + \frac{\pi d^2 v}{8 V_s} t. \tag{53}$$

Relația arată tot faptul că concentrația volumică crește proporțional cu pătratul timpului, ca și formula (52), dar pune în evidență și contribuția pe care o are și mărimea diametrului echivalent prin care sînt ascensionate gazele. Totodată ultima formulă ar permite să se stabilească cu exactitate parametrul

$$vd^2 = \frac{8 V_s (\sqrt{c} - \sqrt{c_i})}{\pi \Delta t}, \tag{54}$$

Δt fiind intervalul de timp în care concentrația dă volumul V_s a crescut de la c_i la c, dacă s-ar măsura concentrația în timp.

5. CONCLUZII

În situația că un defect se formează sub suprafața impermeabilă a solului, gazele se acumulează în imediata apropiere a defectului ca într-un rezervor fără pereți.

Dimensiunile rezervorului sînt dependente de permeabilitatea și porozitatea mediului poros, de presiunea diferențială existentă din conductă și din exteriorul defectului.

În cazul în care mediul poros este permeabil pînă la suprafața acestuia, scurgerea depinde de regimul de filtrare prin mediul poros ca și de scurgerea gazelor prin defectul format.

Dacă gazele înmagazinate într-o anumită zonă a mediului poros vin în contact cu un spațiu limitat se produce fenomenul de tiraj al gazelor naturale. Viteza ascensională a gazelor crește pe măsură ce se mărește concentrația din spațiul în care se scurg gazele.

Concentrația volumică a gazelor acumulate într-un spațiu limitat izolat este proporțională cu pătratul timpului măsurat din momentul începerii tirajului.

BIBLIOGRAFIE

1. E. A. BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE, I. MATHIEU, *Mécanique des fluides*, vol. I, Dunod, Paris, 1968.
2. I. CREȚU, *Hidraulică generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983, p. 182—183, 226—227.
3. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1985, p. 24—26, 165—172.
4. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Pierderile de gaze din rețeaua de distribuție*, St. cerc. mec. apl., **40**, 3 (1981).
5. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, *Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari*, St. cerc. mec. apl., **40** 4 (1981).

DISPOZITIVE MECANICE DE AMESTECARE. ÎNCĂRCAREA HIDRODINAMICĂ A TURBINEI CU PALE DREPTE (STANDARD) ȘI A ARBORELUI DISPOZITIVULUI DE AMESTECARE. II

de GH. D. PASAT

Institutul Politehnic București

Pe baza modelării matematice a încărcării turbinei (turbinelor) și arborelui dispozitivului mecanic de amestecare, prezentată în prima parte a lucrării [1], se propune optimizarea rezemării în consolă a arborelui, în sensul minimizării săgeții centrului de masă al amestecătorului. Pe baza teoriilor de optimizare se realizează un program ce este verificat pe un caz cunoscut.

1. INTRODUCERE

În practica inginerească au fost elaborate o serie de metode de rezolvare a problemelor tehnice, care conduc la optimizarea soluțiilor acestora (fig. 1). În afara mijloacelor cu caracter informațional (tabele, caracteristici, nomograme), metodelor inginerești de optimizare le aparțin și metodele matematice clasice, de calcul variațional. În acest sens, analize efectuate [2] au arătat că problemele inginerești de optimizare au fost rezolvate în proporție de 60% manual, prin compararea simplă a variantelor, de aproximativ 30%, prin calcul clasic variațional și numai de 10% cu ajutorul calculatoarelor numerice, utilizînd metode de optimizare.

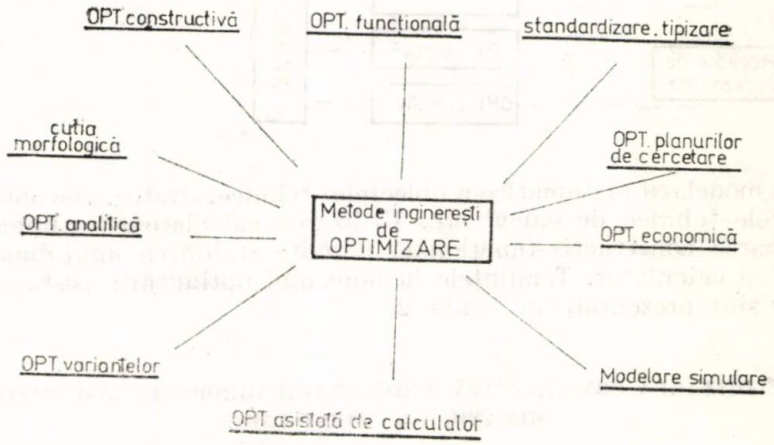


Fig. 1. — Metode inginerești de optimizare.

Optimizarea inginerească operează frecvent asupra a două aspecte distincte : optimizarea funcțională și optimizarea constructivă, concepte complementare care, laolaltă, tind spre realizarea optimului economic.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 47, NR. 6, 1988, P. 577—583

În cadrul industriilor de proces (chimică, alimentară, metalurgică etc.) structurile supuse optimizării constructive (reactoare prevăzute cu dispozitive mecanice de amestecare, coloane, furnale etc.) trebuie să îndeplinească anumite cerințe funcționale, care să asigure funcționarea optimă a utilajului sau instalației. Fundamentată pe o funcționare optimă a utilajului, proiectarea sa constructivă implică diverse variante constructive, materiale, geometrii etc., fiind necesară și optimizarea utilajului din punct de vedere constructiv.

Metodele inginerești de optimizare utilizează frecvent analiza iterativă, care necesită aplicarea unei strategii de optimizare, pe baza căreia se procedează la modificări ale parametrilor constructivi și/sau funcționali, după o analiză prealabilă a rezultatelor obținute prin analiza calității conceptului

În toate cazurile este necesară formularea matematică exactă a problemei tehnice „de optimizat" și rezolvarea acestei probleme cu ajutorul unui procedeu de optimizare adecvat, un rol deosebit avîndu-l:

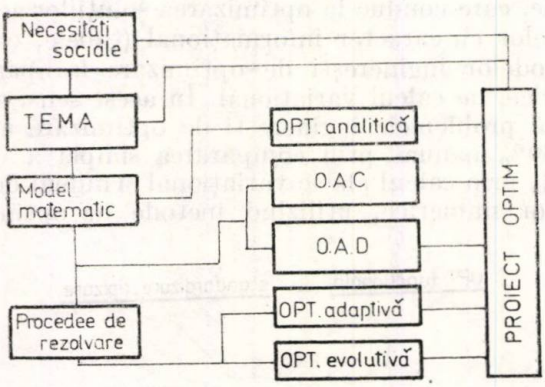


Fig. 2. — Metode de optimizare asistate de calculator: OAC — optimizare asistată de calculator; ODC — optimizare în dialog cu calculatorul.

nivelul modelării matematice a obiectelor tehnice, strategia de optimizare, mijloacele tehnice de calcul etc. Utilizarea calculatoarelor numerice în optimizarea constructiv-funcțională permite stabilirea unui dialog între inginer și calculator. Tendințele în domeniul optimizării asistate de calculator sînt prezentate în figura 2.

2. OPTIMIZAREA CONSTRUCTIVĂ A REZEMĂRII ARBORELUI DISPOZITIVULUI MECANIC DE AMESTECARE

Pe baza încărcării hidrodinamice a amestecătorului, a elasticității arborelui, a reazemelor și a săgeții datorită jocului din lagăre, s-a determinat [1] poziția centrului de masă al amestecătorului y_c în cazul rezemării arborelui dispozitivului de amestecare în consolă (fig. 3):

$$y_c = \frac{F_R^* L}{3EI}(L-1)^2 + k_1 d_a^{1-2\rho}(F_R^*) + \frac{s(L-1)}{l}. \qquad (1)$$

Optimizarea presupune stabilirea unei funcții obiectiv care să caracterizeze starea de tensiune și deformațiile corespunzătoare.

În cele ce urmează se consideră că expresia săgeții y_c a centrului de masă al amestecătorului reprezintă funcția obiectiv, respectiv

$$y_c \overset{!}{=} \text{MINIM} \tag{2}$$

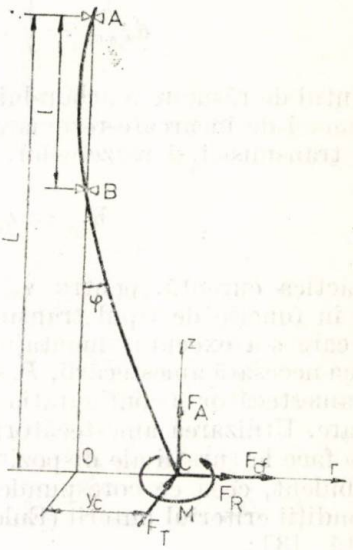


Fig. 3. — Schema încărcării dispozitivului mecanic de amestecare în cazul rezemării în consolă a arborelui.

Limitele impuse acestei funcții obiectiv decurg din condițiile de proiectare a dispozitivului [3]:

$$\begin{aligned} d_a &\leqslant d_{a,max}, \\ L_{min} &\leqslant L \leqslant L_{max}, \\ \tau_{max} &\leqslant \tau_a, \\ s &\leqslant s_{montaj}. \end{aligned} \tag{3}$$

Prin considerarea valorilor maxime ale restricțiilor impuse, funcția obiectiv devine:

$$y_c = \frac{64\, F_R^* \cdot L_{max}}{3\, E\, \pi\, d_{a,max}^4} (L_{max} - l)^2 + k_1 d_{a,max}^{1-2p} (F_R^*)^p + \\ + \frac{s_{montaj}(L_{max} - l)}{l}. \tag{4}$$

Rezolvarea problemei de optim este posibilă numai prin precizarea valorii diametrului maxim al arborelui, $d_{a,max}$. Această valoare se deter-

mină din condiția ca tensiunea de forfecare echivalentă din reazemul B (fig. 3) să atingă valoarea admisibilă [4]:

$$\tau_{ech,B} = \tau_a. \tag{5}$$

Rezultă

$$d_{a,max} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t_B}}{\pi \cdot \tau_a}}. \tag{6}$$

Momentul de răsucire a arborelui în zona reazemului B se determină pe baza schemei de încărcare-rezemare a acestuia, prin considerarea randamentelor transmisiei și reazemelor, η_T, [3]:

$$M_{t_B} = \eta_T \cdot \frac{P}{n}. \tag{7}$$

În practica curentă, pentru η_T se întîlnesc valori cuprinse între 0,75 și 0,9, în funcție de tipul transmisiei, tipul de rulmenți și clasa de precizie în care s-a executat montajul.

Puterea necesară amestecării, P, se determină experimental în funcție de tipul de amestecător și configurația geometrică a dispozitivului mecanic de amestecare. Utilizarea amestecătorului tip turbină standard este recomandat a se face la turații ale dispozitivului care să inducă un spectru de curgere turbulent, ceea ce corespunde unor numere Reynolds $Re \geqslant 10^4$. În aceste condiții criteriul puterii (Euler) are valoarea $Eu = 5$.

Rezultă [3]:

$$Eu \equiv \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} = 5; \tag{8}$$

$$M_{t_B} = 5 \cdot \eta_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot d^5. \tag{9}$$

Cu aceste precizări ($d_{a,max}$, Eu, M_{t_B}) se poate concluziona că funcția obiectiv (4) depinde numai de valorile distanței dintre reazeme, [1].

3. PROGRAM DE OPTIMIZARE CONSTRUCTIVĂ A REZEMĂRII ARBORELUI ÎN CONSOLĂ

Pentru obținerea săgeții minime (optime) s-a elaborat un program de optimizare asistată de calculator (fig. 4). De o importanță deosebită privind amploarea programului a fost soluția inițială, stabilită în prealabil și prezentată succint în lucrarea [5].

Valorile de intrare utilizate în exemplul examinat:

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3; \; p = 9/10,\ 2/3; \; k_1 = 0{,}00075 \text{ ([1]. tab. 1)};$$

$$d = 0{,}08 \text{ m}; \; s_{montaj} = 0{,}0001 \text{ m}; \; L_{max} = 1 \text{ m}; \; n_i = \frac{5}{3} \text{ s}^{-1};$$

$$n_s = 10\,s^{-1};\quad \Delta n = \frac{5}{3}\,s^{-1};\quad m_{a,i} = 0{,}1\ \text{kg};\quad m_{a,s} = 0{,}5\ \text{kg},$$

$$\Delta m_a = 0{,}05\ \text{kg};\quad e_i = 0{,}005\ \text{m};\quad e_s = 0{,}05\ \text{m};\quad \Delta e = 0{,}005\ \text{m},$$

$$l_i = 0{,}1\ \text{m};\quad l_s = 0{,}6\ \text{m};\quad \Delta l = 0{,}05\ \text{m};\quad c_R = 0{,}04.$$

Pe baza datelor rezultate în urma rulării programului se pot stabili dependența grafică $y_c = f(1)$ (fig. 5), pentru diferite valori ale variabilelor (turație, dezechilibre reziduale). Utilizarea unor astfel de grafice permite celor ce proiectează, execută și utilizează dispozitive mecanice de amestecare, limitarea elementelor care conduc la obținerea unor dezechilibre reziduale, care afectează funcționarea în condiții normale a reactoarelor prevăzute cu astfel de dispozitive.

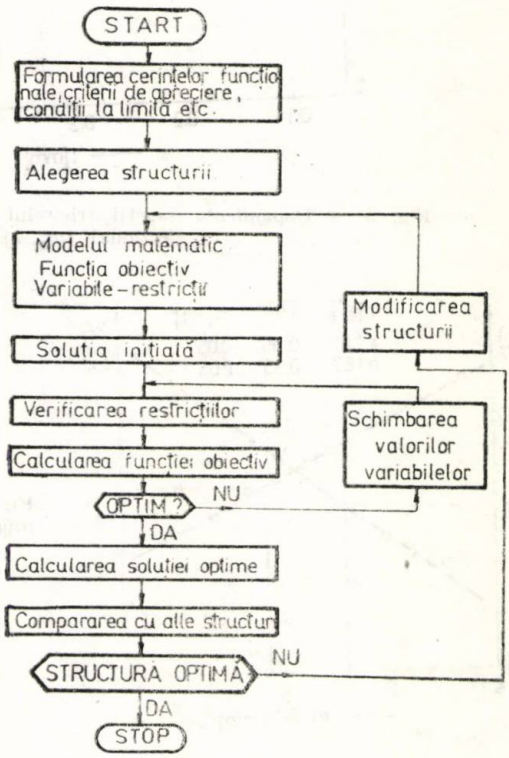


Fig. 4. — Structura programului de optimizare asistată de calculator.

Eliminarea acestor cauze se realizează atît la nivelul etapei de proiectare, prin conceperea unor soluții constructive simetrice față de axa de rotație a dispozitivului și prin montaje corecte, cu jocuri minime în fazele de montaj și toleranțe acceptabile la execuție.

Simularea dezechilibrelor de proiectare, execuție și montaj s-a realizat în cadrul programului prin valori independente ale parametrilor m_a și e, ceea ce a făcut posibilă stabilirea dependențelor prezentate în figurile 5 și 6.

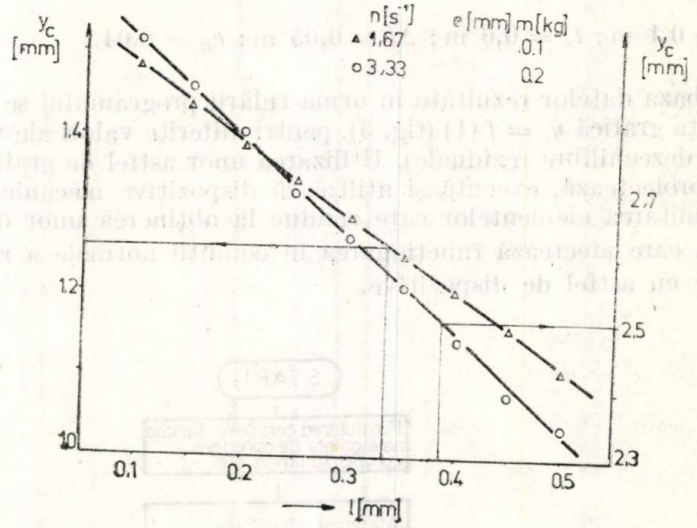


Fig. 5. — Dependența săgeții arborelui funcție de dezechilibrul rezidual (m_a. e).

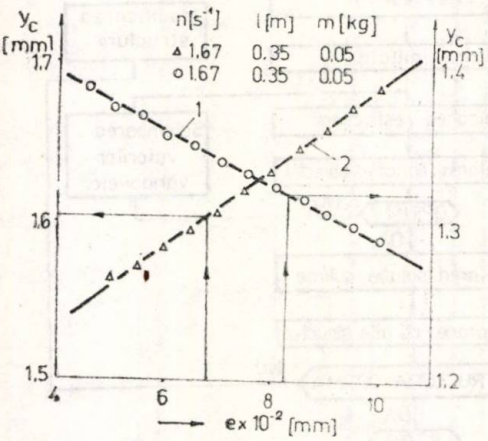


Fig. 6. — Dependența săgeții arborelui funcție de excentricitatea reziduală (e).

4. CONCLUZII

Pe baza analizei datelor obținute din rularea programului de optimizare constructivă a rezemării arborelui în consolă, în cazul exemplului examinat, au rezultat următoarele :

— programul de optimizare pune în evidență numai valorile minime ale săgeții arborelui, corespunzătoare încărcărilor date;

— în condițiile în care componenta hidrodinamică a forței radiale $F_R(t)$[1] este de același semn cu cel al forței centrifuge datorite dezechilibrului rezidual, are loc o micșorare a valorilor minime ale săgeții centrului de masă (fig. 6, linia 1), fenomen care se datorește creșterii amplitudinii săgeții arborelui;

— în condițiile în care cele două componente sînt de semn contrar, micșorîndu-se amplitudinea mișcării oscilatorii se observă o creștere a valorii minime a săgeții arborelui de masă (fig. 6, linia 2);

— programul evidențiază o amplificare a fenomenelor prezentate, în cazul utilizării rulmenților cu bile, față de rulmenții cu role conice, și a măririi jocului din montaj.

NOTAȚII

c_R — coeficient; d — diametrul amestecătorului, m; d_a — diametrul arborelui, m; e — excentricitatea reziduală, m; E — modulul de elasticitate, N/m²; I — momentul de inerție, m⁴; k_1 — coeficient; l — distanța dintre reazeme, m; L — lungimea arborelui, m; m_a — masa amestecătorului, m; M_t — momentul de răsucire, Nm; M_{t_B} — momentul de răsucire corespunzător punctului B, Nm; n — turația amestecătorului, s^{-1}; p — exponent; P — puterea necesară amestecării; Re — criteriul (numărul) Reynolds; s — jocul din rulmenți, m; y_c — săgeata centrului de masă, m; η_T — randamentul transmisiei; ρ — densitatea lichidului, kg/m³; σ_a — tensiunea admisibilă la forfecare, N/m²; σ_{ech} —tensiunea echivalentă, N/m².

Indici

i — limita inferioară; s — limita superioară; Δ — pasul de căutare.

Primit în redacție la 5 martie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. GH. D. PASAT, *Dispozitive mecanice de amestecare. Încărcarea hidrodinamică a turbinei cu pale drepte (standard) și a arborelui dispozitivului de amestecare.* I, St. cerc. mec. apl., **47**, 5 (1988).
2. W. KRUG, S. SCHÖNFELD, *Rechnergestützte Optimierung für Ingenieure*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1981.
3. GH. D. PASAT, *Optimizarea dispozitivelor de amestecare ale reactoarelor chimice și biochimice de gabarit mare.* Teză de doctorat, I.P.B., 1986.
4. A. D. NIKIFOROF, *Bazele interschimbabilității în construcția aparatelor chimice* (l. rusă), Mașinostroenie, Moskva, 1979.
5. GH. D. PASAT, A. PANTAZOPOL, *Influența forțelor hidrodinamice asupra turației critice a dispozitivelor de amestecare*, St. cerc. mec. apl., **46**, 5 (1987).

VOALAREA ELASTO-PLASTICĂ A PLĂCILOR ORTOTROPE

de M. IEREMIA

Institutul de Construcții București

Plăcile metalice ortotrope s-au dovedit un sistem constructiv deosebit de eficient din punct de vedere structural și economic, îmbinînd condiția de rigiditate cu cea de greutate redusă.

În principal, plăcile lucrează la încovoiere, îmbinînd în mod avantajos comportarea de placă a dalei cu cea de grindă a nervurilor.

Prin analogie cu calculul la încovoiere, s-a întrebuințat metoda de calcul a netezirii structurii.

Se prezintă și un calcul post-critic în domeniul elasto-plastic, avîndu-se în vedere influența tensiunilor reziduale din sudură asupra rezistenței critice de voalare.

Pentru a cunoaște forța critică care poate solicita placa în planul său median, se folosește metoda experimentală, în paralel cu calculul teoretic.

1. REZISTENȚA CRITICĂ DE VOALARE

Se izolează un panou de placă cuprins între nervuri.

Pe perimetrul unei asemenea plăci acționează eforturile N_x, N_y și N_{xy} rezultate din echilibrul de ansamblu al plăcii.

Se calculează rezistența critică corespunzătoare panoului de placă izotropă, folosind ecuația diferențială :

$$K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1}$$

unde K este rigiditatea la încovoiere a plăcii.

Soluția unei asemenea ecuații se caută fie cu ajutorul seriilor trigonometrice, fie transformînd ecuația (1) într-o ecuație numerică care se rezolvă cu o metodă iterativă de calcul. În particular, anumite soluții presupun apriori o anumită formă de valoare (cu un număr m, n de semiunde în cele două sensuri) și valorile critice obținute nu vor fi valabile pentru alte forme de voalare.

Se obține expresia rezistenței critice de voalare pentru placa de lățime b și grosime h,

$$\sigma_{cr} = k\,E\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^2, \tag{2}$$

unde coeficientul de voalare k depinde de dimensiunile plăcii (raportul $\alpha = a/b$), modul de rezemare pe contur și de încărcare a plăcii.

Expresia (2) se va folosi în continuare sub forma :

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{\sigma_c}{\beta^2} \tag{2'}$$

unde β — coeficientul de sveltaţe al plăcii $\left(\beta = \frac{b}{h}\sqrt{\frac{\sigma_c}{E}}\right)$,

σ_c — rezistenţa de curgere la compresiune.

A doua metodă de calcul, care foloseşte mai eficient rezervele de rezistenţă ale structurii, constă în a considera că dala împreună cu nervurile voalează ca o placă ortotropă ; nervurile se vor deforma împreună cu tabla în momentul pierderii stabilităţii.

Ecuaţia diferenţială (1) se modifică corespunzător ţinînd cont că rigidităţile la încovoiere (K_x, K_y) sînt diferite pe cele două direcţii ortogonale şi avînd în vedere rigiditatea la torsiune (H).

În cazul uzual al plăcii ortotrope dreptunghiulare, simplu rezemate pe contur şi acţionată pe direcţia longitudinală xx de o încărcare uniform distribuită p_x, încărcarea critică minimă este :

$$p_{cr} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{K_x \cdot K_y} + H). \tag{3}$$

Rezistenţa critică corespunzătoare,

$$\sigma_{cr} = \frac{p_{cr}}{A'_{xn} + h}, \tag{4}$$

unde A'_{xn} este aria secţiunii transversale a nervurii (A_{xn}), raportată la unitatea de lăţime de placă.

Dacă placa voalează cu m semiunde ($m > 1$), încărcarea critică devine :

$$p_{cr} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sqrt{K_x \cdot K_y} \cdot \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right). \tag{3'}$$

În cazul plăcii comprimate pe două direcţii, condiţia de voalare, care rezultă din (1), este

$$\frac{\sigma_{x\,cr}}{\frac{\pi^2 \cdot K}{h \cdot b^2}} = \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + n^2}{\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + \gamma \cdot n^2}, \tag{5}$$

unde γ este raportul compresiunilor $\left(\gamma = \frac{\sigma_{ycr}}{\sigma_{xcr}}\right)$.

Calculul corespunde începutului de voalare a plăcii.

Spre deosebire de grinzi, cînd atingerea valorii σ_{cr} duce la pierderea stabilităţii şi implicit la scoaterea din uz a elementului, la plăci atingerea valorii critice şi deci începutul fenomenului de instabilitate nu provoacă scoaterea din uz a plăcii rigidizate pe contur. Aceasta deoarece zona cen-

trală a panoului care tinde să voaleze se descarcă de efortul de compresiune printr-un efect de membrană prin supraîncărcarea zonelor din vecinătatea conturului rigid. Fenomenul poate continua pînă la atingerea limitei de curgere în zonele marginale, cu condiția ca marginile plăcii să fie obligate să rămînă drepte și normale pe direcția de încărcare.

2. LĂȚIMEA EFECTIVĂ DE PLACĂ b_e

Se consideră o placă rigidizată și comprimată în direcția nervurilor.

Porțiunile de placă din vecinătatea nervurilor opun o rezistență la deformare mai mare decît cele situate în zona de mijloc. Ca urmare, tensiunile normale sînt maxime în dreptul nervurilor, σ_n și minime la mijlocul distanței dintre nervuri, σ_{min}. În momentul atingerii încărcării critice, tensiunile din tablă vor fi preluate numai de două fișii de lățime $b_{e/2}$, situate în vecinătatea nervurii respective. Tensiunea variabilă pe lățimea b se înlocuiește printr-o tensiune uniform distribuită pe lățimea redusă b_e, avînd valoarea σ_n.

Rezistența critică de voalare se calculează cu expresia (2'), introducînd $b \to b_e$ în formula coeficientului β.

În cazul plăcilor lungi se obțin la limită pentru coeficientul de voalare k, valorile : 3,62 pentru plăci articulate și 6,30 pentru plăci încastrate.

Din condiția ca marginile rigidizate ale plăcii să rămînă perpendiculare pe direcția forțelor, în cazul plăcilor cu un raport b/h relativ mic, cedarea va fi provocată de strivirea prin compresiune la tensiuni ale căror valori se apropie de σ_c.

În momentul în care $\sigma_{cr} = \sigma_c$, rezultă lățimea efectivă minimă b_{em}. Pentru plăci metalice ($\mu = 0{,}3$) din oțeluri moi de construcție ($\sigma_c = 2.500$ daN/cm^2), se obține $b_{em} = 55 \cdot h$.

Încercările experimentale au arătat că această valoare este puțin acoperitoare și în practică se poate considera : $b_{em} = (40 \div 50)\, h$.

O abordare tipică pentru aflarea rezistenței critice a plăcii cu o formulă empirică, este următoarea :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_c} = c \cdot \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_c} \right)^n \tag{6}$$

unde σ_m este valoarea medie a tensiunii din placă atinsă în momentul cînd $\sigma_n = \sigma_c$; c, n — coeficienți a căror valoare se modifică astfel încît expresia teoretică să concorde cu rezultatele încercărilor ; $c \in (0\,;1)$; $n \in (0\,;0{,}5)$.

Aplicarea expresiei (6) ia în considerare și condițiile de rezemare de-a lungul marginilor plăcii, în timp ce lucrînd cu expresia lui b_{em} nu se poate avea în vedere influența rezemărilor.

Astfel, folosind expresia (6), cu $n = 0{,}33$, o placă încastrată va avea o rezistență critică cu 20 % mai mare față de una rezemată pe marginile laterale. Pentru un coeficient de sveltețe $\beta \leqslant 3$, efectul încastrării marginilor laterale rezultă mai mic cu 20 %, dar pentru domeniul curent ($\beta > 3$), este sigur că încastrarea laterală sporește simțitor rezistența critică a plăcii.

În plus, pentru toate valorile lui n din formula (6) rezultă o creștere constantă a rezistenței critice în raport cu lățimea plăcii, dar conceptul de lățime efectivă lucrează cu o încărcare limită de cedare ($b_{em} \cdot h\sigma_c$), independent de lățimea plăcii.

3. CALCULUL ÎN DOMENIUL POST-CRITIC

Dacă se continuă comprimarea plăcii după ce în dală, în dreptul nervurilor, s-a obținut o tensiune egală cu limita de curgere a materialului ($\sigma_n = \sigma_c$), se constată descreșterea lățimii efective b_e în raport cu creșterea deformației specifice la compresiune. Fenomenul este asemănător cu descreșterea lui σ în raport cu ε în diagrama caracteristică a materialului după depășirea limitei de proporționalitate σ_p, cu reducerea corespunzătoare a modulului de elasticitate E.

Forța de compresiune suportată de placă înainte de cedare, este :

$$P = \sigma_m \cdot b \cdot h = \sigma_n \cdot b_e \cdot h. \tag{7}$$

Se definește rigiditatea plăcii :

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = b_e \cdot h \cdot \frac{d\sigma_n}{d\varepsilon}, \tag{8}$$

unde ε este deformația specifică medie la compresiune. Prin derivarea expresiei și compararea cu expresia (8) a rigidității, rezultă lățimea efectivă :

$$b'_e = b_e + \sigma_n \cdot \frac{db_e}{d\sigma_n}. \tag{9}$$

Această lățime este mai mică decît b_e, deoarece al doilea termen din (9) este negativ și ca urmare se numește lățime efectivă redusă (cu pînă la 50% pentru plăcile metalice de la § 2) sau lățime tangentă.

Pe baza unor studii experimentale, D. Fulkner a propus următoarea expresie care să caracterizeze comportarea postcritică a plăcii simplu rezemate :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_c} = \frac{b_{em}}{b} = \frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \quad \text{pentru} \quad \beta \geqslant 1, \tag{10}$$

expresie aplicată cu bune rezultate la studiul voalării grinzilor casetate de poduri.

În cazul cînd rigidizările longitudinale au rigiditate la torsiune, este mai indicat ca dala să se considere încastrată pe aceste margini. În lumina experiențelor de la Universitatea Cambridge, s-a propus următoarea formulă, analoagă cu (10), pentru calculul lățimii efective reduse a plăcii :

$$\frac{b_{em}}{b} = \frac{2{,}5}{\beta} - \frac{1{,}5625}{\beta^2}, \tag{11}$$

pentru $\beta \geqslant 1{,}25$ și $0{,}75\ \sigma_c \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma_c$.

4. INFLUENȚA TENSIUNILOR REZIDUALE DIN SUDURĂ

Prin sudarea la temperaturi ridicate a nervurilor plăcilor metalice de tablă și prin contracțiile ulterioare provocate de răcirea metalului, rezultă că zona din vecinătatea sudurii va fi supusă la întindere de tensiuni cu valoarea σ_c.

Blocul de întindere se extinde în inima nervurii și în tablă de fiecare parte a inimii, pe o lungime h. Coeficientul η depinde de condițiile de sudură, de secțiunea sudurii, de tipul elementului sudat ș.a. și are valori : $\eta = 3 \div 6$.

Blocul de întindere este deplasat față de centrul de greutate al secțiunii plăcii ortotrope și ca urmare apare o tendință de încovoiere a acesteia.

Pentru a păstra echilibrul pe direcția longitudinală a nervurii, este necesar ca întinderea din zona nervurii (cu valoarea σ_c) să fie echilibrată de compresiunea provocată de tensiunile remanente σ_r din zona centrală a dalei (valoare medie, între nervuri),

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_c} = \frac{2\eta}{\left(\frac{b}{h}\right)^2 - 2\eta}. \tag{12}$$

Din relația (12), valabilă pentru $\beta \geqslant 1$, rezultă lățimea blocului de întindere.

Sudura mai provoacă distorsiuni inițiale datorate contracției transversale, distorsiuni care pot afecta rigiditatea plăcii ortotrope întărită și cu nervuri transversale.

În urma experiențelor efectuate la Universitățile din Cambridge și Lehigh, s-a constatat că rezistența critică a plăcilor lungi se reduce cu cantitatea $\Delta\sigma_m = \sigma_r$, atîta timp cît $\sigma_r < 0{,}2 \cdot \sigma_c$. Acesta este domeniul elastic și corespunde aproximativ valorilor lui $\beta > 2$.

Pentru valori $\beta < 2$, domină efectele neelastice și reducerea rezistenței critice de voalare se face cu cantitatea $\Delta\sigma_m = (E_t/E) \cdot \sigma_r$.

Pentru materiale cu un palier de curgere distinct, raportul modulilor se poate aproxima folosind parabola Osterfeld-Bleich. Pentru celelalte materiale s-a propus o rezolvare bazată pe trasarea curbelor „tensiune-deformație", conform Ramberg-Osgood.

Expresiile care caracterizează voalarea post-critică a plăcii, ținînd seama și de reducerea rezistenței critice datorită tensiunilor remanente din sudură, devin :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_c} = \frac{b_{ef}}{b} = \begin{cases} \dfrac{2}{\beta} - \dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{\sigma_r}{\sigma_c} \cdot \dfrac{E_t}{E}, & \text{pentru } \beta \geqslant 1, \\ 1 - \dfrac{\sigma_r}{\sigma_c} \cdot \dfrac{E_t}{E}, & \text{pentru } \beta < 1. \end{cases} \tag{13}$$

În jurul valorii $\beta = 2{,}5 \div 2\,8$ (funcție de valoarea coeficientului η) se atinge reducerea maximă a rezistenței plăcii.

5. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A ÎNCĂRCĂRII CRITICE

S-au confecționat cinci tipuri de plăci metalice cu diferite rapoarte între laturi și diferite moduri de rigidizare (12 bucăți) care au fost încercate la Șantierul Naval Brăila pe un stand de probă, folosind prese hidraulice cu 12 pistoane, de capacitate 6 960 KN. Comprimarea modelelor s-a realizat în mai multe trepte de încărcare, unei trepte corespunzîndu-i 139,2 KN. Distribuția uniformă a presiunilor pe conturul plăcii s-a realizat prin intermediul unui dispozitiv de transmitere a forței de la prese la model și prin cuplarea în paralel a două prese de aceeași capacitate, alimentate de la aceeași pompă cu ulei.

Pe fiecare model s-au aplicat 80÷100 traductori electrici rezistivi TER cu fir de constantan, cu baza de 10 mm., atît pe dală, cît și pe nervurile de rigidizare ale plăcii ortotrope. În zonele care prezentau interes deosebit s-au lipit TER pe ambele fețete ale tablei, putîndu-se pune astfel în evidență momentul critic produs de voalarea tablei.

Pentru fiecare tip de model s-a făcut și un calcul teoretic pentru aflarea rezistenței critice (minime) și a încărcării limită. În acest scop s-au analizat pe rînd următoarele :

— rezistența critică pentru întreaga placă ;

— rezistența critică pentru porțiunea de placă cuprinsă între două nervuri ;

— flambajul prin răsucire al nervurii longitudinale ;

— voalarea inimii sau a tălpii nervurii longitudinale.

Pe fiecare model s-au ales circa zece secțiuni caracteristice și pe baza valorilor deformațiilor obținute tensometric, s-au calculat tensiunile

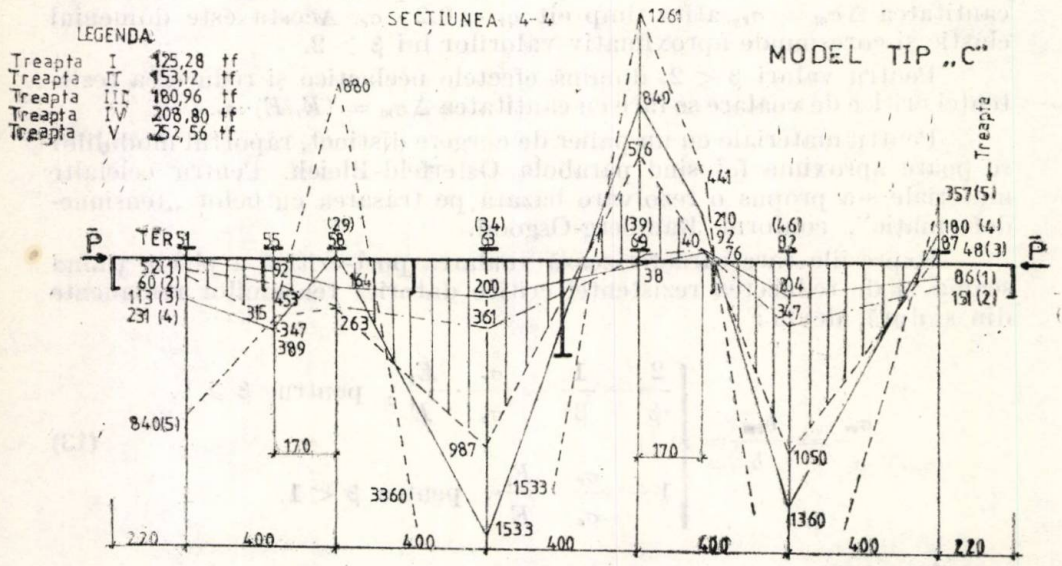


Fig. 1

σ_x și σ_y și s-au trasat diagramele de variație ale acestora în secțiunile respective. Momentul declanșării fenomenului de valoare s-a obținut în zona unde tensiunile și-au schimbat sensul de variație. Se exemplifică aceasta prin comportarea unui model de placă metalică de 6 mm. grosime (2240 × 1240), rigidizată transversal cu patru nervuri profil cu bulb 100 × 6 (tip GOST 5353—52) și cu o nervură centrală tip T alcătuită din table sudate (250 × 6 cu 100 × 8).

Forța critică teoretică de voalare : $P = 398$ kN.

Prima formă de voalare apare încă în treapta I de încărcare, la o forță $P = 417$ kN. Placa își pierde stabilitatea prin voalare între două nervuri, în zona TER 55, 58 (29) conform variației tensiunilor σ_x din figura 1.

Din analiza comparativă a rezultatelor teoretice și a datelor experimentale rezultă o bună corelare între valorile încărcărilor critice din domeniul elastic, cu mențiunea că valorile calculate sînt în general puțin inferioare celor determinate prin încercări. Se confirmă faptul că plăcile rigidizate pe direcția de solicitare își pierd mai greu stabilitatea față de plăcile rigidizate transversal.

Placa care a voalat în domeniul elastic, continuă să preia eforturi în bune condiții pînă în momentul în care într-o secțiune a sa materialul intră în curgere și placa își pierde definitiv stabilitatea.

Primit în redacție la 7 mai 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. IEREMIA, *Beulung orthotroper Rechteckplatten*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **22**,6 (1977) și **23**,2 (1978).
2. P. MAZILU, N. ȚOPA, M. IEREMIA, *Teoria și calculul plăcilor ortotrope*, Edit. Tehnică, București, 1983, cap. 4.
3. AL. NICOLAU, M. IEREMIA, *Studiul voalării plăcilor plane prin metode iterative de calcul*, st. cerc. mec. apl., **38**, 5(1979), p. 681—694.

DINAMICA CIURULUI VIBRATOR BIMASIC CU FUNCȚIONARE ÎN REZONANȚĂ

de P. BRATU

INCERC București

În lucrare se tratează dinamica ciurului cu funcționare în rezonanță care are în componență două organe de clasare și este acționat cu bielă elastică. Pe baza ipotezelor adoptate și a cerințelor tehnologice pentru clasarea materialelor granulare, au fost stabilite relațiile de calcul ale principalilor parametri funcționali și constructivi. Cu ajutorul teoriei din lucrare s-a realizat, în concepție proprie, un ciur cu funcționare în rezonanță care a fost asimilat și introdus în fabricație.

Tehnologiile moderne de prelucrare a materialelor granulare din industriile de proces impun utilizarea unor utilaje perfecționate în vederea obținerii unei eficiențe economice maxime. Nivelul de performanță necesar acestor utilaje se caracterizează prin parametrii globali de calitate, productivitate tehnologică și consum redus de energie. În acest context, se înscrie problematica abordată în prezenta lucrare care a stat la baza concepției și realizării unui ciur cu funcționare în rezonanță, destinat pentru clasarea și transportul materialelor granulare [4, 5, 6].

1. SOLUȚIA TEHNICĂ CONSTRUCTIVĂ ȘI FUNCȚIONALĂ

Soluția tehnică adoptată pentru ciurul vibrator cu funcționare în rezonanță este prezentată în figura 1. În principal, acest utilaj se compune din următoarele părți: cadru superior *1*, cadru inferior *2*, balansier *3*, grup elastic al bielei de acționare *4*, arbore de antrenare *5*, grup elastic de legătură *6*, suport *7*. În cadrul stabilirii soluției tehnice s-a ținut seama de următoarele condiții constructive și funcționale:

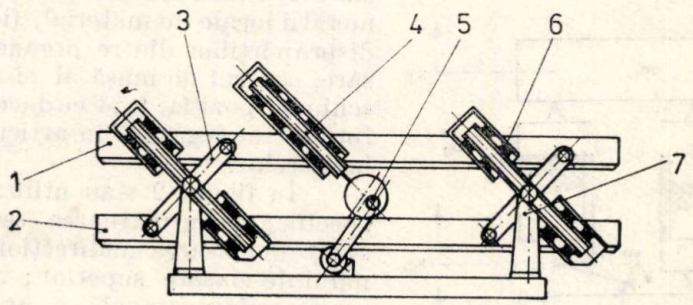


Fig. 1. — Modelul constructiv al unui ciur cu funcționare în rezonanță.

— realizarea regimului de vibrații corespunzător unei clasări de calitate a materialului granular;

— reducerea consumului de metal cu circa 40% față de soluțiile existente ale ciururilor clasice, la aceeași capacitate de producție;

— reducerea consumului de energie cu 75 % față de utilajele clasice cu aceeași capacitate de prelucrare [2, 4].

Funcționarea utilajului se caracterizează prin deplasarea unidirecțională în regim de vibrare a cadrului superior *1* și cadrului inferior *2*, ambele fiind perturbate de sistemul arbore de antrenare *5* și grup elastic al bielei *4*. Perturbarea se obține cu ajutorul unei bucșe excentrice, montată între capătul arborelui de antrenare și capătul bielei elastice. Balansierele *3* sînt montate articulat prin intermediul unor silenblocuri pe suporturile *7*. Întreaga greutate, proprie și a materialului, este preluată de sistemul balansiere-suporturi. Se menționează că atît pe cadrul superior, cît și pe cadrul inferior se află montate organele de clasare [4, 7].

2. MODELUL DINAMIC

Pentru soluția tehnică din figura 1 s-a adoptat modelul dinamic schematizat în figura 2. Se precizează că organele de clasare, au fost modelate prin masele m_1 și m_2, mediul vîscoelastic de legătură dintre cele două elemente este caracterizat de coeficientul de rigiditate complex k_1^*, iar mediul vîscoelastic al bielei este caracterizat prin coeficientul de rigiditate complex k_0^* [1, 2].

Deoarece raportul dintre amplitudinea vibrațiilor și lungimea balansierelor este neglijabil se poate adopta ipoteza că organele de sortare au numai mișcare de translație după direcția unghiului de atac, mișcarea fiind caracterizată prin vibrații unidirecționale.

Datorită faptului că mecanismul cu excentric al bielei este fixat pe unul din organele de sortare, iar extremitatea bielei este prinsă la celălalt organ de sortare rezultă că sistemul este perturbat interior. În acest caz, sistemul mecanic are proprietatea că centrul maselor rămîne fix dacă organele de clasare și cadrul de prindere al acestora sînt identice geometric și masic, iar materialul granular este uniform distribuit pe suprafața de clasare. În caz contrar, fie datorită aglomerării locale de material, fie realizării disproporțiilor dintre organele de clasare, centrul de masă al sistemului își schimbă poziția, fapt ce duce la apariția forțelor de legătură în articulațiile balansierelor.

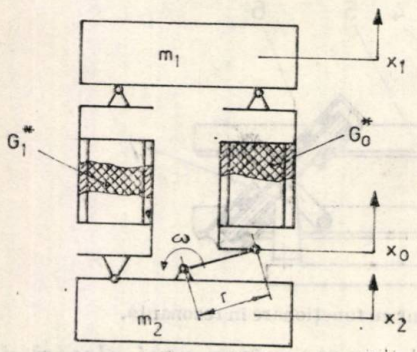


Fig. 2. — Modelul dinamic de calcul.

În figura 2 s-au utilizat notațiile specifice cu următoarea semnificație : x_1 este deplasarea unidirecțională a organului de clasare superior ; x_2 — deplasarea unidirecțională a organului de clasare inferior ; x_0 — deplasarea unidirecțională a capătului bielei ce conține bucșa excentrică ; r — excentricitatea bucșei ; G_1^* — modulul de elasticitate transversal complex al legăturii vîscoelastice dintre cele două organe de clasare ; G_0^* — modulul de elasticitate transversal complex al grupului vîscoelastic al bielei de acționare ;

— pulsația excitatoare, aceeași cu viteza unghiulară a arborelui de antrenare.

3. DETERMINAREA PARAMETRILOR FUNCȚIONALI

Funcție de natura materialului de clasare și de producția orară necesară se stabilește nivelul de performanță al utilajului determinat de următorii parametri : amplitudinea organelor de clasare, pulsația vibrațiilor forțate, forța din biela elastică, puterea de acționare și momentul de pornire a utilajului.

3.1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE

Schematizarea modelului de calcul din figura 2 permite scrierea sistemului ecuațiilor diferențiale de mișcare sub forma :

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_0 + k_1)(x_1 - x_2) &= k_0 x_0, \\ m_2\ddot{x}_2 - (k_0 + k_1)(x_1 - x_2) &= -k_0 x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

în care k_0 și k_1 sînt coeficienții de rigiditate echivalenți ai legăturilor elastice din structura bielei și respectiv dintre organele de clasare.

Adunînd membru cu membru cele două ecuații, se obține :

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0, \tag{2}$$

de unde avem

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \mu. \tag{3}$$

Semnul minus semnifică faptul că cele două organe de clasare se mișcă defazat, astfel :

— dacă sistemul legăturilor din structura bielei și respectiv dintre organele de clasare se caracterizează numai prin proprietatea de *elasticitate*, atunci defazajul φ dintre mișcarea organelor de clasare este $\varphi = \pi$;

— dacă sistemul legăturilor din structura bielei și respectiv al organelor de clasare se caracterizează prin proprietatea de *vîscoelasticitate*, atunci defazajul φ dintre mișcarea organelor de clasare va fi cuprins în intervalul $(0, \pi)$.

Raportul $\mu = m_1/m_2$ duce la următoarele cazuri :

— dacă $\mu = 1$, adică $m_1 = m_2$, atunci sistemul este echilibrat, caz în care nu transmite forțe dinamice în exterior ;

— dacă $\mu \neq 1$, adică $m_1 \neq m_2$, atunci sistemul este neechilibrat, caz în care transmite forțe dinamice în exterior.

Notînd cu $x = x_1 - x_2$ deplasarea relativă, pe direcția vibrațiilor de lucru, dintre cele două mase, relațiile (1) mai pot fi scrise și sub forma :

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_0 + k_1}{m_1}(x_1 - x_2) = \frac{k_0}{m_1} x_0,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_0 + k_1}{m_2}(x_1 - x_2) = -\frac{k_0}{m_2} x_0,$$

iar prin scăderea ecuației a doua din prima avem :

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + (k_0 + k_1)\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(x_1 - x_2) = k_0 x_0 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \tag{4}$$

sau

$$\ddot{x} + (k_0 + k_1)\frac{1}{m}\, x = k_0 x_0 \frac{1}{m}, \tag{5}$$

în care $\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$ este accelerația instantanee a mișcării relative, iar $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — masa redusă a sistemului.

Deoarece în construcția unor astfel de utilaje sînt utilizate numai elemente din cauciuc, atunci vom exprima coeficientul de rigiditate echivalent unui grup elastic-elastic prin relația :

$$k = \lambda G^*, \tag{6}$$

unde $G^* = G(1 + j\delta)$ este modulul complex de elasticitate transversală ; λ — coeficient geometric de multiplicare.

Modulul complex de elasticitate transversală exprimă comportarea elastică a cauciucului prin $\mathrm{Re}G^* = G$ și comportarea vîscoasă de disipare a energiei interne prin $\mathrm{Im}G^* = G\delta$, în care G este modulul transversal, iar δ este unghiul de pierdere mecanică internă a energiei [1].

Pentru elemente de formă paralelipipedică din cauciuc solicitate fie la compresiune, fie la lunecare transversală, coeficientul geometric de multiplicare are expresia :

$$\lambda = (1 + \beta\, \Phi^2)\frac{S}{h} \tag{7}$$

pentru solicitarea de compresiune,

$$\lambda = \frac{S}{h} \tag{8}$$

pentru solicitarea de lunecare (forfecare).

În relațiile (7) și (8) parametrii de calcul au următoarele semnificații :

S este aria totală echivalentă de lucru a grupului de elemente antivibratile din cauciuc ; h — înălțimea (grosimea) unui element antivirbatil din cauciuc (în construcție monostrat) ; Φ — coeficientul de formă al elementului din cauciuc, care este raportul dintre aria încărcată la compresiune și aria liberă ; β — factorul de multiplicare ce ține seama de natura amestecului de cauciuc.

Folosind relația (6) în (5) obținem ecuația diferențială în complex sub forma :

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{m}(\lambda_0 G_0^* + \lambda_1 G_1^*)\tilde{x} = \frac{1}{m}\lambda_0 G_0^* \tilde{x}_0, \tag{9}$$

în care

$$\tilde{x}_0 = r\, e^{j\omega t} \tag{10}$$

$$\tilde{x} = A^* e^{j\omega t} \tag{11}$$

unde r este excentricitatea capătului bielei; A^* — amplitudinea exprimată sub formă complexă.

Din rezolvarea ecuației diferențiale (9) rezultă A^* sub forma:

$$A^* = \frac{C}{p^2 + Q^2}\,[(P + Q\,\delta_0) + j(P\delta_0 - Q)], \tag{12}$$

în care au fost utilizate notațiile

$$P = -m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1,$$

$$Q = \lambda_0 G_0\,\delta_0 + \lambda_1 G_1 \gamma_1,$$

$$C = r\,\lambda_0 G_0.$$

Mărimea complexă A^* poate fi exprimată astfel:

$$A^* = A(\cos\varphi + j\sin\varphi) = A\,e^{j\varphi}, \tag{13}$$

unde A este amplitudinea deplasării relative a mișcării pe direcția vibrațiilor de lucru; φ — defazajul maselor în mișcare.

Din relațiile (12) și (13) se obțin expresiile pentru A și φ, după cum urmează:

$$A = r\lambda_0 G \left[\frac{1 + \delta_0}{(-m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1)^2 + (\lambda_0 G_0 \delta_0 + \lambda_1 G_1 \delta_1)^2}\right]^{1/2}, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(-m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1)\,\delta_0 - (\lambda_0 G_0 \delta_0 + \lambda_1 G_1 \delta_1)}{(-m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1) + (\lambda_0 G_0 \delta_0 + \lambda_1 G_1 \delta_1)\,\delta_0}. \tag{15}$$

Deplasarea relativă x are expresia

$$x = \operatorname{Im}\tilde{x} = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{16}$$

iar pentru fiecare organ de clasare deplasarea și respectiv amplitudinea sînt date de relațiile

$$x_1 = \frac{1}{1+\mu}\,x; \qquad x_2 = \frac{-\mu}{1+\mu}\,x, \tag{17}$$

$$A_1 = \frac{1}{1+\mu}\,A; \qquad A_2 = \frac{-\mu}{1+\mu}\,A. \tag{18}$$

3.2. FORȚA DIN BIELA ELASTICĂ DE ACȚIONARE

Forța de acționare este echivalentă cu forța necesară pentru deformarea grupului elastic al bielei luată cu semn schimbat, astfel:

$$F = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial x_0}, \tag{19}$$

în care $\Pi_0 = \frac{1}{2}\,\lambda_0 G_0^* (x_1 - x_2 - x_0)^2$ este energia potențială de deformare a grupului elastic [7].

Expresia forței sub formă ecomplexă, pe baza relației (19), este dată de relația :

$$\tilde{F} = k_0\tilde{x} - k_0\tilde{x}_0$$

sau

$$\tilde{F} = \lambda_0 G_0^*(\tilde{x} - \tilde{x}_0), \tag{20}$$

în care $\tilde{F} = F^* re^{jQ}$, unde Q este defazajul dintre forța din bielă și deplasarea relativă,

$\tilde{x}_0 = re^{j\omega t}$, unde r este excentricitatea capătului bielei.

Pe baza formulării în complex, din relația (20) se obține :

$$F^* = \lambda_0 G_0^*(A^* - r). \tag{21}$$

Dacă în relația (21) se înlocuiesc expresiile complexe G^* și A^*, atunci se obține :

$$F^* = \lambda_0 G_0 [(A\cos\varphi - A\delta_0 \sin\varphi - r) + j(A\sin\varphi + \delta_0 A\cos\varphi - r\delta_0)], \tag{22}$$

de unde rezultă expresia forței din bielă, astfel :

$$F = \mathrm{Im}\tilde{F} = F_0 \sin(\omega t + \theta) \tag{23}$$

cu mărimile F_0 și θ date de relațiile

$$F_0 = \lambda_0 G_0 [(1 + \delta_0^2)(A^2 + r^2 - 2Ar\cos\varphi)^{1/2}, \tag{24}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{A\sin\varphi + \delta_0 A\cos\varphi - \delta_0 r}{A\cos\varphi - \delta_0 A\sin\varphi - r}. \tag{25}$$

Dacă $\delta_0 = \delta_1 = 0$, se obține

$$F_0 = \lambda_0 G_0 R, \tag{26}$$

în care $R = (A^2 + r^2 - 2rA)^{1/2} = |r - A|$, (27)

$$A = r\lambda_0 G_0 \left| \frac{1}{-m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1} \right|. \tag{28}$$

În acest caz, din relațiile (27) și (28) rezultă expresia funcției $R = R(\omega)$ sub forma

$$R(\omega) = r\left|1 - \frac{\lambda_0 G_0}{-m\omega^2 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1}\right|. \tag{29}$$

Reprezentarea grafică a funcției $R(\omega)$ este prezentată în figura 3. Se remarcă faptul că funcția $R(\omega)$ și implicit forța din bielă F_0 se anulează

pentru două valori distincte ale pulsației și anume :

$$\omega = p_a = \sqrt{\frac{\lambda_1 G_1}{m}}, \tag{30}$$

$$\omega = p_b = \sqrt{\frac{2\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1}{m}}, \tag{31}$$

unde p_a este pulsația sistemului în regim de anterezonanță ; p_b — pulsația sistemului în regim de postrezonanță.

Funcția $R(\omega)$, deci și forța F_0, atinge valoarea maximă la pulsația

$$\omega = p = \sqrt{\frac{\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1}{m}}, \tag{32}$$

unde p este pulsația proprie pentru regimul de rezonanță.

3.3. PUTEREA NECESARĂ ACȚIONĂRII CIURULUI VIBRATOR

Puterea de acționare are două componente esențiale și anume : puterea N_1 pentru învingerea frecărilor din lagărele ciurului și puterea N_2 pentru menținerea regimului de vibrații impus de procesul tehnologic.

Puterea maximă necesară învingerii forțelor de frecare din lagărele arborelui de antrenare este dată de relația :

$$N_1 = zN_1', \tag{33}$$

în care N_1 este puterea necesară pentru învingerea frecării corespunzătoare unei perechi de lagăre identice ; z — numărul perechilor de lagăre identice.

Puterea ce revine unei perechi de lagăre identice este

$$N_1' = 0{,}5\, f_r F_0 \omega\, d_r, \tag{34}$$

unde f_r este coeficientul de rezistență din lagăr ; d_r — diametrul echivalent al suprafeței cilindrice de rezistență ; ω — pulsația vibrațiilor tehnologice.

Lucrul mecanic al forței de acționare din bielă pentru menținerea regimului vibrațiilor tehnologice, în timpul unei perioade T, este :

$$L = \int_0^T F\, \dot{x}_0\, dt = \int_0^T F_0\, \dot{x}_0 \sin(\omega t + \theta)\, dt, \tag{35}$$

în care, ținînd seama de expresia $\dot{x}_0 = r\,\omega \cos \omega t$, se obține

$$L = \pi F_0 r \sin\theta. \tag{36}$$

Puterea medie, într-o perioadă completă T, a sistemului pentru menținerea regimului staționar de vibrații este

$$N_2 = L/T = 0{,}5\; r F_0 \omega \sin\theta. \tag{37}$$

Puterea necesară la arborele de antrenare a ciurului vibrator este dată de

$$N = 0{,}5\, F_0 \omega\, (z\, d_r f_r + r \sin\theta), \tag{38}$$

iar puterea totală necesară a motorului de acționare este

$$N_m = \frac{N}{\eta} = \frac{0{,}5\, F_0}{\eta}\, (z\, d_r f_r + r \sin\theta), \tag{39}$$

în care η este randamentul transmisiei fluxului energetic de la motor la arborele de antrenare al ciurului.

3.4. MOMENTUL CUPLULUI LA PORNIRE

Momentul cuplului la pornire pe care trebuie să-l asigure motorul de acționare este de forma :

$$M_p = F_p r \cos \omega t, \tag{40}$$

unde $F_p = \lambda_0 G_0 (x_0 - x)$ este forța necesară la pornire.

Deplasarea relativă x la pornire rezultă din echilibrul forțelor elastice și este dată de expresia

$$x = \frac{r\, \lambda_0 G_0}{\lambda_0 G + \lambda_1 G_1} \sin \omega t. \tag{41}$$

Introducînd relația (41) în expresia forței F_p și apoi în (40) se obține

$$M_p = 0{,}5\, r^2 \frac{\lambda_0 \lambda_1 G_0 G_1}{\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1} \sin 2\omega t, \tag{42}$$

cu valoarea maximă a cuplului la pornire dat de relația

$$M_p^{max} = 0{,}5\, r^2 \frac{\lambda_0 \lambda_1 G_0 G_1}{\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1}. \tag{43}$$

Pentru ca motorul să realizeze pornirea utilajului este necesar ca

$$\left.\frac{M_p^{max}}{M_{regim}}\right|_{nec} < \left.\frac{M_p}{M_n}\right|_{motor} \tag{44}$$

în care $M_{regim} = 9\,550\, N_m / n_{nom}$ este momentul cuplului în regim al motorului, unde N_m este puterea motorului, în kW, n_{nom} este turația de regim a motorului, în rot/min, iar M_{regim} rezultă în N.m. Raportul $(M_p/M_n)_{motor}$ este caracteristica de pornire dată pentru fiecare motor.

4. STABILIREA REGIMULUI DINAMIC

Criteriile fundamentale care stau la baza alegerii regimului dinamic de funcționare ale ciurului vibrator sînt următoarele :

— realizarea nivelului vibrațiilor tehnologice, prin valorile corelate ale amplitudinii și frecvenței;

— perturbarea sistemului la valori minime ale forței de solicitare în biela elastică ;

— asigurarea unui regim de lucru stabil pentru valori minime ale puterii de acționare.

Pentru exemplificare se prezintă valorile de calcul, verificate experimental, pentru un ciur vibrator cu funcționare în vecinătatea rezonanței (postrezonanță), care are următoarele caracteristici tehnice :

— suprafața de clasare . . . . . 2 × 6 m² ;
— masa totală în mișcare de vibrare . . . . . 1 744 kg ;
— unghiul de atac al vibrațiilor (dirijate) față de orizontală 40 grade ;
— pulsația vibrațiilor tehnologice . . . . . 75,4 rad/s ;
— amplitudinea deplasării relative ale celor două organe de clasare, pe direcția unghiului de atac . . . . . 5,5 mm ;
— puterea instalată de acționare . . . . . 3,0 kW ;
— excentricitatea bucșei de antrenare . . . . . 7 mm.

Pe baza relațiilor de calcul și a ipotezelor prezentate în prezenta lucrare, s-au realizat următorii parametri de sinteză, pe baza cărora s-a determinat regimul de funcționare. Astfel, se prezintă :

— masa cadrului superior . . . . . $m_1 = 910$ kg ;
— masa cadrului inferior . . . . . $m_2 = 834$ kg ;
— masa redusă . . . . . $m = 435$ kg ;
— coeficientul de elasticitate echivalent al grupului bielei . . . . . $k_0 = 0{,}56 \cdot 10^6$ N/m ;
— coeficientul de elasticitate echivalent al legăturii dintre cele două organe de clasare . . . $k_1 = 1{,}24 \cdot 10^6$ N/m ;
— pulsația proprie (la rezonanță) . . . . . $p = 64{,}3$ rad/s ;
— pulsația la autorezonanță . . . . . $p_a = 53{,}4$ rad/s ;
— pulsația la postrezonanță . . . . . $p_b = 73{,}6$ rad/s ;
— unghiul de pierdere mecanică în elementele de cauciuc . . . . . $\delta = 0{,}15$;
— excentricitatea bucșei de antrenare . . . . . $r = 7$ mm ;
— amplitudinea deplasării mișcării relative dintre cadrul superior și inferior . . . . . $A = 5{,}46$ mm ;
— forța de acționare din biela elastică . . . . $F_0 = 2\,000$ N ;
— puterea maximă necesară la arborele de antrenare (în regim stabilizat) . . . . . $N = 550$ W ;
— puterea de vîrf (pentru trecerea prin rezonanță) . . . . . $N' = 2\,000$ W.

Folosind relațiile de calcul pentru parametrii dinamici stabiliți anterior, au fost trasate curbele caracteristice funcție de pulsația vibrațiilor forțate, prezentate în figurile 3, 4 și 5. Astfel, funcție de nivelul vibrațiilor tehnologice se alege perechea de valori A, ω de pe curba spectrală amplitudine-pulsație (fig. 3), așa încît forța F_0 din biela elastică să fie minimă (fig. 4). De aici rezultă funcționarea în regim anterezonanță sau postrezonanță corespunzător unei anumite valori a puterii de acționare (fig. 5), mult mai mică decît la ciururile clasice inerțiale.

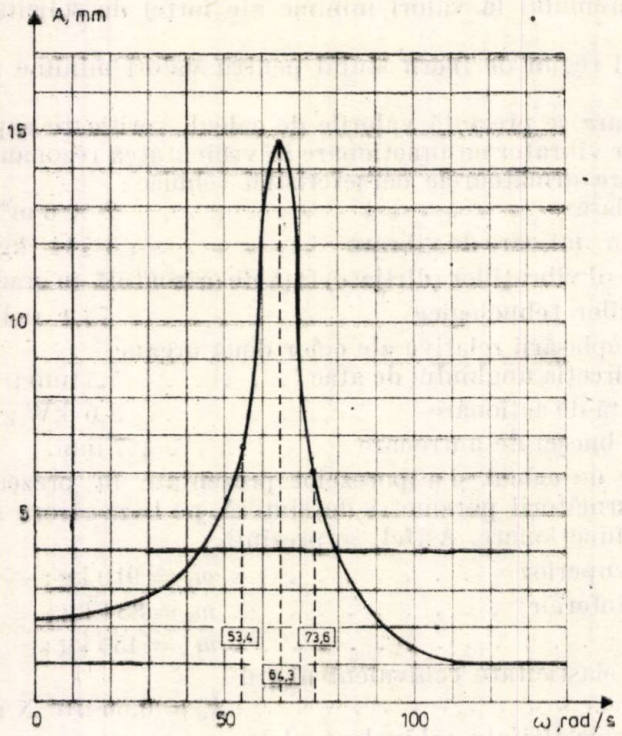


Fig. 3. — Curba de variație a amplitudinii deplasării relative funcție de pulsația excitatoare.

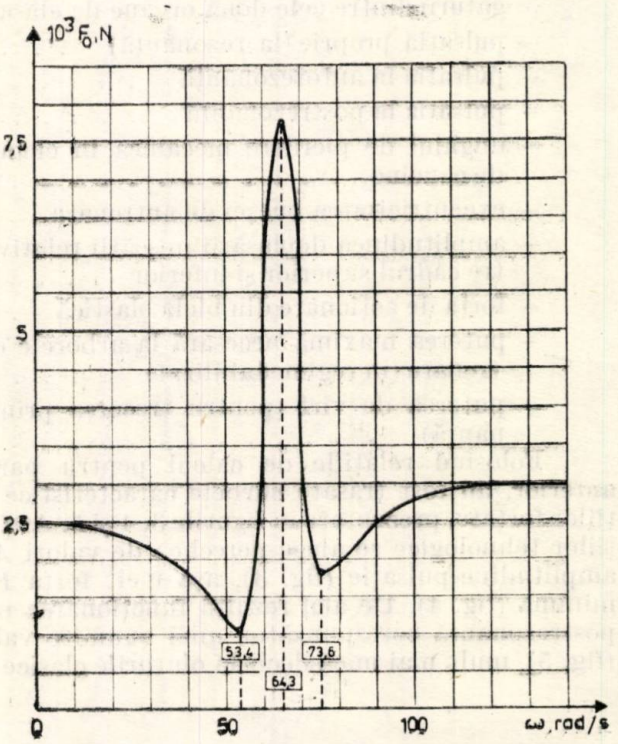


Fig. 4. — Curba de variație a forței maxime din biela elastică funcție de pulsația excitatoare.

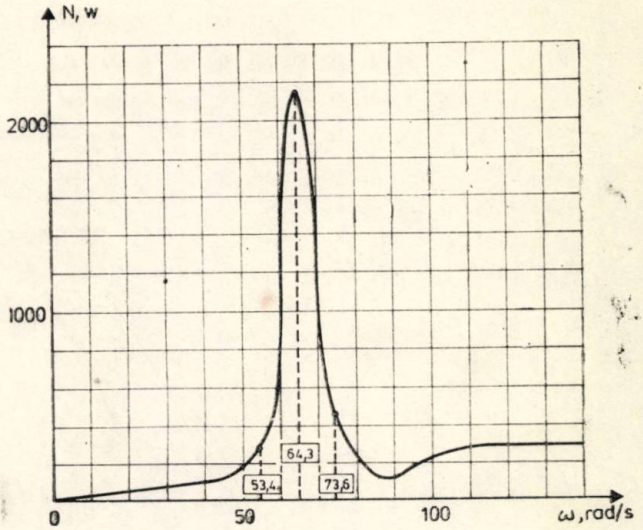


Fig. 5. — Curba de variaţie a puterii necesare la arborele de antrenare funcţie de pulsaţia excitatoare.

5. CONCLUZII

Avantajele tehnice şi economice ale ciururilor cu funcţionare în rezonanţă fac posibilă utilizarea tot mai intensă a acestor utilaje în fluxurile tehnologice ale industriilor de proces, mari consumatoare de energie.

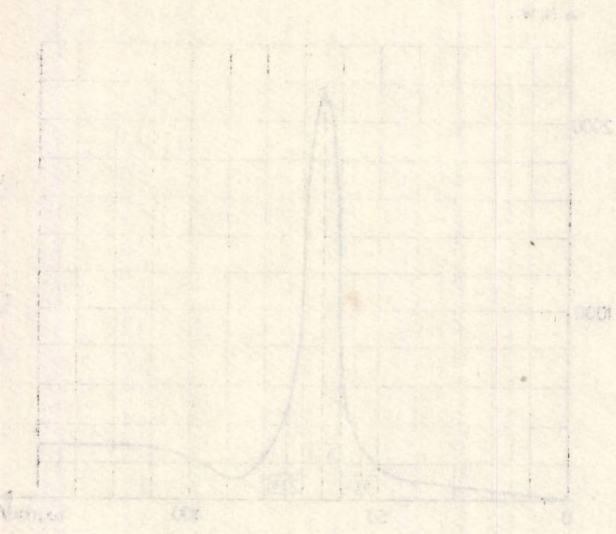
Faţă de ciururile clasice inerţiale, la aceeaşi capacitate de clasare a materialelor granulare, ciururile cu funcţionare în rezonanţă necesită un consum redus de energie în exploatare, consum redus de metal, lucrează cu forţe dinamice mici. Pentru calcul şi realizare se impune un mod nou de abordare cu totul deosebit decît pînă în prezent, atît în etapa de concepţie, cît şi în cea de execuţie.

Teoria alcătuirii şi funcţionării, cît şi fundamentarea calculului — prezentate în lucrare — au stat la baza proiectării, realizării şi experimentării unui ciur cu funcţionare în rezonanţă tip CR 2 × 7,5.

Primit în redacţie la 21 martie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. P. BRATU, *Izolarea şi amortizarea vibraţiilor la utilaje de construcţii*, Editor: Redacţia publicaţiilor pentru construcţii — INCERC, Bucureşti, 1982.
2. P. BRATU, *Optimizarea parametrilor constructivi la ciururile vibratoare bimasice cu funcţionare in anterezonanţă*, Lucrările celei de a IV-a Conferinţe „Vibraţii în construcţia de maşini", vol. II, Timişoara, 1982.
3. P. BRATU, *Optimisation constructive et fonctionnelle des cribles vibrants à fonctionnement en resonances*, Proceedings of the conference „Vibration in mechanical enginering", Timişoara, 1985.
4. K. DÜRING, *Berechnung der Amplituden von elektrodynamischen Förderrinnen mit gerichteten Schwingungen*, Fördern und Heben, Teil I, Heft 10, Teil II, Heft 11 [1963].
5. M. MUNTEANU, *Introducere în dinamica maşinilor vibratoare*, Edit. Academiei R.S. România, Bucureşti, 1986.
6. M. RAŢOI, M. MUNTEANU, I. GROŞANU, *Influenţa motorului de acţionare asupra dinamicii maşinilor vibratoare bimasice*, Lucrările celei de a III-a conferinţe „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1980.
7. C. STANCIU, *Dinamica maşinilor. Probleme speciale*, Institutul de Construcţii, Bucureşti, 1974.



CONTRIBUȚII LA STUDIUL STRUCTURILOR SPAȚIALE RETICULATE ÎN TRIPLU STRAT *)

de. M. V. SOARE
Institutul de Construcții București

I. H. TOADER
Institutul Politehnic Cluj-Napoca

Structurile complexe, în special cele la care este luată în considerare comportarea spațială, sînt studiate cu ajutorul programelor de calcul existente. De multe ori este greu de verificat corectitudinea rezultatelor furnizate de calculatorul electronic, de aceea sînt utile metode de calcul simplificate care să ne permită măcar evaluarea ordinului de mărime al necunoscutelor căutate. O astfel de metodă a fost preconizată de primul dintre autori pentru structurile planar pătrate simple, pornind de la premisa că această structură, asimilabilă cu o placă plană care lucrează fără torsiune, poate fi tratată ca o rețea de grinzi ortogonale [1], [2].

În cazul menționat, metoda permitea evaluarea unei rigidități la încovoiere de ansamblu a structurii, rezultat regăsit ulterior prin aplicarea ecuațiilor cu diferențe și apoi trecerea la limită (cînd pasul rețelei tinde către zero, cu păstrarea geometriei inițiale a structurii).

În nota de față ne-am propus să extindem metoda la structurile planare simple în triplu strat.

O structură planară simplă în triplu strat este alcătuită din trei fețe (straturi) echidistante, fiecare avînd ochiuri pătrate identice și cu laturi paralele cu laturile unui contur dreptunghiular. Fețele extreme (superioară și inferioară) se corespund în proiecție verticală, iar fața mediană are nodurile decalate cu cîte o jumătate de pas (interval) în fiecare direcție, față de nodurile din fețele extreme. Nodurile din două fețe vecine sînt legate prin diagonale, proiectate după diagonalele ochiurilor pătrate ale fețelor.

Așa cum s-a arătat într-un studiu anterior [4], fața mediană are nu numai rolul de a descărca fețele extreme, ci și pe acela de a reduce lungimile (respectiv zveltețile) diagonalelor.

Dacă se admite că structura planară în triplu strat se comportă tot ca o rețea de grinzi ortogonale, care poate fi studiată prin metode cunoscute, ne putem concentra atenția asupra uneia din aceste grinzi, solicitată, într-o secțiune transversală, de un moment încovoietor M.

*) Comunicare prezentată de primul dintre autori la cea de-a XI-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Constanța, 5 iunie, 1987.

O asemenea grindă apare ca avînd secţiunea transversală alcătuită din trei elemente de arii A_s, A_m, A_i, situate la distanţele h între ele (fig. 1*a*).

Dimensiunile secţiunilor transversale ale barelor fiind mici în comparaţie cu distanţele h dintre feţe, se poate admite că tensiunile normale se distribuie uniform pe secţiunile respective, avînd valorile σ_s, σ_m, σ_i corespunzătoare centrelor de greutate (fig. 1*c*).

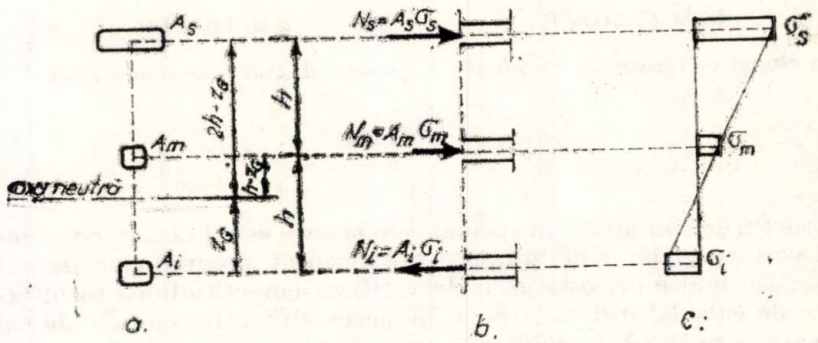


Fig. 1

O ecuaţie de momente în raport cu centrul de greutate al elementului inferior permite deducerea poziţiei axei neutre

$$z_G = \frac{A_m + 2A_s}{A_s + A_m + A_i} h \tag{1a}$$

şi apoi (fig. 1*a*)

$$2h - z_G = \frac{A_m + 2A_i}{A_s + A_m + A_i} h, \tag{1b}$$

$$h - z_G = \frac{A_i - A_s}{A_s + A_m + A_i} h. \tag{1c}$$

Eforturile în bare rezultă din însumarea tensiunilor distribuite uniform pe elementele respective, ipoteză aplicată curent în cazul grinzilor cu zăbrele plane :

$$N_s = A_s\sigma_s, \quad N_m = A_m\sigma_m, \quad N_i = A_i\sigma_i. \tag{2}$$

Ecuaţia de proiecţii pe orizontală şi ecuaţia de momente în raport cu baza se scriu :

$$A_s\sigma_s + A_m\sigma_m - A_i\sigma_i = 0, \tag{3a}$$

$$A_s\sigma_s(2h - z_G) + A_m\sigma_m(h - z_G) + A_i\,\sigma_i z_G = M. \tag{3b}$$

În timp ce la structurile planare determinarea tensiunilor normale (σ_s şi σ_i) era static determinată (vezi [3]), în cazul de faţă dispunem doar de două ecuaţii cu trei necunoscute (σ_s, σ_m, σ_i).

Ținînd seama că raportul dintre înălțimea structurii $2h$ și deschiderea cea mai mică este de ordinul 1/15 . . . 1/20, poate fi utilizată ipoteza secțiunilor plane de la grinzile drepte (ipoteza poate fi extinsă și la structuri multistrat). Din asemănarea de triunghiuri în diagrama σ (fig. 1 *e*) rezultă

$$\frac{\sigma_s}{2h - z_G} = \frac{\sigma_i}{z_G}$$

sau încă

$$\frac{\sigma_s}{A_m + 2A_i} = \frac{\sigma_i}{A_m + 2A_s}. \tag{4}$$

Din relațiile (3a), (3b) și (4) rezultă

$$\sigma_s = \frac{M}{h} \cdot \frac{A_m + 2A_i}{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)},$$

$$\sigma_m = \frac{M}{h} \cdot \frac{A_i - A_s}{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)}, \tag{5}$$

$$\sigma_i = \frac{M}{h} \cdot \frac{A_m + 2A_s}{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)}.$$

Dacă $A_m = 0$, relațiile (5) se simplifică după cum urmează

$$\sigma_s = \frac{M}{2A_s h}, \qquad \sigma_i = \frac{M}{2A_i h}; \tag{6a}$$

în mod asemănător, dacă $A_s = A_i = A$, din (5) rezultă

$$\sigma_s = \sigma_i = \frac{M}{2Ah}, \quad \sigma_m = 0, \tag{6b}$$

independent de valoarea lui A_m.

Să evaluăm, în continuare, momentul de inerție al secțiunii din figura 1*a* :

$$I = I_s + A_s(2h - z_G)^2 + I_m + A_m(h - z_G)^2 + I_i + A_i z_G^2 =$$

$$= (I_s + I_m + I_i) + \frac{h^2}{(A_s + A_m + A_i)^2}\Big[A_s(A_m + 2A_i)^2 +$$

$$+ A_m(A_i - A_s)^2 + A_i(A_m + 2A_s)^2\Big] =$$

$$= (I_s + I_m + I_i) + h^2 \cdot \frac{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)}{A_s + A_m + A_i}.$$

Momentele de inerție în raport cu axele proprii ale elementelor pot fi neglijate, astfel încît rezultă în final:

$$I \cong h^2 \cdot \frac{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)}{A_s + A_m + A_i}, \tag{7}$$

De aici rezultă direct rigiditatea la încovoiere a structurii în triplu strat

$$K = \frac{EI}{l} = \frac{Eh^2}{l} \cdot \frac{A_s(A_m + 2A_i) + A_i(A_m + 2A_s)}{A_s + A_m + A_i}. \tag{8}$$

Pentru $A_m = 0$, din (8) rezultă

$$K = \frac{E}{l} \cdot \frac{(2h)^2}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{A_s}}, \tag{9a}$$

iar pentru $A_s = A_i = A$ se obține

$$K = \frac{EA\,(2h)^2}{2l}, \tag{9b}$$

independent de valoarea lui A_m.

Relațiile (6a), (9a), respectiv (6b), (9b) corespund structurii planar pătrate simple, dacă se ține seama că distanța între cele două fețe este $2h$.

Structurile planare în triplu strat cu ochiuri dreptunghiulare au fost studiate de L. C. Schmidt [5] pe baza analogiei cu un mediu continuu echivalent. În cazul cînd fețele extreme sînt identice, se ajunge la ecuația cu derivate parțiale întîlnită și la studiul plăcilor ortotrope

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q,$$

în care D_x, D_y sînt rigidițăile la încovoiere, D_{xy} este rigiditatea la torsiune pe unitatea de lățime (exprimate în funcție de caracteristicile geometrice și mecanice ale structurii reale), iar q — încărcarea normală, distribuită pe unitatea de suprafață.

Vom mai extinde un rezultat de la structurile planare, relativ la influența înălțimii structurii asupra stării de eforturi și de deformații [3].

Fie două structuri în triplu strat avînd aceeași conformare geometrică, însă diferind prin înălțime. Notînd cu indicele 1, respectiv 2 eforturile și săgețile în prima structură, respectiv în a doua structură, din relațiile (8) și (5) rezultă că dacă sînt cunoscute mărimile

$$w_1 = \frac{C'}{h_1^2},\quad N_{s1} = A_s\sigma_{s1} = \frac{C''}{h_1},\quad N_{m1} = A_m\,\sigma_{m1} = \frac{C'''}{h_1},$$

$$N_{i1} = A_i\,\sigma_{i1} = \frac{C^{\mathrm{IV}}}{h_1},\quad D_1 = \frac{C^{\mathrm{V}}}{\sin\gamma_1},$$

atunci mărimile corespunzătoare celei de-a doua structuri sînt

$$w_2 = w_1 \frac{h_1^2}{h_2^2}, \quad N_{s2} = N_{s1} \frac{h_1}{h_2}, \quad N_{m2} = N_{m1} \frac{h_1}{h_2}, \quad N_{i2} = N_{i1} \frac{h_1}{h_2},$$

$$D_2 = D_1 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2},$$

în care γ_1 și γ_2 sînt unghiurile pe care diagonalele le fac cu planele fețelor.

Primit în redacție la 15 iulie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. V. SOARE, *Probleme moderne în construcții : structurile spațiale*, Revista Construcțiilor și a Materialelor de Construcții, **20**, 11, 561—568 (1968).
2. M. V. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul rețelelor spațiale planar pătrate*, St. cerc. mec. apl., **26**, 3, 631—664 (1969).
3. M. V. SOARE, GH. OBLEMENCO, *Structuri reticulate planare. Influența înălțimii structurii asupra stării de eforturi și de deformații*, St. cerc. mec. apl., **40**, 3, 337—361 (1981).
4. M. V. SOARE, I. H. TOADER, *Contribuții la studiul stării de eforturi și de deformații în structurile planare în triplu strat*, A III-a conferință de construcții metalice, Timișoara, 14—15 octombrie 1982, vol. 2, pp. 232—239.
5. L. C. SCHMIDT, *Plate-like Behaviour of Triple-Layer Space Trusses*, Proceedings of the eighth Australasian Conference on the Mechanics of Structures & Materials. The University of Newcastle, New South Wales, August, 1982, 36—1...36—6.

RECENZII

M. Y. HUSSAINI, M. D. SALAS (sub red.), *Studies of Vortex Dominated Flow* (Studii asupra curgerilor dominate de vîrtejuri). Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1987, XII + 364 p., 219 fig.

Acest volum conține lucrările simpozionului cu obiectul menționat în titlu, care s-a ținut în 1985 la Centrul de Cercetări NASA Langley de la Hampton, Virginia, în S.U.A. Cele 14 lucrări cuprinse în volum sînt datorate unui număr de 23 specialiști din S.U.A., Marea Britanie, Elveția, Franța, Italia și Olanda.

Lucrările sînt grupate în cinci secțiuni și anume : dinamica vîrtejurilor (4 lucrări), declinul vîrtejurilor (2 lucrări), desprinderea masivă (3 lucrări), formarea vîrtejurilor la bordurile de atac ascuțite (3 lucrări) și curgeri conice cu desprindere (2 lucrări).

Cîteva dintre lucrări au un caracter de sinteză expunînd stadiul actual al rezolvării anumitor probleme din tematica simpozionului. În celelalte lucrări sînt prezentate rezultate originale, în cea mai mare parte teoretice, din domeniile care au fost precizate mai înainte, soluțiile fiind obținute mai ales cu ajutorul metodelor numerice.

Volumul reprezintă o contribuție interesantă în studiul unui aspect important al mecanicii fluidelor, cu numeroase aplicații în cele mai variate domenii. Nivelul ridicat al lucrărilor actualitatea tematicii și rezultatele prezentate, recomandă volumul atenției specialiștilor în mecanica fluidelor. Atît acei care se ocupă de cercetări teoretice, cît și cei care urmăresc în special aplicațiile găsesc în lucrările incluse în volum sugestiile utile pentru activitatea lor.

T. Oroveanu

D. L. DWOYER, M. Y. HUSSAINI (sub red.), *Stability of Time Dependent and Spatially Varying Flows* (Stabilitatea curgerilor dependente de timp și cu variație spațială), Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1987, XIII + 350 p., 165 fig.

Acest volum conține lucrările simpozionului cu obiectul menționat în titlu, care s-a ținut în 1985 la Centrul de Cercetări NASA Langley de la Hampton, Virginia, în S.U.A.

Problema stabilității curgerilor este una dintre cele mai dificile din mecanica fluidelor și ca atare a făcut, în decursul timpului, obiectul unui număr foarte mare de cercetări. Cele 18 lucrări cuprinse în acest volum, datorate unui număr de 29 cercetători din S.U.A. și Marea Britanie, aduc contribuții la unele aspecte mai complicate ale acestor probleme.

După o primă lucrare, cu caracter de sinteză, referitoare la aplicarea teoriei stabilității în controlul curgerilor laminare, urmează șapte lucrări care se ocupă de stabilitatea curgerilor incompresibile cu variație spațială. După acestea, urmează alte două lucrări care studiază aceeași problemă pentru fluidele compresibile ; una dintre acestea are caracter de sinteză. O altă lucrare se ocupă de stabilitatea curgerilor periodice în timp. Următoarele trei lucrări au ca obiect straturile plane Stokes, iar ultimele patru lucrări se ocupă de probleme neliniare de stabilitate, de soluții numerice ale ecuațiilor Navier-Stokes și de unele cercetări experimentale.

Dată fiind importanța teoriei stabilității, rezultatele cuprinse în acest volum reprezintă contribuții interesante, menite să aducă unele clarificări în anumite aspecte dificile ale teoriei. Specialiștii în mecanica fluidelor, indiferent de orientarea cercetărilor lor, găsesc în acest volum un material bogat și deosebit de util.

T. Oroveanu

E. KREUZER, *Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme* (Cercetarea numerică a sistemelor dinamice neliniare). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, XVIII + 194 p., 47 fig. + 2 tabele colorate.

Sistemele dinamice sînt frecvent descrise, cu o precizie suficientă, prin modele matematice neliniare. Raritatea soluțiilor analitice pentru astfel de modele impune utilizarea metodelor numerice. Obiectul acestui volum este acela de a prezenta metode numerice noi, care au fost testate.

Într-un capitol introductiv, este precizată posibilitatea descrierii matematice a sistemelor dinamice neliniare fie prin metode calitative (topologice), fie prin metode cantitative, se precizează apoi scopul lucrării și se dă o scurtă descriere a conținutului acestuia.

Capitolul al doilea conține bazele matematice utilizate în continuare. Se consideră mai întîi sistemele liniare și se introduce noțiunea de curent pentru un astfel de sistem. Se trece apoi la sistemele neliniare și se dă o prezentare a acestora care s-a impus mai recent și care se poate generaliza pe varietăți diferențiale. Sînt introduse reprezentările discrete liniare și neliniare și sînt date unele considerații asupra comportării asimptotice.

În capitolul al treilea sînt considerate sistemele conservative. O tratare succintă a teoriei canonice a perturbațiilor este menită să scoată în evidență dificultățile care apar în cercetarea relativă la demonstrarea stabilității problemelor mai multor corpuri.

Următorul capitol este consacrat sistemelor neconservative, de o importanță practică deosebită. Se dă definiția noțiunii de atractor, care permite descrierea comportării tipice a sistemelor tehnice neconservative. Se tratează în amănunt mecanismele schimbării calitative a atractorilor și apariției atractorilor stranii.

Capitolul al cincilea este dedicat prezentării metodelor de cercetare fundamentale pentru sistemele dinamice neliniare. Sînt trecute astfel în revistă metodele analitice aproximative și apoi metodele numerice. Deoarece descrierea cantitativă a sistemelor dinamice neliniare apare extrem de dificilă din cauza mișcărilor neregulate posibile, sînt introduși exponenții lui Liapunov, care oferă o caracterizare statistică a comportării haotice.

Capitolul al șaselea conține metoda care face obiectul propriu-zis al lucrării și anume discretizarea spațiului fazelor prin așa-numite celule. Metoda numită a reprezentării prin celule este descrisă în amănunt, teoria bazîndu-se pe lanțurile Markov. O descriere algoritmizantă ocupă cea mai mare parte a capitolului, în vederea dezvoltării cercetării numerice. Sînt date și cîteva exemple de aplicare.

Ultimul capitol reia, sub formă de concluzii, principalele probleme expuse.

Prin ansamblul ei, această lucrare este deosebit de interesantă în sensul pe care și-l propune de altfel de a fi un manual pentru studiu superior. Problema comportării sistemelor dinamice neliniare are o importanță greu de exagerat și dezvoltările recente prezintă un interes special pentru aplicații în știință și tehnică. Destinat, așa cum am precizat, celor ce doresc să studieze această problemă, volumul prezintă utilitate și pentru specialiștii din domeniul mecanicii.

T. Oroveanu

E. TRUCKENBRODT, *Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik* (Manual de mecanica fluidelor aplicată). *Zweite überarbeitete und erweiterte Auflage* (Ediția a doua prelucrată și completată), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, XIX + 249 p., 121 fig.

Prima ediție a acestui manual a fost recenzată în revista noastră, în numărul 4 (1986). Arătam acolo că intenția autorului a fost aceea de a oferi o introducere în mecanica fluidelor studenților care se pregătesc pentru a deveni ingineri mecanici. Ca urmare, au fost alese din ansamblul mecanicii fluidelor numai acele capitole care permit să se formeze o idee generală asupra acestei discipline, prezentînd în același timp și importanță pentru aplicațiile practice.

Un prim capitol, cu caracter de introducere, conține o expunere asupra proprietăților fizice și constantelor de material ale fluidelor precum și unele considerații asupra aspectelor fizice ale mișcării fluidelor.

Legile fundamentale ale mecanicii fluidelor sînt prezentate în capitolul al doilea, în ordinea clasică (statica, cinematica și dinamica fluidelor).

În cel de-al treilea capitol sînt cuprinse mai multe aplicații ale ecuațiilor fundamentale la mișcările simple ale fluidelor incompresibile. În primul rînd, sînt considerate cîteva mișcări

ale fluidelor ideale, accentul punîndu-se asupra mișcărilor staționare sau nestaționare în cadrul teoriei firului de curent. În partea finală a capitolului sînt tratate în amănunt mișcarea laminară și aceea turbulentă în conducte, inclusiv problema rezistențelor locale de diferite tipuri.

Mișcările simple ale fluidelor compresibile, în cadrul teoriei firului de curent, sînt prezentate în capitolul al patrulea.

În capitolul al cincilea este studiată mișcarea fluidelor ideale incompresibile, irotațională sau rotațională.

Mai întîi sînt prezentate cîteva rezultate cu caracter general după care se trece la cazul mișcărilor irotaționale (potențiale) plane, dîndu-se mai multe exemple. În ceea ce privește mișcările rotaționale, după cîteva aspecte generale, se tratează problema aripii de anvergură infinită (teoria profilelor) și de anvergură finită.

Ultimul capitol are ca obiect mișcările laminare și turbulente în stratul limită. În afară de aspectele fundamentale, fizice și matematice, inclusiv acela al desprinderii, sînt prezentate problema stratului limită pe o placă plană și mișcările fără frontiere solide.

Față de prima ediție, prelucrarea constă, în esență, în înlăturarea greșelilor de tipar și a unor ușoare nepotriviri, iar completările sînt aduse în capitolul al doilea (cîteva considerații asupra teoriei lubrificației) și în capitolul al șaselea (teoria mișcărilor fără frontiere solide).

Manualul avînd un caracter introductiv, accentul este pus asupra înțelegerii corecte a fenomenelor fizice și a legilor fundamentale ale mecanicii fluidelor. Aparatul matematic utilizat corespunde acestui scop, demonstrațiile fiind în general destul de simple sau simplificate, evitîndu-se complicațiile. O atenție deosebită este acordată aplicațiilor în cele mai diverse probleme de interes practic, numeroase și bine alese, care sporesc interesul manualului.

Scris într-un stil clar, care permite lectura în bune condiții, cu o prezentare a problemelor în care se observă experiența deosebită a autorului, manualul este util și pentru ingineri sau specialiști din alte domenii, în rezolvarea unor probleme în care intervin elemente din mecanica fluidelor.

T. Oroveanu

TH. V. HROMADKA II, CH.-CH. YEN, G. F. PINDER, *The Best Approximation Method. An Introduction.* (Metoda celei mai bune aproximații. O introducere), *Lecture Notes in Engineering* (Note de lectură în inginerie) sub red. C. Brebbia și S. A. Orszag, Vol. **27**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, IV + 168 p., 25 fig.

În acest volum, autorii prezintă o nouă metodă aproximativă de rezolvare a modelelor matematice și inginerești, bazată pe dezvoltarea în serie Fourier generalizată pentru ecuațiile care conțin operatori liniari. Denumirea de metoda celei mai bune aproximații provine din faptul că soluția aproximativă fiind dezvoltată în serie Fourier generalizată se obține, în sensul celor mai mici pătrate, cea mai bună aproximație.

Primele patru capitole conțin noțiunile matematice necesare pentru expunerea și utilizarea metodei propuse. Acestea sînt spațiile metrice, liniare și spațiile Banach, teoria integralei Lebesgue, spațiile Hilbert și seriile Fourier generalizate, operatorii liniari. Este desigur vorba de o expunere rezumativă dar foarte clară și ilustrată cu exemple semnificative.

În capitolul al cincilea este prezentată metoda, iar în capitolul al șaselea sînt date aplicații ale acestuia la probleme bidimensionale legate de ecuația lui Laplace sau de ecuația lui Poisson. Capitolul conține și un program de calcul scris în limbaj FORTRAN pentru probleme potențiale (soluții ale ecuației lui Laplace).

În ultimul capitol, este tratată problema cuplării metodei celei mai bune aproximații cu aceea a elementului de frontieră complex. În capitol este prezentată mai întîi această ultimă metodă precum și modul în care se efectuează legătura cu cea mai bună aproximație, în sensul precizat în cadrul volumului. Sînt indicate și aplicații și este prezentat un program de calcul, tot în limbaj FORTRAN, pentru aplicații.

Așa cum am mai amintit, expunerea metodei este clară, de un bun nivel matematic și cu o constantă tendință spre aplicații. Volumul este interesant și util, lectura fiind recomandată atît matematicienilor cît și inginerilor care se ocupă de metodele numerice.

T. Oroveanu

I. ELISHAKOFF, H. IRRETIER (sub red.), *Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and Their Applications. Proceedings of the Euromech-Colloquium 219* (Teorii dinamice perfecționate pentru grinzi, plăci și plăci curbe subțiri și aplicațiile lor. Lucrările Colocviului Euromech 219), în seria : *Lecture Notes in Engineering* (sub red. C. A. Brebbia și S. A. Orszag), vol. **28**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 428 p.

După cum se știe, teoriile clasice asupra vibrațiilor neglijează efectele deformațiilor de lunecare și inerția de rotație. Teoriile dinamice perfecționate, care iau în considerare aceste efecte, au început să fie aplicate, atît teoretic, cît și practic în ultimele decenii.

Ținînd seama de aceste considerente, Comitetul European de Mecanică a aprobat ținerea Colocviului Euromech 219 (cu titlul menționat precedent) pentru trecerea în revistă a dezvoltărilor recente, pentru a stabili direcții de cercetare viitoare și pentru a reprezenta un forum de lucru al cercetătorilor mai tineri. Colocviul s-a ținut între 23—26 septembrie 1986 la Universitatea din Kassel (R.F.G.). Au participat 45 de persoane, cadre didactice și din producție, din nouă țări europene, India, Israel și S.U.A.

Au fost prezentate 37 de comunicări, grupate după cum urmează :

Comunicări generale		.7
Sesiunea A :	Teoria vibrațiilor plăcilor plane și curbe subțiri	.7
Sesiunea B :	Diferite abordări ale problemei dinamice ale grinzilor	.6
Sesiunea C :	Vibrații întîmplătoare și stabilitate dinamică	.4
Sesiunea D :	Vibrațiile structurilor compozite	.5
Sesiunea E :	Probleme dinamice speciale ale grinzilor, plăcilor plane și curbe subțiri	.8

În contextul actual al bogăției informaționale și al rapidității informației, volumul se dovedește un material extrem de util pentru un cerc larg de cititori, în special cadre de cercetare și din învățămîntul superior.

M. V. Soare

J. P. ZOLÉSIO (sub red.), *Boundary Control and Boundary Variations* (Reglarea pe frontieră și variațiile pe frontieră), *Proceedings of the IFIP WG7.2 Conference, Nice, France, June 10—13, 1986*, în seria : *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (sub red. M. Thoma și A. Wyner), vol. **100**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1988, 398 p., 71 fig.

Reglarea pe frontieră și studiul variațiilor pe frontieră sînt probleme de cercetare ce derivă din necesități practice de optimizare a formelor ca și a desfășurării a numeroase procese fizice. În vederea rezolvării acestor probleme se apelează în special în ultima vreme la un aparat matematic sofisticat.

Cartea conține lucrările conferinței internaționale de lucru asupra reglării și studiului variațiilor pe frontieră, ce a avut loc la Nisa în 1986. Conferința a fost organizată de Grupul de lucru 7,2 (Metode de Calcul pentru Sisteme de reglare descrise de ecuații cu derivate parțiale) din cadrul IFIP și și-a propus stimularea schimbului de idei dintre grupul de lucru pe probleme privind optimizarea formelor (inclusiv probleme cu frontieră liberă) și a celui ce se ocupă de reglarea pe frontieră a sistemelor hiperbolice (inclusiv problemele de stabilitate). La lucrările conferinței au participat 45 de cercetători din 9 țări, rezultatele prezentate constituind pași semnificativi obținut în special în studiul stabilității structurilor flexibile.

Studiul variațiilor pe frontieră și reglarea pe frontieră constituie un domeniu de cercetare deosebit de actual, datorită atît a rezultatelor matematice implicate în rezolvarea problemelor, a posibilităților de calcul aferente de informatică și calculatoare, ca și a cerințelor specifice dezvoltării actuale ale tehnicii în dezvoltarea de aparate și echipamente ce sînt supuse acțiunii fluidelor.

Comunicările prezentate sînt axate în special pe probleme teoretice, accentul fiind pus pe metode ce se propun pentru rezolvarea problemei, în cîteva contribuții fiind furnizate și exemple de aplicații. Articolele se remarcă prin contribuții originale, iar prin nivelul înalt al tratării subiectelor se adresează mai ales specialiștilor.

Enumerăm în continuare cîteva din problemele abordate de autori :

— Proiectarea optimă a formelor (cu aplicații în aero și hidromatică) ;

— Stabilitatea în structurile flexibile;
— Comportarea frontierei în probleme cavitației;
— Studiul unor fenomene cu frontieră liberă;
— Metode de penalizare a senzitivității formelor;
— Problema formei valurilor cînd întîlnesc un obstacol.

Lucrările se remarcă prin claritatea expunerilor, afirmațiile sînt demonstrate în totalitate, iar figurile prezente ușurează receptarea informațiilor în ciuda caracterului lor, abstract.

Sînt prezentate și potențiale aplicații ale rezultatelor obținute, în cîteva articole fiind furnizate și exemple concrete ce susțin teoria dezvoltată.

Nivelul ridicat al cercetărilor efectuate și a rezultatelor prezentate precum și necesitatea către o rapidă aplicare în practică conduc la recomandarea acestei culegeri de articole specialiștilor în domeniu.

O. Gheorghiu

P. E. CROUCH, A. J. VAN DER SCHAFT, *Variational and Hamiltonian Control Systems* (Sisteme de control variațional și hamiltonian), vol. **101** din seria : *Lectura Notes in Control and Information Sciences* (sub red. M. Thoma și A. Wyner), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 221 p.

Monografia are la origine efortul comun al autorilor de a demonstra conjectura — formulată de A. J. van der Schaft — privind caracterizarea sistemelor de control hamiltonian în termenii comportamentului lor variațional intrare-ieșire.

După cum se cunoaște, abordarea hamiltoniană constituie suportul descrierii dinamicii unei clase largi de sisteme fizice (mecanice și electromagnetice) de tip conservativ, chiar dacă ipoteza conservării energiei reprezintă o idealizare. Caracterizarea variațională a sistemelor hamiltoniene este, așa cum remarcă în mod justificat autorii, o punte de legătură între fizică și teoria sistemelor. Un domeniu actual și foarte important de aplicare a contribuțiilor de acest gen este proiectarea mecanică a roboților manipulatori.

Introducerea lucrării este consacrată descrierii generale a problemei de control hamiltonian și evidențierii relațiilor între noțiuni din fizică și teoria controlului.

Principalele concepte și rezultate implicate în caracterizarea sistemelor de control hamiltonian prin metode variaționale (deci contribuția originală a autorilor) sînr concentrate în capitolele 1—6 („Problema realizabilității hamiltoniene", „Sisteme variaționale și adjunct variaționale", „Minimalitatea prelungirii și extensia hamiltoniană", „Criteriul de auto-adjuncție", „Criteriul variațional", „Sisteme neliniare generale").

Posibilele extinderi ale teoriei prezentate, ca și o serie de probleme care rămîn deschise, sînt discutate în capitolul al 7-lea.

Nivelul teoretic la care este elaborată lucrarea impune un efort adecvat de receptare. Deși aspectele aplicative nu sînt explicit abordate (lucru firesc pentru prima versiune a unei abordări teoretice) ele sînt sugerate sau deductibile din structura lucrării și comentariile făcute în introducere și în ultimul capitol.

Se poate conchide că ne aflăm în fața unei lucrări originale, de cert interes și înalt nivel științific, utilă tuturor celor interesați în teoria controlului cît și celor implicați în aplicații de vîrf ale acestei teorii.

D. Rădulescu

JEAN CORNU, *Fundamentals of Fusion Welding Technology* (Bazele tehnologiei de sudare prin topire), vol. **1**, din seria : *Advanced Welding Systems* (Procedee de sudare avansate), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 141 p., 70 fig.

Volumul reprezintă prima parte a unei serii de lucrări care au ca obiect prezentarea procedeelor de sudare prin topire în legătură cu aplicarea lor actuală sau posibilă la sisteme mecanizate, automatizate sau robotizate.

În cadrul volumului se face o prezentare sintetică a problemelor de bază, specifice procedeelor de sudare prin topire.

Capitolul I descrie dezvoltarea istorică a sudării, fiind indicate, de asemenea, evoluțiile ponderii principalelor procedee de sudare în Franța și S.U.A. la nivelul anilor 1960—1985.

În capitolele II și III se definesc noțiunile de bază ale sudării și sînt prezentate tipurile de îmbinări sudate, pozițiile de sudare și formele de rosturi utilizate.

Capitolul al IV-lea formulează conceptele metalurgice ale sudării, iar capitolul al V-lea cuprinde o prezentare succintă a încercărilor mecanice specifice verificării îmbinărilor sudate.

Capitolul al VI-lea se referă la comportarea la sudare a oțelurilor carbon, slab aliate și aliate, respectiv a aliajelor de aluminiu. Este indicată influența diferitelor elemente de aliere asupra comportării la sudare și sînt analizate problemele metalurgice care apar la sudare, precum și recomandările tehnologice pentru sudarea acestor materiale de bază.

În capitolul al VII-lea se prezintă tratamentele termice specifice structurilor sudate, fiind indicate condițiile de execuție a lor, precum și efectele acestora asupra caracteristicilor îmbinărilor sudate.

Capitolul al VIII-lea tratează tensiunile și deformațiile apărute prin procesul de sudare. Sînt prezentate mecanismul de apariție a tensiunilor și deformațiilor prin sudare, precum și posibilitățile de reducere a acestora.

Volumul se încheie cu analiza problemelor de protecție a muncii specifice procedeelor de sudare în mediu de gaz protector, sudare cu laser și sudare automată.

Lucrarea are un pronunțat caracter didactic, reprezentînd, în esență, deschiderea necesară pentru aprofundarea problemelor ce urmează a fi tratate în volumele următoare ale seriei.

D. Dehelean

BERNARD ESPIAU, *Towards Third Generation Robotics* (Către Robotica de generația a treia). Lucrările celei de-a treia Conferințe Internaționale de Robotică Avansată, ICAR '87, 13—15 octombrie 1987, Versailles, Franța, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987, 615 pag.

Domeniile de interes ale Conferinței Internaționale de Robotică Avansată acoperă atît cercetări fundamentale, cît și aplicații în comanda roboților, modelare pe calculator, vederea artificială, roboți mobili, senzori, programare și telecomandă. Conferința urmărește de asemenea schimbul de informații despre programele naționale și internaționale de cercetare și dezvoltare în domeniul roboticii.

Lucrările conferinței au fost grupate în 12 secțiuni avînd fiecare un capitol corspunzător în volum.

În capitolul inititulat robotica avansată sînt prezentate două proiecte importante în domeniul roboticii. O lucrare prezintă proiectul AMR (Advanced Mobile Robots) din cadrul proiectului european mai larg Eureka. A doua lucrare prezintă stadiul actual din cadrul proiectului național japonez de cercetare și dezvoltare în tehnologia roboților avansați.

Urmează capitolele referitoare la comanda adaptivă, roboți și vehicule mobile și modelare. Un capitol mai amplu conține șapte lucrări despre vedere artificială, o problemă de interes deosebit în cercetările actuale. Sînt incluse lucrări care tratează coordonarea mînă-ochi, vederea bazată pe modelare în trei dimensiuni precum și aspecte ale vederii stereoscopice.

Un capitol special tratează problemele clasice ale roboților: cinematica și dinamica. Aici sînt prezentate algoritmi și pachete de programe utilizate în proiectarea structurilor mecanice ale roboților. Sînt tratate apoi probleme de generare de traiectorii și evitarea obstacolelor. Un alt capitol este dedicat senzorilor nevizuali: tactili, sonori, bazați pe laser.

Sistemele de programare a roboților sînt tratate în cinci lucrări care prezintă diverse soluții pentru comanda adaptivă, programarea la nivel de obiectiv, programarea orientată pe obiecte și programarea celulelor multiroboți.

Un alt domeniu clasic al roboticii: sisteme de comandă, este tratat într-un capitol separat. Lucrările prezintă însă soluții moderne cum sînt: comanda optimală, cooperarea cu complianță activă, comandă robustă, sisteme de comandă cu învățare.

Un scurt capitol cuprinde două lucrări referitoare la telecomandă, iar în final alte două lucrări se ocupă de tendințe ale cercetării și învățămîntului în robotică.

Volumul conține un index de autori și adresele organizațiilor și autorilor participanți. În total volumul conține 50 de lucrări ale unor specialiști provenind din Europa, S.U.A., și Japonia. Prin conținutul său, cercetări de ultimă oră în robotică, volumul prezintă un interes

deosebit pentru cercetătorii și cadrele didactice preocupate de acest domeniu. În același timp lucrarea prezintă interes și pentru cei implicați în deciziile privind strategia dezvoltării roboticii în țara noastră prin datele și realizările menționate, provenind din țări foarte dezvoltate în acest domeniu.

D. Mănduțianu

C. A. VOSS, (sub red.), *Just in Time Manufacturing* (Prelucrarea promptă), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Paris, London, New York, Tokyo 1987, 491 p., 120 fig.

Volumul conține lucrările celei de-a doua Conferințe Internaționale pe tema producției prompte care a avut loc la Londra între 20 și 22 octombrie 1987.

Conceptul JIT acoperă probleme variate de producție provenind din diversificarea cerințelor consumatorilor, creșterea dificultăților de a prevedea cererile acestora și necesitatea scurtării ciclurilor de producție. Sistemul de producție JIT a apărut în Japonia, la Toyota Motor Co. Ltd. în anii '50—'60. Cînd Japonia și-a reluat creșterea cu resurse limitate după prima criză a petrolului, multe companii, care sufereau de pe urma slabei creșteri economice și a creșterii serioase a diverselor costuri, au acordat o atenție sporită acestui sistem JIT și experiența japoneză se răspîndește acum în toată lumea, ca o soluție de a rezolva conflictele dintre următoarele obiective :

1) — capacitatea de a livra un nou produs față de investiții minime ;
2) — utilizarea maximă a capacităților de producție față de scurtarea timpului de asimilare a unui produs.

Sintetic, JIT poate fi definit drept ajustarea exactă a producției la cantitatea și termenul cerute.

Lucrările sînt grupate în nouă capitole. Primul capitol conține trei lucrări referitoare la perspective ale dezvoltării și răspîndirii sistemelor JIT. În capitolul al doilea este prezentată experiența referitoare la sisteme JIT în diverse industrii sau companii. Lucrările din al treilea capitol discută sistemele JIT în comparație cu alte soluții precum problemele actuale de producție. De exemplu, este făcută o comparație între JIT și MRP (Manufacturing Resource Planning). În capitolul următor apar lucrări ce tratează aspectele tehnice ale JIT. În capitolul al cincilea sînt tratate probleme de aprovizionare și desfacere în contextul JIT. Provenind din Japonia JIT introduce și termeni noi (din limba japoneză) care denumesc probleme specifice. Printre acești termeni, Kanban semnifică tehnica de control a producției specifică JIT. Aspectele legate în Kanban, variante ale sale, sînt tratate în capitolul al șaptelea. Un capitol intitulat „calitate și personal" sînt dezvoltate implicațiile asupra calificării personalului în strînsă legătură cu calitatea și dinamica producției. Într-un capitol final sînt analizate cazuri de sisteme JIT.

Autorii lucrărilor provin atît din mediu industrial, cît și universitar din Europa occidentală (majoritatea din Marea Britanie), Japonia, Statele Unite, Canada, Singapore, Africa de Sud.

Prin actualitatea sa și conținutul volumului se adresează proiectanților de tehnologii, inginerilor din industrie, studenților de la facultățile tehnice și economice.

D. Mănduțianu

J. G. MARTINS, M. SVENSSON, *Profitability and Industrial Robots* (Profitabilitatea și roboții industriali), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 170 p., 50 fig.

Utilizarea roboților industriali oferă un potențial considerabil pentru creșterea gradului de flexibilitate și automatizare a proceselor de producție. În acest sens, cartea vine în sprijinul tuturor celor interesați în proiectarea aplicațiilor robotizate în sistemele de producție, pentru exploatarea acestui potențial în scopul obținerii unei profitabilități cît mai mari.

Capitolul 1 definește trăsăturile ce caracterizează o instalație industrială profitabilă : alegerea aplicației, soluția tehnică și potențialul instalației. O atenție deosebită este acordată soluțiilor tehnice ce asigură o punere în funcțiune rapidă, o fiabilitate ridicată, o flexibilitate sporită și o interacțiune corespunzătoare om-mașină. De asemenea, sînt prezentate aspecte legate de asigurarea unui potențial bun al instalației în vederea unei funcționări îndelungate și creării posibilităților de dezvoltare de noi aplicații.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

Capitolul al 2-lea prezintă diferite modalităţi de realizare a aplicaţiilor profitabile. Automatizarea fiind costisitoare, aspectele tratate aici cuprind modalităţile de amplasare a instalaţiilor astfel încît să fie exploatate toate posibilităţile de creştere a profitabilităţii. Alţi doi factori cu implicaţii directe în stabilirea profitabilităţii menţionaţi aici sînt volumul şi diversificarea producţiei. În sfîrşit, un ultim aspect analizat se referă la avantajele automatizării flexibile.

În capitolul al 3-lea sînt descrise zece aplicaţii robotizate preluate de la uzinele ASEA din Västerås, Suedia şi uzinele Volvo din Skövde Suedia. Exemplele de turnare, de fabricare de dispozitive de frînare şi cutii de viteză folosesc celule robotizate flexibile fără resetare automată. Exemplele pentru aşezarea termo-agregatelor, realizarea circuitelor imprimante şi fabricarea radiatoarelor pentru tiristoare folosesc celule cu resetare automată, iar cele de asamblare a contactelor şi blocurilor auxiliare sînt destinate pentru asamblare automată. Ultimile două exemple — de asamblare a arborelui cotit şi de utilizare a celulelor flexibile cu roboţi industriali — sînt destinate pentru sistemele flexibile de fabricaţie în industria de automobile.

Capitolele 4 şi 5 analizează modulul în care se face calculul preliminar şi se realizează proiectul pentru obţinerea unei profitabilităţi ridicate într-o aplicaţie dată. Sînt consideraţi aici atît factorii tehnici, cît şi cei economici care contribuie la creşterea eficienţei utilizării roboţilor industriali.

Evaluarea profitabilităţii este obiectul capitolului al 6-lea. Sînt analizaţi factorii care contribuie la această estimare : cerinţele de producţie şi disponibilitatea de timp, relaţia utilizare/disponibilitate/eficienţă, capacitatea echipamentelor, gradul de echipare, cheltuielile de producţie, timpul de recuperare a investiţiilor etc.

Pe baza acestor factori este indicată o metodă de calcul a profitabilităţii. În finalul capitolului sînt evaluate costurile pentru o instalaţie robotizată.

Ultimul capitol descrie o serie de reguli de proiectare care facilitează asamblarea automată. Un prim grup de reguli se referă la instrucţiunile de proiectare a întregului ansamblu şi cuprinde secvenţa de operaţii corespunzătoare descompunerii unui proces de asamblare. Un al doilea grup de reguli se referă la proiectarea părţilor componente, astfel încît acestea, iniţial neordonate, să fie ordonate în scopul alimentării, transportării, sau înmagazinării. În sfîrşit, ultimul grup cuprinde reguli de proiectare a părţilor componente în scopul poziţionării lor pentru a putea fi apucate, inserate sau asamblate.

Aşadar, cartea pune în primul rînd accentul pe aspectele legate de profitabilitatea şi flexibilitatea în operaţiile de asamblare. Bogat ilustrată şi cu exemple de aplicaţii ce şi-au dovedit succesul în fabricile existente, cartea constituie în acelaşi timp un ghid util pentru utilizatorii care doresc să cunoască potenţialul tehnologiei de realizare a roboţilor în vederea creşterii eficienţei industriale.

Ş. Voinea

M. M. ANDREASEN (sub red.), *Assembly Automation* (Asamblarea automată), *Proceedings of the 8th International Conference on Assembly Automation, March 31 — April 2, 1987, Copenhagen Denmark*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1987, 400 p., 100 fig.

Volumul cuprinde 39 lucrări prezentate la prestigioasa manifestare ştiinţifică „A 8-a conferinţă despre asamblarea automată" care a avut loc la Copenhaga, Danemarca, în martie—aprilie 1987.

Lucrările sînt grupate în şapte capitole tematice, la care se adaugă un capitol de articole întîrziate (7 la număr).

Primul capitol este intitulat „Strategii pentru asamblarea automată, management şi finanţare". Celor două articole cu caracter general din acest capitol se pot asocia după conţinutul lor alte patru articole din capitolul de lucrări întîrziate. Se prezintă problemele automatizării flexibile a asamblării în Japonia, S.U.A., Danemarca şi Suedia. Un interes deosebit merită articolul referitor la o abordare practică a automatizării flexibile în cadrul unei întreprinderi cu producţie de masă. Articolul lui P. Foyer de la Ingersoll Engineers Anglia se referă la avantajele economice ale automatizării asamblării.

Trei articole sînt cuprinse în capitolul „Proiectarea sistemelor : ajutoare în planificare". Ele se referă la proiectarea şi planificarea sistemelor de asamblare automată, analiza costurilor şi modelarea acestora folosind calculatorul.

Capitolul al treilea este intitulat „Sisteme de asamblare : în fabricaţie de componenţe electronice circuite integrate". Cele patru articole cuprinse în acest capitol se referă la inserţia

și lipirea automată a unor componente electronice nestandardizate cu ajutorul unor roboți de asamblare și îmbunătățirea tehnologiilor de asamblare pentru componente electronice inclusiv circuite imprimate în vederea automatizării. Se remarcă articolul publicat de patru cercetători de la firma „Hewlett Packard" din S.U.A. referitor la conceperea proiectării produsului, manipulării materialelor și asamblării automate ca și un sistem unitar.

Capitolul al 4-lea se referă la „Proiectarea pentru asamblare". Cele șapte articole ale capitolului se referă la proiectarea ținînd seama de cerințele asamblării, vizînd reducerea costurilor de fabricație și flexibilitate, inclusiv prin alegerea automată a regulilor de proiectare de către un sistem expert. Lucrarea Lui M. Moinet de la IBM Franța se referă la adaptabilitatea în asamblare prin modularizare și folosirea roboților cu vedere artificială, iar cea a lui E. Triculeyre de la Școala Superioară de Artă și Meserii Franța abordează corelația dintre conceptul CIM (fabricație integrată cu calculatorul) și tehnologia asamblării.

Cel de al 5-lea capitol este consacrat „Resurselor tehnologice". Cele cinci articole conținute se referă la sisteme ierarhice integrate pentru comanda asamblării automate, programarea sistemelor de asamblare cu mai mulți roboți, utilizarea roboților inteligenți prevăzuți cu senzori în procese de asamblare flexibile.

Capitolul al 6-lea se referă la „Sisteme de asamblare : produse mecanice". Cele șapte articole ale capitolului precum și unul din articolele capitolului de articole întîrziate tratează problematica automatizării asamblării unor produse fabricate în loturi în Suedia și Italia, automatizarea asamblării unor părți din motoare cu ardere internă în Anglia și Suedia, asamblarea automată a unor componente mecanice într-o întreprindere producătoare de motoare electrice, respectiv de periferice de calculatoare, cît și a unor transmisii mecanice pentru automobile în Elveția.

Ultimul capitol se referă la „Discuția asupra flexibilității în asamblare" și conține patru articole. Două dintre ele, ambele scrise de autori din Marea Britanie se referă la dezvoltări posibile în viitor în robotica în general și în asamblarea automată flexibilă în particular.

Un articol publicat de un cercetător de la concernul ASEA din Suedia tratează corelațiile dintre profitabilitate și flexibilitate la asamblarea automată, iar altul explică necesitatea flexibilității procesului de asamblare a cablajelor.

Din capitolul de lucrări întîrziate merită să fie menționat și articolul lui C. Brand de la firma Mikro din Elveția care tratează problema îmbunătățirii calității produselor prin automatizarea asamblării.

Articolele sînt semnate de un număr de 75 autori, dintre care 14 din S.U.A. și 2 din Japonia. Nu s-a publicat nici un articol provenind din țările socialiste.

Cartea se adresează specialiștilor care lucrează în domeniul roboticii industriale.

F. Kovács

ROBERT M. GRAY, *Probability, Random Processes and Ergodic Properties* (Probabilitate, procese cu timp discret și proprietăți ergodice), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 295 p.

Cartea este scrisă, în mod declarat, pentru cititori cu înclinație matematică, dar de formație inginerească, adică avînd în vedere dublul scop de a înlocui un curs complet de teoria măsurii și teoria probabilităților și de a asigura o bază matematică suficientă pentru o clasă mare de probleme puse de aplicațiile tehnice ale teoriei informației.

Se studiază procese cu timp discret.

Cartea are următoarele capitole : 1. Probabilități și procese aleatorii ; 2. Alfabete standard ; 3. Spații Borel și alfabete poloneze ; 4. Medii ; 5. Probabilități condiționate ; 6. Proprietăți ergodice ; 7. Teoreme ergodice ; 8. Spații de măsuri și descompunerea ergodică.

Conceptul de spații standard (spații măsurabile care posedă o bază) este dezvoltat ca instrument de lucru deoarece acesta se dovedește un cadru suficient de larg pentru aplicații, pe de o parte (incluzînd modele pentru procese digitale și multe spații funcționale care intervin în aplicații), și, pe de altă parte, structura lor asigură eixistența unor proprietăți importante care nu sînt valabile pentru procese aleatoare oarecare (descompunerea ergodică, existența probabilităților condiționate regulate).

Autorul a ieșit din cadrul obișnuit și prin dezvoltarea teoriei proceselor staționare în medie asimptotică, drept instrument mai adecvat pentru modelarea proceselor fizice (care, în fapt, nu

sînt staționare). Proprietățile ergodice și staționaritatea se studiază în interrelațiile lor, în caz mai general cînd avem de-a face cu vectori staționari sau ergodici, în loc de scalari.

În sfîrșit, în ultimul capitol, sînt elaborate măsuri pentru evaluarea „distanței" între procesele aleatoare ; ele sînt necesare pentru a demonstra descompunerea ergodică a unor funcționale de procese aleatoare.

Așa cum menționează și autorul, sînt absente capitole referitoare la teoria spectrală, sau procese Graussiene, dar aceste subiecte au fost omise cu bună știință. Cartea a fost scrisă cu scopul de a pregăti baza pentru un alt volum de teoria informației și teoria ergodică.

Stilul este clar și concis ; totuși lectura nu este ușoară. Cartea conține teoremele fundamentale din teoria măsurii și teoria proceselor stohastice, iar din partea cititorului se presupune o bază solidă de analiză matematică. Cartea reprezintă, fără îndoială, încă un pas pe calea transformării capitolelor de matematică în ustensile la îndemîna inginerilor.

F. Buzuloiu

J. ARGYRIS, H. P. MLEJNEK, *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik*, Band III : *Einführung in die Dynamik* (Metoda elementelor finite în mecanica elementară a structurilor, vol. III : Introducere în dinamică), Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1988, 973 p., 482 fig. 8 p. în culori.

Volumul de față, al treilea, încheie monumentala lucrare dedicată teoriei și practicii metodei elementelor finite în mecanica elementară a structurilor. Primele două volume (de 862, respectiv 624 pagini) tratează probleme de statică liniară cu metoda deplasărilor, metoda eforturilor și cu cea mixtă cît și unele probleme neliniare. Dinamica structurilor — ce face obiectul prezentului volum — reprezintă unul din cele mai interesante domenii ale ingineriei, fizicii tehnice și matematicii aplicate. Problemele ei complexe nu pot fi rezolvate fără o cunoaștere aprofundată a bazelor fizico-tehnice și fără o formulare adecvată utilizării calculatorului electronic. Acest lucru a stat în atenția celor doi autori : renumitul profesor J. Argyris (Imperial College London și Universität Stuttgart) și H. P. Mlejnek (Universität Stuttgart). Formularea matriceală a problemelor de mecanica structurilor în anii 50 de către profesorul J. Argyris a deschis de fapt calea utilizării calculatorului electronic în acest domeniu și a facilitat apariția metodei elementelor finite (MEF).

Dintre cele 13 capitole ale volumului al III-lea primele trei (cap. 14...16, cu 73 pagini) cuprind noțiunile de bază. Studiul problemelor liniare prin analiză modală face obiectul a șase capitole (cap. 17...22, cu 261 pagini), iar integrarea directă a ecuațiilor de mișcare și tratarea problemelor neliniare are loc în două capitole (cap. 23 și 24, cu 219 pagini). Ultimele două capitole (cap. 25 și 26, cu 378 pagini) tratează probleme speciale : haosul și aeroelasticitatea.

Capitolul al 14-lea se referă la vibrațiile libere și forțate ale sistemelor elastice reduse la un singur grad de libertate. Toate formulările corespund însă MEF, ce facilitează trecerea la sisteme cu mai multe grade de libertate. Extinderea principiului deplasărilor virtuale de la statică la dinamică și discretizarea sistemelor continue este obiectul capitolului al 15-lea. Limitarea la acest principiu reflectă opțiunea autorilor de a trata dinamica doar în metoda deplasărilor. Forțele de inerție și matricele maselor — consistente și diagonale — sînt discutate în capitolul al 16-lea, cu exemplificări pentru elemente de bară, de grindă, de membrană și de volum.

În centrul capitolului al 17-lea, „Vibrațiile proprii ale sistemelor neamortizate", se află calculul valorilor și vectorilor proprii ai perechilor de matrice (ale rigidităților și maselor), cuprinzînd și cazurile speciale singulare caracteristice sistemelor nelegate (avioane, rachete, sateliți). Se insistă asupra iterației vectoriale clasice și simultane, asupra metodei Jacobi, metodei Givens/Householder cît și asupra metodei Lanczos. Aspecte importante tratate sînt reducerea la probleme de mărime economică și utilizarea simetriei. Capitolul al 18-lea se referă la vibrațiile libere ale sistemelor neamortizate, inițiate de deplasări și viteze de start. Vibrațiile forțate ale sistemelor neamortizate sînt discutate în capitolul al 19-lea, cu luarea în considerare a unor forțe periodice, neperiodice și oarecare. Studiul amortizării vîscoase — modală și generală, coulombiene, structurale și negative este prezentat în capitolul al 20-lea. Se acordă o atenție deosebită amortizării modale, a cărei adoptare permite importante simplificări de calcul. Toate acțiunile asupra sistemelor dinamice discutate în capitolele anterioare au fost considerate de natură deterministă ; capitolul al 21-lea se ocupă de tratarea probabilistă a sistemelor cu unul și mai multe grade de libertate, în condițiile amortizării modale. Această abordare permite o descriere mai adecvată a fenomenelor reale. Problemei dificile a structurilor cu amortizare vîscoasă nemodală, generală,

îi este consacrat capitolul 22. În aceste condiții problema de valori proprii are caracteristici aparte, putînd fi rezolvată prin iterație vectorială sau prin procedeul Eberlein.

În capitolul al 23-lea, ce cuprinde rezolvarea problemelor de dinamică prin integrare în timp, se descriu o serie de algoritmi începînd cu variantele Newmark pînă la algoritmi hermitici-condiționat sau necondiționat stabili-dezvoltați în cadrul Universității Stuttgart. Se prezintă exemplificări pentru elemente simple, un pod și un sistem de conducte. Capitolul al 24-lea cuprinde domeniul complex al dinamicii neliniare, utilizînd ca primă ilustrare ecuația diferențială a lui Duffing ce pune în evidență fenomene neobișnuite ce duc pînă la haosul discutat în capitolul al 25-lea. Pe lîngă procedeele semianalitice, capitolul cuprinde multe procedee numerice de integrare în timp a ecuațiilor vibrațiilor neliniare și de propagare a undelor în corpuri solide. Se discută stabilitatea și convergența acestor procedee, cît și încărcările ce depind de deplasări și viteze — făcînd astfel legătura cu capitolul al 26-lea. Exemplele de calcul se referă la studiul unor corzi, rețele plane și spațiale pretensionate, al unor antene, respectiv al unor explozii. Foarte interesantă este și analiza matematică a fenomenului „crash" pentru automobile, în bună concordanță cu încercări costisitoare.

Pentru redactarea ultimelor două capitole cu caracter special, prof. J. Argyris a găsit colaboratori entuziaști: G. Faust și M. Haase, respectiv J. Bühlmeier și K. Braun. Introducerea — pentru prima dată într-o carte de dinamică — a unui capitol despre haos este justificată de aprecierea că în natură comportarea haotică reprezintă regula, cea ordonată constituind excepția fericită. Inginerii sînt obligați să ferească sistemele tehnice de comportări haotice și chiar catastrofale. Capitolul al 25-lea reprezintă un „abecedar" al haosului într-o prezentare inginerească mai accesibilă decît teoria matematică a sistemelor dinamice. Teoria haosului se ocupă de mișcările neregulate derivînd din ecuații de mișcare deterministe, mișcările haotice pe baza unor cauze aleatoare aparținînd unui „superhaos". Principalele noțiuni prezentate sînt atractorul straniu, reprezentarea Poincaré, autoasemănarea, varietatea, cauzalitatea slabă, teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), exponentul Liapunov, entropia Kolmogorov și fractalii. Spre deosebire de atractorii obișnuiți, cei stranii se caracterizează printr-o mare varietate de forme, traiectorii haotice foarte sensibile la modificări mici ale condițiilor inițiale, volum zero și autoasemănare (invarianță față de modificarea scării). Dimensiunile lor fiind fracționare poartă denumirea de fractali, propusă de B. Mandelbrot. Cîteva planșe colorate ilustrează lumea fractală în reprezentări „zoom", atractorul Lorenz și ramificația Hopf. Ultimul capitol al cărții, cel mai voluminos, este dedicat aeroelasticității. Fenomenul filfîirii (flutter), al interacțiunii forțelor neconservative ale aerului cu o structură elastică, este tratat din perspectiva inginerului de structuri. Cunoașterea acestei probleme specifice aeronauticii este importantă însă și pentru inginerii din alte specialități: construcții navale și construcții — putînd explica spre exemplu distrugerea unor poduri suspendate și a unor turnuri de răcire hiperbolice. Capitolul se încheie cu cercetări aeroelastice efectuate la Stuttgard: turbine eoliene, acoperișuri pneumatice și aripi delta în curenți supersonici.

Prezenta carte de dinamică se remarcă printr-o tratare clară și intuitivă a materiei, cu referiri comparative frecvente la domeniul staticii. Se bazează pe experiența și pe cercetările autorilor, prof. J. Argyris activînd de peste 35 de ani în domeniu, cît și pe o bibliografie vastă. Este deosebit de utilă inginerilor din aeronautică, construcții și construcții de mașini cît și studenților în aceste specialități. Aspectul grafic excelent, asigurat de prestigioasa editură Vieweg, contribuie la sporirea atractivității acestei cărți unice prin conținut și prezentare.

R. Friedrich

M. LAWO, *Optimierung im Konstruktiven Ingenieurbau* (Optimizări în ingineria structurilor), Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987, 230 pag., 83 fig., 157 ref. bibl.

Optimizarea structurilor constituie o preocupare veche a cercetătorilor și proiectanților de specialitate. Într-o primă etapă s-au studiat elemente structurale simple, fără a influența însă semnificativ practica de proiectare. A urmat formularea unor probleme mai generale de optimizare a elementelor și structurilor și rezolvarea lor cu ajutorul analizei matematice și a calculului variațional. Actuala — cea de a treia — etapă este caracterizată de utilizarea calculatoarelor numerice și a programării matematice. Structurile complexe, fără tradiții constructive, constituie atît motivarea, cît și rezultatul optimizării.

Scopul optimizării poate fi minimizarea greutății structurilor și/sau a costului lor; alegerea funcției cost este complexă depinzînd de o varietate mare de parametri. Pe lîngă optimizarea de ansamblu este importantă și cea de detaliu ce se referă spre exemplu la alegerea sec-

țiunilor transversale, a traseului armăturilor pretensionate și a formei structurilor din plăci curbe respectiv suspendate.

Cartea este împărțită în nouă capitole. Primul capitol cuprinde noțiuni introductive, precizîndu-se că minimizarea volumului sau a greutății nu implică în mod necesar minimizarea costului structurii. Lucrarea de față se abate de la optimizarea tradițională caracteristică mai ales aeronauticii și pune accentul pe procedeele de automatizare a reluării calculului eforturilor și a dimensionării, interpretînd proiectarea ca o problemă de optimizare. Funcția scop este reprezentată prin „soluția acceptabilă", variabilele prin parametrii modelului de calcul și restricțiile prin relațiile de dimensionare.

Capitolul al 2-lea se ocupă de problemele clasice de optimizare a structurilor inginerești, exemplificările făcîndu-se pe un element de bară. Urmează prezentarea programării liniare în capitolul al 3-lea, cu toate că puține probleme de structuri pot fi formulate în acest mod. Ca aplicații se tratează determinarea eforturilor în teoria plastică și optimizarea traseului armăturilor pretensionate.

Optimizarea neliniară sau programarea matematică face obiectul capitolului al 4-lea, prezentîndu-se unele procedee pentru rezolvarea problemelor fără și cu restricții. Cum multe mărimi pot lua doar valori discrete, capitolul al 5-lea se referă la optimizarea în numere întregi.

Capitolul al 6-lea tratează dimensionarea și optimizarea secțiunilor transversale : încovoierea oblică cu forță axială a secțiunilor din beton armat, stîlpii și grinzile metalice cît și secțiunile compuse oțel-beton, în concordanță cu normele DIN — cu exemple practice. În încheiere se discută optimizarea în două trepte ce conduce la soluții suboptime. Ca rezultat al dimensionării se pot modifica rigiditățile elementelor structurale, lucru de care trebuie să se țină seama la reluarea calculului eforturilor : Analiza sensibilității se referă la funcția scop sau la o variabilă de stare în condițiile modificării unui parametru. Calculul gradientului constituie analiza sensibilității funcției scop și a restricțiilor la modificarea tuturor variabilelor problemei și este necesar în unele procedee de programare matematică. Toate aceste probleme sînt prezentate în capitolul al 7-lea.

Capitolul al 8-lea tratează procesul de determinare a eforturilor, dimensionare și optimizare în construcții ca un tot unitar. Se exemplifică diferiți algoritmi pentru structuri în cadre din oțel respectiv din beton armat cît și optimizarea structurilor sub acțiuni dinamice. În programele de optimizare prezentate eforturile sînt calculate cu metoda elementelor finite. Capitolul al 9-lea demonstrează — pe trei probleme speciale — posibilitățile generale ale programării matematice.

În concluzie, prezenta carte se ocupă în principal de programarea matematică aplicată la o serie de probleme de optimizare a structurilor de construcții, punîndu-se accent pe legarea dimensionării conform normelor DIN cu determinarea eforturilor în metoda elementelor finite. Prin evidențierea legăturii cu procedeele analitice clasice ale calculului variațional și cu structurile de egală rezistență se obține o privire de ansamblu asupra domeniului investigat. Algoritmii de dimensionare prezentați pot fi adaptați ușor normelor noastre de calcul. Prin actualitatea subiectului tratat, modul clar de prezentare și numărul mare de exemple practice, cartea dr. ing. Michael Lawo este de un real folos tuturor inginerilor ce se ocupă de proiectarea structurilor.

R. Friedrich

Y. BAȘAR, W. B. KRÄTZIG, *Mechanik der Flächentragwerke. Theorie, Berechnungsmethoden, Anwendungsbeispiele* (Mecanica structurilor din suprafețe. Teorie, metode de calcul, exemple de aplicare), Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985, 654 pag., 147 fig., 83 tab., 741 ref. bibl.

Mecanica structurilor din plăci subțiri se ocupă de studiul suprafețelor cu grosimi reduse, ce pot fi idealizate bidimensional. Autorii pornesc de la ideea că scrierea tensorială constituie un limbaj matematic natural al spațiilor riemaniene, de care aparțin suprafețele mediane ale plăcilor curbe și plane. Această scriere permite o prezentare unitară, compactă și clară a teoriei liniare și — mai ales — a celei neliniare pentru aceste structuri. Algoritmii formulați tensorial pot fi ușor transpuși în programe de calcul, scopul cărții fiind tratarea teoriei, a metodelor de calcul cît și a unor modele caracteristice de comportare.

Primul capitol al cărții cuprinde bazele matematice : algebra tensorială a spațiilor bidimensionale — cu indicarea posibilității de generalizare la spații tridimensionale, studiul metricii și curburii suprafețelor și analiza tensorială pe suprafețe oarecare. Urmează diferite probleme importante pentru teoria structurilor din plăci — prezentate tabelar, foarte bine sistema-

tizat — și tablouri privind transpunerea reprezentării tensoriale în cea a geometriei diferențiale clasice, respectiv cu formulele de bază ale capitolului.

O scurtă introducere în calculul variațional face obiectul capitolului al doilea. După precizarea noțiunilor de bază și a regulilor de calcul pentru simbolul variațional se deduc ecuațiile lui Euler și condițiile de margine naturale pentru unele probleme variaționale tipice, de echilibru. Se prezintă de asemenea noțiunile necesare tratării problemelor de stabilitate.

Capitolul al treilea se ocupă de ecuațiile de bază ale unei teorii liniare a structurilor elastice. Se prezintă detaliat variabilele, ecuațiile de cîmp și condițiile de margine ale teoriei de încovoiere a plăcilor curbe. Luarea în considerare a lunecărilor transversale conduce la ecuații neafectate de defectele teoriei bazate pe ipoteza normalei a lui Kirchhoff-Love.

Trecerea la această teorie a normalei are loc în capitolul al patrulea. Se discută erorile de aproximare, variantele de formulare a teoriilor liniare și se dă o privire de ansamblu asupra multitudinii formulărilor consistente. Urmează cazurile limită clasice — teoria plăcilor plane, teoria de membrană, teoria plăcilor pleoștite și teoria perturbărilor marginale. Capitolul se încheie cu tratarea secțiunilor anizotrope și neomogene.

Capitolul al cincilea se ocupă de teoria de membrană, ce descrie comportarea cea mai avantajoasă a plăcilor curbe. Relațiile de bază sînt date inițial în coordonate curbilinii generale și apoi particularizate pentru plăci cilindrice și plăci sferice. Utilizînd coordonate plane și o funcție de tensiuni, echilibrul membranei se descrie printr-o singură ecuație diferențială ce se integrează pentru plăci curbe de diferite forme. Pe exemplul plăcilor de rotație oarecare se discută proprietățile de bază ale ecuațiilor teoriei de membrană cît și procedeul caracteristicilor.

Teoria liniară de încovoiere a plăcilor curbe face obiectul capitolului șase. Sînt tratate plăcile pleoștite și plăcile de rotație cilindrice și oarecare. Accentul este pus pe înglobarea acestor teme clasice în conceptul general al teoriei tensoriale a plăcilor curbe. Pe lîngă rezolvările clasice se dau exemple ce ilustrează comportarea unor plăci pentru diferite tipuri de structuri.

Utilizînd metode variaționale, ecuațiile de bază tratate în capitolele trei și patru se transformă în capitolul șapte în principii variaționale echivalente, ce servesc la fundamentarea metodei elementelor finite și a metodei diferențelor finite. O serie de exemple de calcul demonstrează eficiența acestor metode numerice în studiul structurilor din suprafețe subțiri.

Capitolul al optulea se ocupă de teoria geometric și fizic neliniară a plăcilor curbe. După studiul temodinamicii deformațiilor structurilor din plăci se abordează plăcile elastico-plastice cît și teoriile geometric neliniare. Se pune accent pe plăcile hiperelastice supuse unor deplasări mari și rotiri moderate. Teoriile neliniare se liniarizează apoi în ecuațiile de bază incrementale ale problemelor de stabilitate.

Cartea prezentată în cele de mai sus are la bază cercetările și sistematizările remarcabile ale celor doi autori, profesori ce au predat și predau în R.F.G., S.U.A. și Turcia. Lucrarea se referă la toate problemele importante ale teoriei structurilor din suprafețe subțiri și reflectă stadiul actual al acesteia — urmărind și dezvoltarea ei istorică cu diferitele aproximări, simplificări și căutări — astfel încît poate fi considerată indispensabilă cercetătorilor din domeniu. Studiul ei poate fi recomandat și inginerilor ce se ocupă de aspectele teoretice cît și celor interesați în aplicațiile practice ale structurilor din plăci. Bibliografia pe capitole cuprinde printre lucrările valoroase apărute pe plan mondial și principalele cărți ale specialiștilor români. Prezentarea grafică a cărții este excelentă.

R. Friedrich

K. Z. HORVÁTH, *The Selection of Load-Bearing Structures for Buildings* (Alegerea structurii de rezistență a clădirilor), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986, 380 p., 196 fig., 19 tabele.

Literatura de specialitate cuprinde multe lucrări privind teoria de calcul a structurilor și puține referitoare la practica de proiectare a acestora. Prezenta carte, care își propune să reducă acest decalaj în folosul proiectanților structurilor de rezistență, este împărțită în două părți: Prima (121 pagini) sistematizează structurile de rezistență, iar cea de a doua (231 pagini) se ocupă de alegerea acestora și de exemple practice de proiectare.

Primul capitol al primei părți discută o clasificare a structurilor în funcție de comportarea lor sub acțiunile mediului. Structurile de bază sînt prezentate sub o formă tabelară — cu coloane pentru cele trei solicitări fundamentale: compresiunea, încovoierea și întinderea și linii pentru cele trei variante geometrice: liniară, de suprafață și spațială. Acestor caracteristici fundamentale li se asociază atît pe coloane, cît și pe linii alte particularități, marea varietate de soluții puse astfel în evidență fiind individualizată prin definiții, simboluri și coduri numerice. Urmează

analiza acestor structuri primare, cît și definirea unor structuri compuse. Foarte interesantă este compararea structurilor de rezistență în funcție de eforturile caracteristice, de spațialitate și de posibilitatea execuției industrializate. Se pune în evidență frecvența de utilizare a diferitelor tipuri de structuri și alegerea materialului din care se execută. Se apreciază că structurile din oțel și lemn au aproximativ aceeași greutate, cele din beton armat sînt de 2—6 ori mai grele. În condițiile din Ungaria, dacă se ia drept bază costul structurilor din beton armat, cel al structurilor metalice este de 1,5 ori mai mare, iar cel al structurilor de lemn — de 1,7 ori. Capitolul al doilea tratează integrarea structurilor în construcțiile de clădiri, referindu-se la poziția acestora, ierarhizarea lor și realizarea legăturii între ele, iar capitolul al treilea se ocupă de cerințele pe care trebuie să le satisfacă structurile de rezistență.

Partea a doua debutează cu un capitol consacrat problemei dificile a alegerii structurii de rezistență, distingîndu-se 10 faze în acest proces. Se fac exemplificări pentru o casă familială și pentru clădiri industriale. Proiectarea structurii de rezistență și efectul ei retroactiv asupra alegerii structurii fac obiectul capitolului al doilea. Problema este tratată sub mai multe aspecte : static, arhitectural și tehnologic. În încheiere sînt discutate cele mai frecvente greșeli de calcul și de proiectare. Capitolul al treilea tratează fazele procesului de proiectare : tema de proiectare, proiectul tehnic și detaliile de execuție. Procesul este exemplificat pentru 10 construcții : de locuit, sociale, administrative, industriale și agricole. Analiza structurilor de rezistență a altor 11 construcții dintre cele mai diferite, realizate în Ungaria, face obiectul capitolului al patrulea. Cartea se încheie cu un sumar, concluzii, lista bibliografică și lista autorilor construcțiilor prezentate.

Expunerea se bazează în mare parte pe experiența autorului și a atelierului de proiectare pe care îl conduce la Budapesta. Cartea reușește să pună în evidență, cu multe exemple concrete, cerințele specifice fiecărei etape a procesului de proiectare a structurilor de rezistență. Studierea ei atentă permite inginerilor tineri, cu bune cunoștințe de mecanica construcțiilor, scurtarea apreciabilă a timpului necesar însușirii tehnicii de alegere a celor mai adecvate structuri de rezistență pentru construcțiile de proiectat. În același timp ușurează proiectanților cu experiență analiza mai multor variante constructive. Prezentarea ei grafică, desenele și reproducerile fotografice sînt de foarte bună calitate.

R. Friedrich

K. KARSAI, D. KERENYI, L. KISS, *Large Power Transformers* (Transformatoare de mare putere), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987, 615 p.

În lucrare sînt prezentate problemele aferente proiectării, construcției și perfecționării transformatoarelor electrice de mare putere, privite prin prisma celor mai recente cunoștințe. Cartea este scrisă de trei autori, unul de la Institutul de Cercetări pentru Energia Electrică iar ceilalți doi din producție, de la firma Ganz ; prezentarea problemelor este curentă, în mod distinct pe autori : K. Karsai tratează problemele de la bazele fizice ale funcționării transformatoarelor electrice, miezul feromagnetic și înfășurările, D. Kerenyi pe cele ale pierderilor cauzate de cîmpurile de dispersie în părțile constructive, problemele legate de izolația transformatorului, inclusiv undele de supratensiune, iar L. Kiss pe cele corespunzătoare încălzirii transformatorului electric și construcția lui.

Sînt date bazele fizice ale funcționării transformatorului electric, cu ecuațiile dintre curenți, fluxuri și tensiuni, circuitele echivalente, problemele legate de miezul feromagnetic, avîndu-se în vedere materialele din care se execută, influența lor asupra curentului de excitație și pierderilor la diferitele forme constructive.

O atenție deosebită este acordată influenței formei miezului și conexiunii înfășurărilor asupra proprietăților electromagnetice și termice, calculînd pierderile, parametrii electrici, căderile de tensiune, curenții de șoc la scurtcircuit cu efectele termice și dinamice aferente.

Se tratează apoi problema pierderilor cauzate de cîmpul magnetic de dispersie în părțile constructive ale transformatorului electric, mai întîi printr-un calcul aproximativ și apoi printr-o metodă analitică bidimensională, urmată de una tridimensională. Este abordată problema izolației transformatorului electric, cu supratensiunile care pot să apară, staționare și mobile, analizarea lor în diferite situații și materiale cu care se realizează izolația, proiectarea și încercarea ei.

O a doua problemă abordată, hotărîtoare pentru siguranța în funcționare a unui transformator electric, este cea a încălzirii și răcirii, avîndu-se în vedere toți factorii care intervin cu aspectele și influențele lor.

Ultima parte se referă la părțile constructive ale transformatorului : structurile de strîngere a tolelor, a ansamblului jugului, consolidarea înfășurării, cuva și capacul avînd în vedere gabaritul căilor ferate pentru Europa centrală, conservatorul de ulei, bornele, echipamentul de răcire și zgomotului produs.

Cartea este scrisă la un nivel ridicat, însă utilizabil în practică. Toate capitolele cuprind numeroase exemple numerice care ușurează utilizarea celor expuse, la calculul de proiectare și la determinarea prin calcul a solicitărilor mecanice, electrice și termice.

Expunerea este convingătoare, multe din curbele determinate pe cale de calcul fiind însoțite de curbe determinate pe cale experimentală, cu indicații bibliografice, cu scheme pentru încercări experimentale ceea ce scoate în evidență că autorii au la bază o practică temeinică și cunoștințe de înalt nivel în specialitate.

Cartea realizează o foarte bună sinteză a cunoștințelor tipice transformatoarelor de mare putere, ținînd seama de cele mai noi rezultate în această direcție și prin aceasta umple un gol care a existat, ceea ce asigură valoarea utilitară a lucrării.

T. Dordea

WILHELM KECS, *Elasticitate și viscoelasticitate*, București, Edit. Tehnică, 1986, 488 p.

Lucrarea conține o expunere sistematică și de înaltă ținută academică, a teoremelor și modelelor matematice ale solidelor deformabile liniar-elastice.

În vederea ordonării cît mai logice a materialului, acesta a fost divizat în patru mari capitole.

Capitolul I, „Calculul tensorial" conține o scurtă introducere, urmată de un paragraf dedicat spațiilor vectoriale, funcțiilor liniare, biliniare și multiliniare, precum și tensorilor. Se prezintă, de asemenea, unele elemente de algebră tensorială și se efectuează analiza tensorilor de ordinul al doilea și a cîmpurilor tensoriale.

În capitolul al doilea „Ecuațiile generale ale mecanicii mediului deformabil", se dezvoltă principiul conservării masei și ecuația de continuitate, punîndu-se în evidență rolul pe care-l joacă în acest cadru, principiile impulsului și momentului cinetic.

În capitolul al III-lea, „Teoria elasticității liniare", autorul abordează problema modelului solidului liniar-elastic, cît și a ecuațiilor elastodinamicii, dîndu-se și teorema de unicitate pentru problemele la limită formulate. Aspectele aplicative ale teoriei expuse sînt evidențiate pentru cazul tubului cu pereți groși și discului în mișcare de rotație cu axă fixă și, respectiv, pentru torsiunea barelor cilindrice.

În capitolul al IV-lea, „Teoria viscoelasticității liniare", utilizîndu-se metoda axiomatică, se dau proprietățile definitorii ale solidelor liniar-vîscoase, și se exprimă legea constitutivă a modelului, cu ajutorul produsului de convoluție.

Prin metoda și claritatea expunerii materialului elaborat, precum și prin amploarea problemelor tratate, lucrarea se poate caracteriza ca deosebit de valoroasă și de mare utilitate, atît prin conținut, cît și prin forma de prezentare.

P. Sima

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 47 1988

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ALBULESCU, M.; v. STAN, AL. D.	1	37
ATANASIU, V., v. GAFIȚANU, M.	4	399
BARA, M. V., v. HANDRA-LUCA, V.	2	175
BENA, D., Asupra problemei Helmholtz pentru domenii vecine	2	131
BENA, D., Mișcări cu circulație ale fluidelor compresibile în jurul unui profil cu punct angulos	4	331
BOB, C., Asupra calculului structurilor în formulare probabilistă cu metoda elementelor finite	3	243
BOLOGA, O., Cinetica distrugerilor cavitaționale pe tribomodele de cavitație cu jet lichid de impact	3	267
BRATU, P., Dinamica ciurului vibrator bimasic cu funcționare în rezonanță	6	593
BRÎNDEU, L., DRĂGULESCU, DOINA, Considerații privind evaluarea reducerii prin vibrații a tensiunilor remanente	4	317
BUZDUGAN, GH., O definiție unitară a coeficienților de siguranță în calculul de rezistență al pieselor de mașini	5	411
CARABINEANU, A., Aplicarea metodei transformărilor conforme în teoria aripii subtiri	1	25
CAZACU, M. D., POPOVICI, MONICA FELICIA, TESTIBAN, MIHAELA, Cercetări teoretice privind etanșările mecanice frontale	3	195
COMAN, CRISTINA, v. POSEA, N.	1	17
CONSTANTINESCU, GH., v. POPESCU, M.	1	3
CONSTANTINESCU, GH., v. JELEV, I.	2	149
CONSTANTINESCU, V. N., Asupra condițiilor de intrare în filmele de lubrifiant la numere Reynolds mari	4	369
CREȚU, O. S., Tracțiunea elastohidrodinamică în angranaje cilindrice evolventice	3	359
DEMIAN, T., NIȚU, C., Influența frecării dintre ace și ghidaje asupra funcționării capetelor de imprimare matriceale balistice	4	385
DIACONESCU, E. N., Efectul timpului de tranzit asupra vîscozității efective în contacte EHD	3	225
DRĂGULESCU, DOINA, v. BRÎNDEU, L.	4	317
DUBINĂ, D., v. PACOSTE, C.	5	457
DUMBRAVĂ, M. A., Principii moderne de optimizare în calculul lagărelor cu alunecare	4	393
DUMITRACHE, AL., v. DUMITRESCU, H.	6	531
DUMITRESCU, H., STELIAN, I., DUMITRACHE, AL., Soluții similare pentru o curgere de tip Coandă	6	531
ENE, C., v. POPOVICI, AL.	1	29
ENE, GH. I., PASAT, GH. D., Determinarea puterii necesare acționării amestecătoarelor pentru materiale pulverulente și granulare, cu dispozitive mecanice de amestecare	1	69

ENE, GH. I., Aspecte privid calculul funcțional al amestecătoarelor cu tambur rotativ, cu funcționare discontinuă 5 503
EPARU, I., v. POSEA N. 1 17
ERHAN, M., v. SETEANU, I. 4 325
ERHAN, M., v. SETEANU, I. 5 515
FILIPESCU, C., v. POTERAȘU, V. F. 5 429
FÜLÖP, E., Curgerea nepermanentă prin filtre cu disipare viscoasă a energiei și transfer de căldură 3 205
GAFIȚANU, M., ATANASIU, V., Aspecte teoretice și experimentale ale durabilității roților dințate cilindrice 4 399
GHINDA, T., v. POPESCU, M. 1 3
GIURGIUȚEANU, N., v. PESCĂRUȘ, C. 6 545
GOGONEA, S., Asupra problemei tridimensionale a mișcării fluidelor în medii poroase armonic neomogene în prezența unei cavități 2 95
HALANAY, A., v. POPESCU, M. 1 3
HANDRA-LUCA, V., BARA, M. V., Reductor de turație frontal cu bile 2 175
IEREMIA, M., Voalarea elasto-plastică a plăcilor ortotrope 6 585
IONESCU, F., POPESCU, M., Asupra folosirii modelelor numerice pentru studiul mișcării nepermanente a apei în riuri și canale 2 103
IORDACHE, D., v. SOARE, M. V. 4 345
JELEV, I., CONSTANTINESCU, GH., Mișcarea permanentă și nepermanentă a apei în rețelele de conducte sub presiune ale sistemului de irigație Kirkuk-Adhaim (Irak) 2 149
MARCOV, N., Aplicarea metodei Imai-Lamla-Iacob la studiul unor mișcări subsonice potențiale 2 115
MIHALACHE, N., v. POTERAȘU, V. F. 5 429
MINOIU, ȘT., v. POSEA, N. 1 17
MORARIU, Z., PAVELESCU, D., Problema termică la grupurile de etanșare cu inele de alunecare de grosime mare 3 377
MUȘAT, S. D., Legături cinematice între deplasări în metoda elementelor finite 5 479
NIȚĂ, M. M., STROE, I., Asupra stabilității mișcării satelitului ecuatorial considerat solid rigid 5 417
NIȚU, C., v. DEMIAN, T. 4 385
ODOUSOTE, A., v. STAN, AL. D. 5 487
ONU, G., Echivalențe în calculul suprastructurilor de pod 1 47
PACOSTE, C., DUBINĂ, D., Strategii privind realizarea programelor de analiză neliniară 5 457
PASAT, GH. D., v. ENE, GH. I. 1 69
PASAT, GH. D., Dispozitive mecanice de amestecare. Încărcarea hidrodinamică a turbinei cu pale (standard) și a arborelui dispozitivului de amestecare. I. 5 493
PASAT, GH. D., Dispozitive mecanice de amestecare. Încărcarea hidrodinamică a turbinei cu pale (standard) și a arborelui dispozitivului de amestecare. II 6 577
PASCOVICI, M. D., RĂDULESCU, AL. O., Portanța lagărelor radiale înguste lubrifiate cu unsori consistente 3 215
PAVELESCU, D., v. MORARIU, Z. 4 377
PAVELESCU, D., v. RAȘEEV, M. 3 231
PECULEA, M., STOICA, C., Hidrodinamica etanșării cu film lichid și pompare dinamică 2 137
PESCĂRUȘ, C., GIURGIUȚEANU, N., Influența variației vîscozității cu temperatura asupra mișcării unui fluid viscos într-un mediu poros 6 545
PETCU, V., v. SOARE, M. V. 2 169
POPESCU, M., HALANY, A., CONSTANTINESCU, GH., GHINDA, T., Studiul rezonanței pentru stații de pompare echiapate cu dublu sistem de protecție la șoc hidraulic 1 3
POPESCU, M., v. IONESCU, F. 2 103
POPOVICI, AL., ENE, C., Cinematica unităților de pompare hidraulice utilizate în extracția petrolului 1 29
POPOVICI, MONICA FELICIA, v. CAZACU, M. D. 3 195
POSEA, N., COMAN, CRISTINA, MINOIU, ȘT., EPARU, I., Asupra rezistenței, vibrațiilor și stabilității masturilor de tip „U” 1 17

POTERAȘU, V. F., MIHALACHE, N., FILIPESCU, C., Tensiuni și deplasări în elementele plane elastice cu metoda elementelor finite. II. Analiza dinamică 5 429
RAȘEEV, M., PAVELESCU, D., O soluție a problemei EHD pentru un contact evolventic și determinarea stării de eforturi din flanc 3 231
RĂDULESCU, AL. O., v. PASCOVICI, M. D. 3 215
SETEANU, I., ERHAN, M., Aplicarea metodei elementelor finite la studiul curgerii turbionare a fluidului perfect 4 325
SETEANU, I., ERHAN, M., Regimul nepermanent de exploatare a instalației de stingere a grupurilor hidroenergetice 5 515
SILAȘ, GH., SMICALĂ, I., Studiul sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate 4 297
SIMION, F. P., SIMION, GABRIELA, Cercetări asupra vibrațiilor mașinilor-unelte 3 257
SIMION, GABRIELA, v. SIMION, F. P. 3 257
SMICALĂ, I., v. SILAȘ, GH. 4 297
SOARE, M. V., Asupra un probleme neliniare de rezistența materialelor 1 17
SOARE, M. V., PETCU, V., Studiul plăcilor dreptunghiulare cu o linie de articulație intermediară 2 169
SOARE, M. V., IORDACHE, D., Contribuții la calculul numeric al plăcilor subțiri cilindrice de grosime variabilă 4 345
SOARE, M. V., TOADER, I. H., Contribuții la studiul structurilor spațiale reticulate în triplu strat 6 605
STAN, AL. D., ALBULESCU, M., Criterii pentru corecția debitului de gaze determinat prin metoda orificiului în prezența apei 1 37
STAN, AL. D., STOICESCU, MARIA, ODOUSOTE, A., Filtrarea neliniară a gazelor prin mediile poroase 5 487
STAN, AL. D., Acumularea gazelor și tirajul lor către imobile 6 565
STELIAN, I., v. DUMITRESCU, H. 6 531
STOICA, C., v. PECULEA, M. 2 137
STOICESCU, MARIA, v. STAN, AL. D. 5 487
STROE, I., v. NIȚĂ, M. M. 5 487
TESTIBAN, MIHAELA, v. CAZACU, M. D. 3 195
TOADER, I. H., v. SOARE, M. V. 6 605
TUDOR, A., Influența particulelor abrazive asupra intensității de uzare a articulațiilor 3 275
UNGUREANU-DAVID, ELENA, O problemă de mișcare cu singularități a fluidelor prin medii poroase neomogene 4 307

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- **Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental; de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.**
- **Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).**
- **Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.**
- **Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.**

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- **Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).**
- **Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).**
- **Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).**
- **Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).**
- **Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).**
- **Statistica şi dinamica construcţiilor, metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).**
- **Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).**

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, 19717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.